

4-2 剛体近似

◀ この項で学ぶこと ▶

[剛体近似, 剛体の運動とつりあいの条件, 慣性モーメント, 運動の自由度]

剛体近似

固体の変形を無視して, 構成粒子間の相互距離がつねに一定であるという近似をしよう. これが剛体近似である. つまり, 粒子 i, j 間の変位ベクトル: $\mathbf{r}_{j \rightarrow i} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \text{const.}$ すなわち, $\Delta \mathbf{r}_{j \rightarrow i} = \mathbf{0}$ であるから, (4.13) 式より,

$$\Delta V(\mathbf{r}_{j \rightarrow i}) = -\mathbf{f}_{j \rightarrow i} \cdot \Delta \mathbf{r}_{j \rightarrow i} = 0$$

この式が意味するところは, 相互作用ポテンシャルの変化がどの部分でも認められない, ということなので, $V(\mathbf{r}_{j \rightarrow i}) = 0$ とおいて考える必要がないということになる.

しかし, このことは剛体近似においては内部エネルギーが全く無視できるということにはならない. (4.18) 式から分かるように, 質量中心に対する相対運動エネルギー部分は内部エネルギーとして残される. つまり, 粒子近似と異なり, 剛体近似では, 物体の大きさが無視されていないので物体各部分の質量中心に対して距離を変えない運動, すなわち, 質量中心に対する回転運動は考慮しなければならない訳である.

剛体の運動とつりあいの条件

数学の単元 IB-1-2 で等長変換を習った際に, 図形の形を変えない移動はすべて「平行移動」と「回転移動」の合成となっていることを示した. このことは, 「剛体の運動は, 並進運動と回転運動に分解できる。」ことを意味している.

【1】剛体の並進運動: 剛体に外側から作用する力のみ (n 個あるとする.) を考えた, 剛体の質量中心についての運動方程式によって記述できる. すなわち, (4.3) 式を用いればよい.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \quad (4.3)$$

【2】剛体の回転運動: 剛体の質量中心自体の回転運動の方は (4.3) 式に含まれている. 必

要ならば, (4.3) 式を変形して回転に関する運動方程式: (4.6) の形にすればよい. ここで特に記述すべき回転運動は, 剛体の質量中心を軸とする相対的回転の角運動量:

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \quad (4.21)$$

および, 質量中心を軸とする外側から作用する力のトルクの和:

$$\mathbf{N}'_i = \mathbf{r}'_i \times \mathbf{f}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.22)$$

ただし, \mathbf{r}'_i は質量中心を原点と考えた, 力 \mathbf{f}_i が作用する点 (着力点) の位置ベクトルである. これらを用いて, 相対的回転に関する運動方程式:

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}'_i \quad (4.23)$$

を取り扱って行く.

【3】剛体のつりあいの条件: 並進運動の運動量が変化せずに, 回転運動の角運動量に変化しないということであるが, この条件が満たされていても, 剛体は静止しているとは限らない. 等速度運動や全体が質量中心を軸とする等速回転をする場合でもつりあいが保たれていることはあり得る訳である. (4.2), (4.22) の左辺が 0 となる条件より, つりあいの第 1 条件:

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{0} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \quad (4.24)$$

つりあいの第 2 条件:

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{0} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}'_i \quad (4.25)$$

ただし, $\textcircled{1}$ の条件が成り立っている場合であれば, $\textcircled{2}$ の条件は任意の回転軸についてのトルクの和が 0 の式に置き換えられる. 何故ならば, $\textcircled{1}$ より $\mathbf{v}_c = \text{const.}$ だから, $\mathbf{v}_c \parallel \mathbf{r}_c$ となり, 質量中心自体の角運動量: $M\mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_c = \mathbf{0}$. (4.20) 式より,

$$\mathbf{L} = M\mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i = \text{const.}$$

となり, 任意の軸について

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i$$

となるからである.

例 1 長さ $2l$, 質量 m の密度が一樣な棒 AB を, 水平な床から鉛直な壁に立てかける. 重力加速度の大きさを g , 棒と床の間

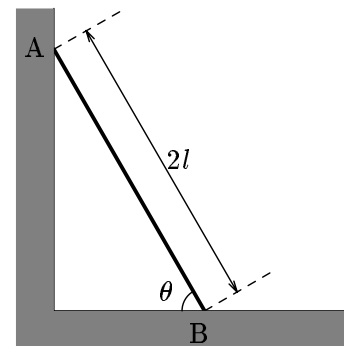


図 4.1: 剛体のつりあい

の静止摩擦係数を μ とする．一方，棒と壁の摩擦は無視できるとする．棒と床とのなす角を θ としたとき，棒が滑らない θ の条件を考える．

棒のつりあいのつりあいを考えるために，図 4.2 (C) 上に $O-xy$ 座標，紙面の裏から表へ向かう z 座標を選ぶ．棒の質量中心は棒が一様な場合 AB の中点 C に位置する．点 A ， B ， C の位置ベクトルは，それぞれ，

$$\begin{cases} \mathbf{r}_A = (0 \ 2l \sin \theta \ 0) \\ \mathbf{r}_B = (2l \cos \theta \ 0 \ 0) \\ \mathbf{r}_C = (l \cos \theta \ l \sin \theta \ 0) \end{cases}$$

となる．また，棒に作用する力は，

$$\begin{cases} \mathbf{f}_A = (N_A \ 0 \ 0) \\ \mathbf{f}_B = (-R_B \ N_B \ 0) \\ \mathbf{f}_C = (0 \ -mg \ 0) \end{cases}$$

ただし，重力 mg は質量中心 C に働くと考えて良い．現象論的な力は壁からの垂直抗力 N_A ，床からの垂直抗力 N_B と静止摩擦力 R_B である．文字はいずれも大きさを表し，その向きは図 4.2 の通りである．

① 剛体のつりあいの第 1 条件：

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B + \mathbf{f}_C$$

これを，成分ごとの和に直すと，

$$(0 \ 0 \ 0) = (N_A - R_B \ N_B - mg \ 0)$$

② 剛体のつりあいの第 1 条件を B 点回りのトルクで考えると，

$$\mathbf{0} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{f}_A + (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{f}_C$$

成分で表すと，

$$(0 \ 0 \ 0) = (-2l \cos \theta \ 2l \sin \theta \ 0) \times (N_A \ 0 \ 0) + (-l \cos \theta \ l \sin \theta \ 0) \times (0 \ -mg \ 0)$$

ここで，ベクトル積の約束：

$$(A_x \ A_y \ A_z) \times (B_x \ B_y \ B_z) = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

より，

$$(0 \ 0 \ 0) = (0 \ 0 \ -2l \sin \theta N_A) + (0 \ 0 \ l \cos \theta mg)$$

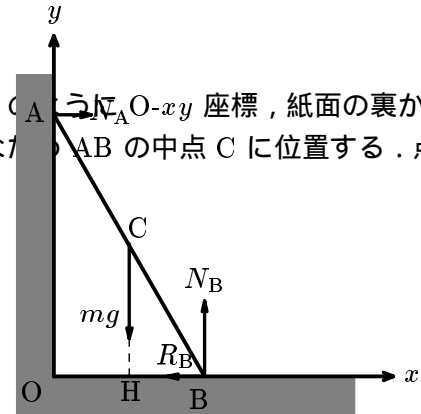


図 4.2: 棒に働く力

$$= (0 \ 0 \ , -2l \sin \theta N_A + l \cos \theta mg)$$

② B 点回りのトルクのベクトル和がゼロであるという式は、既に説明したように、質量中心 C 点回りの式と同値となる。これは ① の式より、

$$\mathbf{f}_C = -\mathbf{f}_A - \mathbf{f}_B$$

の関係があるから、これを ② の式に代入すれば、

$$\mathbf{0} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{f}_A + (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B) \times (-\mathbf{f}_A - \mathbf{f}_B)$$

$$\mathbf{0} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{f}_A + (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{f}_B$$

これは、C 点回りのトルクのベクトル和がゼロであるという式である。

③ つりあいの条件をベクトルの式で展開したが、これはもちろん図 4.2 を見ながら直接的にも考えられる。まず、① の操作は、

$$\begin{cases} (x \text{ 成分}): 0 = N_A - R_B \\ (y \text{ 成分}): 0 = N_B - mg \end{cases}$$

となる。

次に、② の操作：B 点回りのトルクについては、B 点から力 N_A mg を通るそれぞれの直線（これを「作用線」と言う。）までの距離 \overline{OA} \overline{BH} （これを「腕の長さ」と言う。）はだから、B 点に対して時計回りのトルクは、 $\overline{OA} \cdot N_A$ 、そして、反時計回りのトルクは、 $\overline{BH} \cdot mg$ となるので、

$$(z \text{ 成分}): 0 = -\overline{OA} \cdot N_A + \overline{BH} \cdot mg$$

$\overline{OA} = 2l \sin \theta$ $\overline{BH} = l \cos \theta$ であるから、結局、

$$0 = -2l \sin \theta N_A + l \cos \theta mg$$

つまり、これらは、2 つのベクトル式の 0 でない成分の関係に等しい。

④ これらつりあいの式より、現象論的な力がすべて θ の関数として求まる。

$$N_A = R_B = \frac{mg}{2 \tan \theta} \quad N_B = mg$$

⑤ 棒の端 B が滑り出さないという条件：静止摩擦力 R_B は、(2.29) 式より、

$$R_B < \mu N_B$$

の条件を満たしていなければならない。④ の値を代入すると、

$$\frac{mg}{2 \tan \theta} < \mu mg$$

よって,

$$\underline{\underline{\tan \theta > \frac{\mu}{2}}}$$

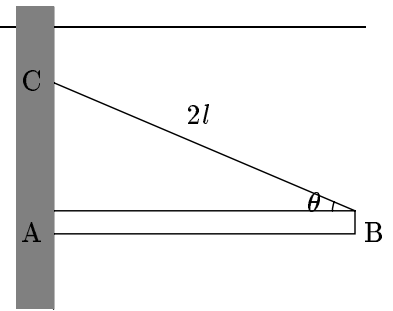


図 4.3: 剛体のつりあい

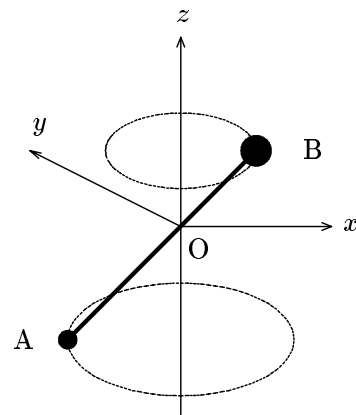
問 1 図 4.3 のように、鉛直な壁に質量 m の一様な棒の端 A を接触させ、棒の他端 B を壁の

C 点に留めた糸で引き、 AB を水平に保つには、 $\angle ABC = \theta$ はどんな範囲になければならないか。ただし、壁と棒の間の静止摩擦係数を μ とする。²

慣性モ - メント

ここまでの説明でも分かるように、剛体の運動を最も特徴づける運動は質量中心の回りの回転運動である。ここではまず、回転軸は z 軸方向に固定されている場合に限定して考えて行こう。また、問題をさらに単純化して、最初は最も簡単な 2 粒子のみからなる剛体を見てみる。

例 2 図 4.4 のように、先端に質量 m_A , m_B のおもり A, B をつけた棒が原点 O に位置する静止した質量中心を通る軸 (z 軸とする。) の回りを角速度 ω で回転するとき、この剛体の回転軸まわりの運動エネルギーはどんな形になるかを考えよう。ただし、棒の部分の質量は無視できるとする。 ω は時刻 t の関数であり、座標 $A(x_A, y_A, z_A)$ および $B(x_B, y_B, z_B)$ も剛体であることの制限があるが、後に指定する。



OA, OB はつねに同一直線上のあるので、角度の時間変化、つまり、角速度 ω はいつも同じである。これは一般の剛体の各部分についても言えることである。また、それぞれの回転平面もつねに xy 平面に平行で変わらない。もし回転平面がずれるとすれば、固定された z 軸回りの回転という仮定に反するからである。これより、 $z_A = \text{const.}$, $z_B = \text{const.}$ である。

角運動量 L_z は (4.21) 式より与えられるが、個々のおもりについては (3.41) 式の書き方ができるから、

$$L_z = m_A(x_A^2 + y_A^2)\omega + m_B(x_B^2 + y_B^2)\omega$$

² **問 1** の答: $\tan \theta < \frac{1}{\mu}$

$$= \{m_A(x_A^2 + y_A^2) + m_B(x_B^2 + y_B^2)\}\omega$$

系が剛体であることから, $\overline{OA} = \text{const.}$, $\overline{OB} = \text{const.}$ だから,

$$x_A^2 + y_A^2 + z_A = \text{const.} \quad x_B^2 + y_B^2 + z_B = \text{const.}$$

かつ, $z_A = \text{const.}$, $z_B = \text{const.}$ だったから, A, B への z 軸からの距離を r_A , r_B とおくと, これらの 2 乗:

$$x_A^2 + y_A^2 = r_A^2 = \text{const.} \quad x_B^2 + y_B^2 = r_B^2 = \text{const.}$$

であり, それぞれに質量 m_A , m_B を掛けた和も定数である. この量を z 軸に関する慣性モメントと言う. これを I_z で表わすと,

$$I_z = m_A r_A^2 + m_B r_B^2$$

となる. これを用いると, 角運動量は

$$L_z = \underline{\underline{I_z \omega}} \quad (4.24)$$

と表わされる.

一方, 剛体の回転の運動エネルギー K は, 内部エネルギー U : (4.18) 式の第 1 項である (第 2 項は 0 となった.) A, B は, それぞれ, 半径 r_A , r_B の円運動をしているから, その速さは $r_A \omega$, $r_B \omega$ で表わされるから,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_A (r_A \omega)^2 + \frac{1}{2} m_B (r_B \omega)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_A (r_A^2 + m_B r_B^2) \omega^2 \end{aligned}$$

ここでも慣性モメント I_z が使えて, 運動エネルギーは,

$$K = \frac{1}{2} \underline{\underline{I_z \omega^2}} \quad (4.25)$$

と表わされる.

問 3 上の **例 2** で, おもり A, B は等質量 m で, $\overline{AB} = 2l$ が z 軸に垂直に回転する場合の慣性モメントを求めよ.³

一般に, n 個の粒子からなる剛体の場合においても, 角運動量: (4.25), 運動エネルギー: (4.26) の式の形は変わらず, 定数である慣性モメント I_z を同様に計算しておけばよい. すなわち, i 番目の粒子の質量を m_i とし, z からの距離を r_i とおくと,

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

³ **問 3** の答: $2ml^2$

ところで，粒子数が極端に多い場合の剛体がしばしば問題となるが，この場合には剛体を連続した物体とみなし，慣性モ - メントの計算も積分に置き換えて実行される場合が多い．今，簡単のため， n 個の粒子が等間隔 Δr で並んでいて，線密度を $\rho(r_i)$ として， $m(i) = \rho(r_i)\Delta r$ とおける場合とする．区分求積法から，

$$I_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n r_i^2 \rho(r_i) \Delta r = \int_a^b \rho(r) r^2 dr \quad (4.26)$$

となる．ただし，剛体の長さは $r = a$ から $r = b$ まで分布し， $\Delta r = \frac{b-a}{n}$ とした．

例 3 図 4.5 のような，質量 M ，半径 R の一様な円板の垂直な中心軸（図の z 軸）に関する慣性モ - メントを求めよ．

斜線部の半径 r ，幅 Δr のド - ナツ状の部分の慣性モ - メント： ΔI_z は，密度を ρ とおいて，

$$\Delta I_z = \rho \times 2\pi r \Delta r \times r^2$$

であるから，このような値を $r = 0 \sim R$ まで連続的に加えればよい．

$$I_z = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho \times \frac{1}{4}R^4$$

ここで， $M = \rho \times \pi R^2$ だから，

$$I_z = \frac{1}{2}Mr^2$$

問 4 質量 M ，長さ $2l$ の細い一様な棒 AB の垂直な中心軸（図 4.6 (a) の z 軸）に関する慣性モ - メントを求めよ．また，同じ棒の端 A を通る垂直な軸（図 4.6 (b) の z 軸）に関する慣性モ - メントの値の違いは何によるものか．⁴

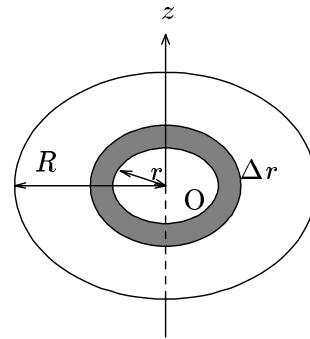


図 4.5: 円板の慣性モ - メント

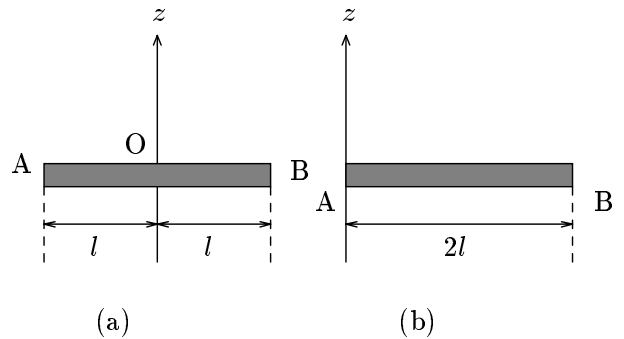


図 4.6: 棒の慣性モ - メント

⁴問 4 の答： $\frac{1}{3}Ml^2$ ， $\frac{4}{3}Ml^2 - \frac{1}{3}Ml^2 = Ml^2$ は，(b) の軸に関する質量中心の慣性モ - メント．

運動の自由度

「運動の自由度」については、力学で導入すべきだったのであるが、カリキュラムの都合で、単元 III-1 で比熱を習った段階で使っている。逆輸入の感があるが、改めてここで考える。

1 個の自由粒子の位置は (x, y, z) の 3 つの数字を与えれば定まる。あるいは、自由粒子の運動は (v_x, v_y, v_z) の速度の 3 成分を持つ。いずれも、方程式を立てたとき、独立な解が 3 つあるということで、このような場合、「自由粒子の運動の自由度： $f = 3$ である。」

と言う。同様に n 個の自由粒子の運動の自由度は、 $f = 3n$ となる。ところが、剛体の運動の自由度はわずか $f = 6$ と極めて小さくなる。この理由は、まず、3 粒子のみからなる剛体の自由度が $f = 6$ である（座標の数： 3×3 から、互いの距離一定の 3 つの条件式の数を差し引く。）⁵ 数学の単元 IB-1 でも触れて来たことであるが、形を変えない物体はその中の 3 点 A, B, C を指定すれば、系内のすべての点 P_1, P_2, \dots の位置や運動が確定される。

- ① n 粒子の座標の数 $\dots 3n$ 個。
- ② $n - 3$ 粒子の基準の 3 粒子との間の距離が一定の条件式の数 $\dots 3(n - 3)$ 。
- ③ 基準の 3 粒子間の距離が一定の条件式の数 $\dots 3$ 。
- ④ 自由度： $f = 3n - 3(n - 3) - 3 = \underline{6}$

さらに、前項のように回転軸を固定してこの軸の回りのみ回転する、という制限を設ければ、自由度 6 からさらに減る。基準の 3 粒子 A, B, C をこの場合に定め直すと、

- ① A, B, C の座標の数 $\dots 3 \times 3 = 9$ 。
- ② A, B を回転軸の直線上に選ぶことによる自由度減 $\dots 3 \times 2 = 6$
- ③ CA, CB の距離が一定の条件式の数 (AB は不要となる) $\dots 2$ 。
- ④ 自由度： $f = 9 - 6 - 1 = \underline{1}$

前項で見たように、固定軸の場合の剛体の運動は、ただ 1 成分の角運動量 L_z のみで記述できる。もし剛体の外からの力による z 成分のトルク： N_z が与えられるなら、慣性モーメント： I_z によって、 $L_z = I_z \omega_z$ と表わされるから、運動方程式：

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = N_z \quad (4.27)$$

⁵前項の 2 粒子からなる剛体では、例外的に $f = 5$ となる。

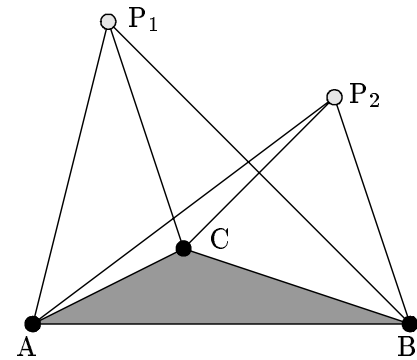


図 4.7: 剛体の自由度

を、適当な初期条件の下に解くことによって、固定軸である z 軸回りの角速度 ω_z が決定され、運動が記述されるのである。

次に、一点を固定された剛体の運動は、自由度 3 減ることになるから、 $f = 6 - 3 = 3$ の自由度を持つ。この場合、固定点の場合の剛体の運動は、剛体の回転の運動方程式が 3 成分を持つから、少し複雑となる。

[参考]

前章 3-2 で見てきた回転運動はすべて一平面内(これを xy 平面とする。)で起こるものであった。つまり回転の軸を考えればこの平面に垂直(z 軸)に固定されたものに限っていた。したがって粒子の速度も (3.45) 式のように 2 次元ベクトルで表現できて、特に回転の径に垂直な速度成分は $v = r\omega$ となり、角速度 ω については反時計回り(正)、時計回り(負)以外の回転の方向を考える必要はなかったのである。しかし、固定点の場合の剛体の運動では回転の軸自体も向きを変える。そこで改めて回転の向きを 3 次元ベクトルで指定することにしよう。それには、角速度をベクトル ω として取り扱い、大きさについては今まで通りであるが、ベクトルの向きは物体の回転の向きを表すようにする。これには、ベクトルの向きを回転軸に一致させ、物体の回転の向き右ねじを回したときねじの進む向きを示すと約束する。例えば、今までの回転は角速度 $\omega = (0 \ 0 \ \omega_z)$ であり、 $\omega_z > 0$ ならば反時計回り、 $\omega_z < 0$ ならば時計回りとなる。実は、3-2 で導入した角運動量もベクトルとして取り扱う場合は、回転の向きは同様の約束で指定される。

【1】角速度の一般化：図 4.8 の O 点は固定された点である。これを原点とした位置ベクトル r が ω で指定される軸の回りを回転する場合を考える。つまり、 r の終点が示すのは剛体内のある 1 点であって、その点が回転運動をするにたがって r 円錐の側面を形作る。

r の終点(矢印の先)は微小の時間 Δt たつと半径を変えず角 $\omega\Delta t$ 回転する。ただし、 $\omega = |\omega|$ とする。速度 v とおくと矢印の先の変位は $v\Delta t$ で、 r にも、 ω にも垂直である。すなわち、

$$v\Delta t \parallel \omega \times r$$

また、図 4.8 から、ベクトル $v\Delta t$ の大きさは、微小の角 $\omega\Delta t$ と円の半径 $r \sin \theta$ の積となることが分かる。ただし、 $r = |r|$ であり、 θ は ω と r のなす角である。この $v\Delta t$ の向きと大きさの関係から、

$$v\Delta t = \omega\Delta t \times r$$

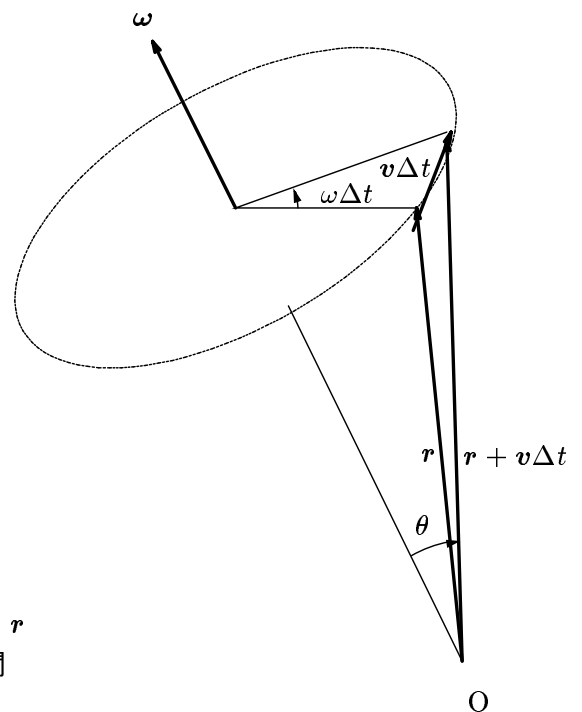


図 4.8: 位置ベクトルの回転

すなわち，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad (4.28)$$

の関係が成り立つことが分かる．

【2】角運動量：次に，位置ベクトル \boldsymbol{r} の点にある質量 m の物体の角運動量 \boldsymbol{l} は，(3.39) 式で，運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ とおいて，

$$\boldsymbol{l} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

この式に (4.28) 式を代入すると，

$$\boldsymbol{l} = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

このようなベクトル 3 重積については，数学の単元 I-3-4 で既に習ったように，スカラー積を用いて， $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ と変形されるから，これを使って，

$$\boldsymbol{l} = m(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}$$

の形となる．例えば， $\boldsymbol{r} = (x \ y \ z)$ ， $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)$ とおいて，角運動量の z 成分 l_z を考えてみると， $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ であり， $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$ だから，

$$l_z = m\{(x^2 + y^2 + z^2)\omega_z - z(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)\}$$

故に，

$$l_z = m\{\omega_z(x^2 + y^2) - \omega_x zx - \omega_y yz\} \quad (4.29)$$

固定軸の場合には，右辺のかっこの中の第 2，3 項は存在しなかった．

ここで，剛体が n 個の粒子からなっているとす．この節の初めからやってきたように， i 番目の粒子の質量を m_i ，座標 $(x_i \ y_i \ z_i)$ とする．ただし， $i = 1, 2, \dots, n$ である． n 個の粒子は相互距離を変えずに回転するから，各粒子の角速度 $(\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)$ はすべて共通である．このことは自由度 $f = 3$ の反映でもある．剛体の角運動量 $(L_x \ L_y \ L_z)$ は (4.29) 式，および，これを $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ とサイクリックに置き換えた他の成分の式の n 個の和をとることで得られる．

$$L_x = \omega_x \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i \quad (4.30)$$

$$L_y = \omega_y \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i - \omega_x \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \quad (4.31)$$

$$L_z = \omega_z \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) - \omega_x \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i - \omega_y \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \quad (4.32)$$

この関係は、行列を使って書いた方が見やすい。

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^n m_i z_i x_i \\ -\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2) & -\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^n m_i z_i x_i & -\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

これを

$$L = \tilde{I} \omega$$

と書くことにする。行列 \tilde{I} の対角線の部分に、順に、 x, y, z 軸に関する慣性モーメントが並ぶことに注目しておく。

【3】運動エネルギー - : 剛体の回転の運動エネルギーを、ここでは K とおく。 K は、(4.28) 式を使って、

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i \cdot (\omega \times r_i)$$

のように変形できる。最右辺の項は今度はスカラー・3重積と呼ばれる形となったから、公式： $a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$ を使って、

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \omega \cdot (r_i \times v_i)$$

右辺で ω を除いた部分は全角運動量 L であるから、結局、

$$K = \frac{1}{2} \omega \cdot L \quad (4.34)$$

と表される。

【4】座標変換：前章 3-2 で円運動を見たときに、座標 (x, y) から、原点 O を中心に角 θ 座標を回転した (x', y') に変換すると、式の形が簡単になって取り扱い易くなることを知った。ここでは回転が 3 次元であるためもっと複雑であるが、その具体的な形を知らなくても、数学の単元 I-5 にある対称行列の対角化を手法を用いてその結果を知ることができる。以下はそのアウトラインのみ記す。

対称行列である \tilde{I} の固有ベクトルから作った直交行列を A とすると、

$$A \tilde{I}^t A = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix}$$

行列 A は固定点を原点 O とし、空間に固定された座標 $r = (x, y, z)$ から、剛体と共に角速度 ω で回転する座標 $r' = (x', y', z')$ に変換したことを意味している。つまり、

$$r' = A r$$

この座標で記述すれば，角運動量は固定軸のときのように，

$$L_{x'} = I_{x'}\omega_{x'} \quad (4.35)$$

$$L_{y'} = I_{y'}\omega_{y'} \quad (4.36)$$

$$L_{z'} = I_{z'}\omega_{z'} \quad (4.37)$$

となり，角速度成分と慣性モ - メント：

$$I_{x'} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i'^2 + z_i'^2) \quad (4.38)$$

$$I_{y'} = \sum_{i=1}^n m_i (z_i'^2 + x_i'^2) \quad (4.39)$$

$$I_{z'} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \quad (4.40)$$

のみを使って表すことができる．また，運動エネルギー - も (4.24) 式より，

$$K = \frac{1}{2}(L_{x'}\omega_{x'} + L_{y'}\omega_{y'} + L_{z'}\omega_{z'}) = \frac{1}{2}(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2) \quad (4.41)$$

の形となる．

例 4 一定角速度 ω で自転するこまは，こまの自転軸に関する慣性モ - メント I も定まるから，自転の角運動量の大きさ $L = I\omega$ も一定である．図 4.9 のように， $L = \text{const.}$ で自転するこまが固定点 O で才差運動をする場合について考える．⁶ここでは，才差運動の角速度 Ω を求めよう．こまの軸と鉛直線とのなす角を θ ，原点 O としてこまの質量中心の位置を示す位置ベクトル： r （大きさ： r ）とすると，トルク： N （大きさ： N ）は重力： mg （大きさ： mg ）による．

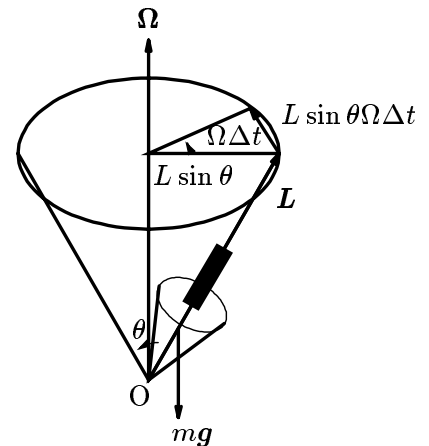
$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g}, \quad N = mgr \sin \theta$$

したがって， N の方向は才差運動の回転面上で

回転円の接線方向である．一方，才差運動の角速度： Ω は回転ベクトルの約束にしたがって鉛直上向きである．こまの回転の運動方程式は，

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

角運動量の変化： ΔL は，角運動量 L の大きさは変えず向きのみの変化によ



⁶この問題は，III-3-3 で磁性体を論ずるときに必要である． 図 4.9: こまの才差運動

ってもたらされる。数学的な関係は、図 4.7 で r , $\omega\Delta t$, $v\Delta t$ の間の関係から、(4.28) 式: $v = \omega \times r$ を導いたことを踏まえて、図 4.8 の関係は $r \rightarrow L$, $\omega\Delta t \rightarrow \Omega\Delta t$, $v\Delta t \rightarrow L\Delta t$ と対応を考えれば、

$$\frac{dL}{dt} = \Omega \times L$$

が得られる。右辺の大きさは

$$|\Omega \times L| = \Omega L \sin \theta$$

結局、運動方程式より、

$$\Omega L \sin \theta = mgr \sin \theta$$

才差運動の角速度は、

$$\Omega = \frac{mgr}{\underline{\underline{L}}}$$

と与えられる。