第 4 章 内部構造のある物体

4–1 内部エネルギー

≪ この項で学ぶこと ≫
[**全運動量，全角運動量，全エネルギーと内部エネルギー**]

★ 全運動量

III–1 物質の熱的構造の所で，気体，液体，固体の内部構造の違いが原子のふるまいの違いによること，および，内部エネルギーについても習って来た．一方，この単元 I では，物体に作用する現象論的な力の起源については原子のふるまいを考察することはあっても，運動する側の物体の内部構造については一切考えずに「粒子」として取り扱って来た．いわゆる「粒子近似」が良く成り立つ背景には，いろいろな力学的な物理量を見るときに多くの場合，そこに内部構造が浸み出して来ないという事情があったに違いない．ここでは少し詳しくこの問題の周辺について考察して行こう．以下では，いくつかの粒子の集団をまとめて一つの力学系として取り扱う．つまり，今まで粒子として考えていたものが力学系であって，その内部の構成要素をあらためて粒子と考える訳である．構成要素を原子と考える場合もあるが，銀河系のおける星団である場合もあり，対象は特に定まっていない．

はじめに，I–1–3 で習ったことのおさらいから始めよう．n 個の粒子に番号を付け，その運動量 $\boldsymbol{p}_i,(i=1,2,\cdots,n)$，$i$ 番目の粒子に力学系の外から作用する力を $\boldsymbol{f}_i$，系内の j 番

目の粒子から i 番目の粒子に作用する力を $\boldsymbol{f}_{j\to i}$ とおく．各粒子についての運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}=\boldsymbol{f}_i+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_{j\to i},\qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.1}$$

ただし，ここで，$\boldsymbol{f}_{i\to i}=0$ とおいておく．n 個の運動方程式を辺々足し合わせた式が，力学系の運動方程式となると考えて良いであろう．

ここで，系の**全運動量**は，

$$\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i \tag{4.2}$$

だったから，(4.1) 式の左辺の和は $\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt}$ となる．

(4.1) 式の右辺の和は，

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_{j\to i}$$

第 1 項は N 個の粒子に力学系の外から作用するすべての力のベクトル和であるから，これを $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i=\boldsymbol{F}$ とおく．第 2 項の計算については，I–3 の $\boxed{\text{問 3}}$ で，$n=3$ についてやった計算を思い出してみよう．

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{f}_{j\to i}=\boldsymbol{f}_{1\to1}+\boldsymbol{f}_{1\to2}+\boldsymbol{f}_{1\to3}+\boldsymbol{f}_{2\to1}+\boldsymbol{f}_{2\to2}+\boldsymbol{f}_{2\to3}+\boldsymbol{f}_{3\to1}+\boldsymbol{f}_{3\to2}+\boldsymbol{f}_{3\to3}$$

形式的においた項 $\boldsymbol{f}_{1\to1}=\boldsymbol{f}_{2\to2}=\boldsymbol{f}_{3\to3}=0$．そして，作用・反作用の法則より，

$$\boldsymbol{f}_{1\to2}+\boldsymbol{f}_{2\to1}=0,\quad \boldsymbol{f}_{2\to3}+\boldsymbol{f}_{3\to2}=0,\quad \boldsymbol{f}_{3\to1}+\boldsymbol{f}_{1\to3}=0$$

N 個の粒子の場合でも同様に，作用・反作用の法則より，i,j すべての粒子の組み合わせについて，

$$\boldsymbol{f}_{i\to j}+\boldsymbol{f}_{j\to i}=0$$

となるから，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_{j\to i}=0$ となって，結局，(4.1) 式の右辺の和は，

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_{j\to i}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i=\boldsymbol{F}$$

となって，力学系を一つの粒子として考えたとき，内部構造に係わる系内の力は打ち消されて全く見えて来ないことが分かる．したがって，この運動方程式は，全運動量 $\mathbf{P}$ と外から作用する合力 $\boldsymbol{F}$ とから，

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F} \tag{4.3}$$

あるいは，(1.25) 式で導入した**質量中心の速度**：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\boldsymbol{P}}{M}$$

（ただし，i 番目の粒子の質量，速度：m_i,$\boldsymbol{v}_i$，全質量 M とする.）を用いて，運動方程式を

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{4.4}$$

と取り扱うことができる.

★　全角運動量

I–3–2 の (3.39) 式で角運動量：$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ を導入したときは，粒子に作用する力としては「中心力」に限定して考察した．ここでは，力についての制限は取り払って考える．粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$，作用する力 $\boldsymbol{f}$ として，運動方程式：

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$$

の両辺に，右から粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を掛けるベクトル積の演算をする.

$$\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$$

この式の左辺が角運動量の時間変化：$\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}$ となることは習った．一般的には $\boldsymbol{0}$ とはならない右辺の物理量を**トルク**[1]と呼ぶ．今，これを $\boldsymbol{N}$ と表すと，

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} \tag{4.5}$$

トルクは物体の回転に関する力の効果を量として表したものであるが，これを具体的に取り扱うのは次の節へ行ってからにする．これらを用いると，粒子の**回転に関する運動方程式**は，

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{4.6}$$

「粒子の角運動量の時間変化はトルクに等しい.」

再び，N 個の粒子からなる力学系について考えてみる．粒子の位置ベクトル，角運動量 $\boldsymbol{t}\ i$,$\boldsymbol{l}_i$,$(i = 1, 2, \cdots, n)$，前項と同様に，i 番目の粒子に力学系の外から作用する力を $\boldsymbol{f}_i$，系

[1] 力のモーメントという用語は採用しない.

内の j 番目の粒子から i 番目の粒子に作用する力を $\boldsymbol{f}_{j\to i}$ とおく．各粒子についての回転の運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{j\to i}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.7}$$

n 個の回転の運動方程式を辺々足し合わせた式が，力学系の回転の運動方程式となると考えて良いであろう．

ここで，系の**全角運動量**は，

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{l}_i \tag{4.8}$$

だったから，(4.7) 式の左辺の和は $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}$ となる．

(4.7) 式の右辺の第 2 項の和は，また，例として $n = 3$ の場合に考えてみると，（今度は $\boldsymbol{f}_{i\to i}$ の項は書かないことにする．）

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{j\to i} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{f}_{2\to 1} + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{f}_{3\to 1} + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{f}_{1\to 2} + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{f}_{3\to 2} + \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{f}_{1\to 3} + \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{f}_{2\to 3}$$

作用・反作用の法則を使って，$\boldsymbol{f}_{1\to 2} = -\boldsymbol{f}_{2\to 1}$ などと書き直してまとめると，

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_{j\to i} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{f}_{2\to 1} + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3) \times \boldsymbol{f}_{3\to 2} + (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{f}_{1\to 3}$$

$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \Delta \boldsymbol{r}_{2\to 1}$ は，粒子 2 から粒子 1 への変位ベクトルであり，もし，粒子 1, 2 間の力が引力か斥力であり,$\Delta \boldsymbol{r}_{2\to 1}$に平行であると仮定するならば

$$\Delta \boldsymbol{r}_{2\to 1} \times \boldsymbol{f}_{2\to 1} = \boldsymbol{0}$$

となる．同様に，他の粒子の組み合わせについても $\boldsymbol{0}$ となり，トルクの場合も，引力か斥力という条件はあるものの，系内の力によるものは打ち消されることが分かる．このことは，一般の n についても証明できる．したがって，系外からの力による全トルクを $\boldsymbol{N} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i$ とおくと，力学系の回転の運動方程式は，全角運動量 $\boldsymbol{L}$ と外から作用する全トルク $\boldsymbol{N}$ とから，

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{4.9}$$

となり，ここでも内部構造に係わる系内の物理量は打ち消されて全く見えて来ない．

★　全エネルギーと内部エネルギー

前項，前々項で見たように，何ら内部構造のことを考えなくても，力学系についての運動方程式を立てて，全体としての運動を考察することができた．ところが，力学系のエネルギーについては事情が異なる．

粒子の質量，速度を $m_i, \boldsymbol{v}_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ とおいて，各粒子についての運動方程式：

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{f}_i + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_{j\to i}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.10}$$

力についての約束は，前と同じである．両辺に，粒子の速度 $\boldsymbol{v}_i$ を掛けるスカラー積の演算し，n 個の和をとる．

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{v}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_{j\to i} \cdot \boldsymbol{v}_i \tag{4.11}$$

右辺が粒子の運動エネルギーの和の時間変化になる．

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

ただし，$|\boldsymbol{v}_i| = v_i$ とする．左辺第 1.2 項は，それぞれ，系外からの力と系内の力の仕事率の和である．

ここで，(4.10) 式の右辺の力がすべて <u>保存力の場合</u> と仮定する． 適当な基準点をとった系外からの力のポテンシャルを $V(\boldsymbol{r}_i), (i = 1, 2, \cdots, n)$ とおいて,（I–2，I–3 では U とおいた.）その微小変化を定義にしたがって，

$$\Delta V(\boldsymbol{r}_i) = -\boldsymbol{f}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i \tag{4.12}$$

と書く．同様に，系内の力の相互作用ポテンシャルを $V(\boldsymbol{r}_{j\to i}), (i,\ \mathrm{j} = 1, 2, \cdots, n)$ とおいて，その微小変化を（I–2–1 の (2.11) 式をベクトルに直したもの.）定義にしたがって，

$$\Delta V(\boldsymbol{r}_{j\to i}) = -(\boldsymbol{f}_{j\to i} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{f}_{i\to j} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_j) = -\boldsymbol{f}_{j\to i} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_{j\to i} \tag{4.13}$$

と書く．ただし，(4.13) 式の最右辺の形は作用・反作用の法則より ，$\boldsymbol{f}_{i\to j} = -\boldsymbol{f}_{j\to i}$，また，変位ベクトル：$\boldsymbol{r}_{j\to i} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ の微小変化： $\Delta \boldsymbol{r}_{j\to i}$ を用いた.（もちろん，形式的に $V(\boldsymbol{r}_{i\to i})$ をつくってもこれは 0 である.）

(4.12)，(4.13) 式の両辺を時間 Δt で割って極限 $\Delta t \to 0$ をとると，(4.11) 式の右辺となる．結局，

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} V(\boldsymbol{r}_i)\right) - \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V(\boldsymbol{r}_{j\to i})\right)$$

移項して t で積分する．積分定数を E とおく．E がこの力学系の**全エネルギー**である．

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^{n} V(\boldsymbol{r}_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V(\boldsymbol{r}_{j\to i}) \tag{4.14}$$

例 1 地表の重力ポテンシャルについては，I–2–2 (2.23) 式や II–3–1 で習ったが，地表を原点 O，鉛直上向きに y 軸をとったとき，n 粒子の力学系で 原点を基準とした i 番目の粒子についての重力ポテンシャルが $V(y_i) = -m_i g y_i$,(g：重力加速度) で表されるとき，$\sum_{i=1}^{n} V(y_i)$ を質量中心の座標 y_{c} で表現することを考えてみよう．

全質量を M とおくと，質量中心の定義より，

$$My_{\mathrm{c}} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

だから，

$$\sum_{i=1}^{n} V(y_i) = -(\sum_{i=1}^{n} m_i y_1)g = \underline{\underline{-Mgy_{\mathrm{c}}}}$$

したがって，この場合（$f_1 = -m_i g$）のような一定な力の定数をもつ力に対しては，ポテンシャルは

$$V(\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}) = \sum_{i=1}^{n} V(\boldsymbol{r}_i) \tag{4.15}$$

のように，力学系の内部の構成粒子の座標によらずに表現できる．

問 1 n 粒子が水平な x 軸上に並ぶとき，質量中心の回りの重力のトルクは 0 となることを示せ．

さて，系の全運動量，全角運動量と全エネルギーの大きな違いは，系外からの力のポテンシャルが (4.14) 式のように質量中心の座標の関数として表せたとしても，系内の相互作用ポテンシャルの和が一般には，構成粒子の座標の関数として残ってしまうことである．また，系の全運動量は全質量がそこに存在するとした質量中心の運動量に等しいが，系の全運動エネルギーは質量中心の運動エネル ギーには等しくない．このことを示すために，粒子についての**質量中心に対する相対速度**：

$$\boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}, (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.16}$$

を導入し，質量中心に対する相対運動エネルギーの和を展開してみよう．

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i {\boldsymbol{v}'_i}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}})^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i {\boldsymbol{v}_i}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i {\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}}^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}$$

$\sum_{i=1}^{n} m_i = M$，そして $\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = M v_{\mathrm{c}}$ だから，

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i {\boldsymbol{v}'_i}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i {\boldsymbol{v}_i}^2 + \frac{1}{2}M{\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}}^2 - M{\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i {\boldsymbol{v}_i}^2 - \frac{1}{2}M{\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}}^2$$

この式を移項すれば，結局，全運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i {\boldsymbol{v}_i}^2 = \frac{1}{2}M{\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i {\boldsymbol{v}'_i}^2 \tag{4.17}$$

質量中心の運動エネルギーと質量中心に対する相対運動エネルギーの和となる．

質量中心に対する相対運動エネルギーと系内の相互作用ポテンシャルの和：

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i {\boldsymbol{v}'_i}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V(\boldsymbol{r}_{j\to i}) \tag{4.18}$$

を力学系の**内部エネルギー**と呼ぶ．結局，全エネルギー E は，

$$E = \frac{1}{2}M{\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}}^2 + V(\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}) + U \tag{4.19}$$

となって，一般には，内部エネルギー U は無視できない場合も多い．

[**参考**]

全角運動量 $\boldsymbol{L}$ は粒子の角運動量の和であるが，そのことは $\boldsymbol{L}$ が質量中心の角運動量であることを意味しない．

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

であるが，質量中心に対する相対位置： $\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}$，相対速度：$\boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}$ より，

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}) \times m_i(\boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i + \sum_{i=1}^{n} m_i(\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} \times \boldsymbol{v}'_i)$$

右辺の第 3 項は，

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}'_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} = M\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} - M\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i' = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} = M\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} - M\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} = 0$$

だから，0 となる．結局，

$$\boldsymbol{L} = M\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i' \tag{4.20}$$

であるから，
「全角運動量は質量中心の回転に関する角運動量と質量中心の軸とする相対的回転の角運動量の和となる.」