3–2　回転運動

≪ この項で学ぶこと ≫
[**円運動，角運動量保存則，ケプラー運動**]

★　円運動

粒子の質量 m，速度 (v_x,v_y)， 加速度 (a_x,a_y)，力 (f_x,f_y) とおく．すなわち，円運動も平面運動の一例であるから，適当な慣性座標 O$-xy$ における運動方程式から出発する．

$$ma_x = f_x \tag{3.28}$$

$$ma_y = f_y \tag{3.29}$$

束縛条件は粒子が，中心を原点 O，半径 r の円軌道上を動くことである．ここで，ガウス平面と複素数の極形式を利用して，この束縛条件下の速度，加速度を調べてみる．$z = re^{i\theta}$， $r =$const. とおく．θ は粒子の位置を P としたとき，OP と x 軸のなす角である．

$$z = x + iy, \quad \frac{dz}{dt} = v_x + iv_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = a_x + ia_y$$

また，$|z|^2 = x^2 + y^2 = r^2$ となる．

時間微分を実行すると，

$$\frac{dz}{dt} = ir\frac{d\theta}{dt}e^{i\theta} = ir\omega e^{i\theta}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 e^{i\theta} + ir\frac{d^2\theta}{dt^2}e^{i\theta} = (-r\omega^2 + ir\beta)e^{i\theta}$$

ただし，$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$， $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \beta$ とおいた．ω を**角速度** (前節の調和振動のときの角振動数と同じ文字を使うが，意味は違う.)，β を**角加速度**と呼ぶ．$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と直して，それぞれの実部と虚部を，x 成分，y 成分と読み替えると，

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{3.30}$$

$$v_x = -r\omega\sin\theta, \qquad v_y = r\omega\cos\theta \tag{3.31}$$

$$a_x = -r\omega^2\cos\theta - r\beta\sin\theta, \quad a_y = -r\omega^2\sin\theta + r\beta\cos\theta \tag{3.32}$$

もちろん，このままガウス平面でも議論できるが，ここからは，実際の平面座標に戻ることにする．

図 3.5 のように，座標 (x, y) から，原点 O を中心に角 θ 座標を 回転した (x', y') に変換して，そこから粒子の運動を見ることにする．位置ベクトル，速度ベクトル，加速度ベクトル，そして，やや後に出てくる力のベクトルの両座標による成分表示の間には，線形変換の行列

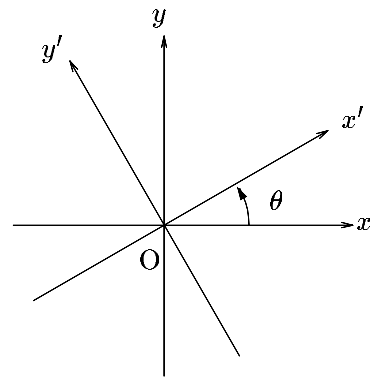


図 3.5: 座標変換

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を用いた，変換式が，それぞれ，成り立つ．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\omega\sin\theta \\ r\omega\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos\theta - r\beta\sin\theta \\ -r\omega^2\sin\theta + r\beta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \\ r\beta \end{pmatrix}$$

速度は大きさ $v = r\omega$ で，図 3.6 の向き．加速度 $\dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$ と $\dfrac{dv}{dt} = r\beta$ は 図 3.7 の向き．それぞれ，元の成分との関係も図から見ることができる．

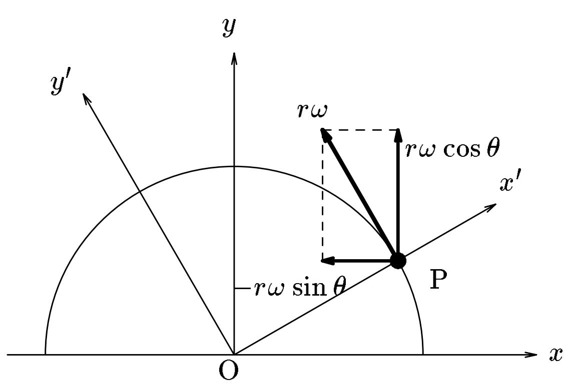


図 3.6 円運動の速度

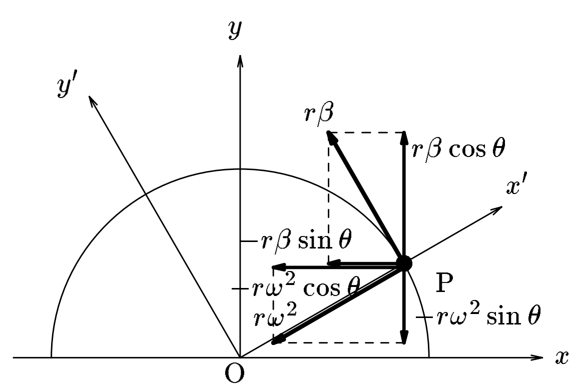


図 3.7 円運動の加速度

運動方程式：(3.28)(3.29) は，この変換によって，

$$m(-r\omega^2) = f_{x'} \tag{3.33}$$

$$mr\beta = f_{y'} \tag{3.34}$$

ただし，右辺の力は

$$\begin{pmatrix} f_{x'} \\ f_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

と，同じく座標変換された成分である．

ここで,「座標系 O$-x'y'$ は，粒子が瞬間的に x' 軸上に来ているが，あくまでも元の慣性系 O$-xy$ と一定角をなして固定された新しい慣性系である.」粒子と共に動いて行くような非慣性座標ではないことに注意せよ．

例 4 水平と角 θ をなす接平面から垂直抗力 N を受ける，質量 m の小物体の運動方程式は，水平右向きの x 軸と鉛直上向きの y 軸を選び，加速度を (a_x, a_y) とおくと，

$$ma_x = -N\sin\theta$$
$$ma_y = N\cos\theta - mg$$

と表される．右辺の力は，図 3.8 のように各成分に分解できるからである．しかし，左辺の加速度成分は，問題によって様々な束縛条件が課せられるので，多くの場合は図 3.5 のような角 θ 回転した $x'y'$ 座標 に変換して取り扱った方が便利である．このことを，2 つの例について考えてみよう．

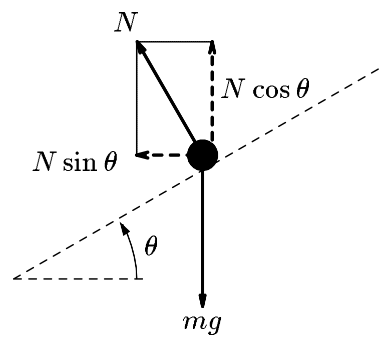


図 3.8: 傾角 θ の接平面

【1】第 2 章のトレーニング B4 で考えた，小物体 A は質量 M の動き得る斜面 B 上の乗っている例を考える．摩擦はすべて無視できる場合とする．図 3.9 のように，ある瞬間 x' 軸を斜面と一致させておいても，次の瞬間には A，B は点線で示したような位置に移動してしまう． $x'y'$ 座標はあくまでも床に固定された慣性系の一つなのである．既に解いた問題であるので，ここでは，A の運動方程式の $x'y'$ 成分，B の運動方程式の x 成分，および，加速度についての束縛条件の式を求めることのみとする．4 つの式から，A の加速度の $x'y'$ 成分：$a_{x'}, a_{y'}$，B の加速度の x 成分：

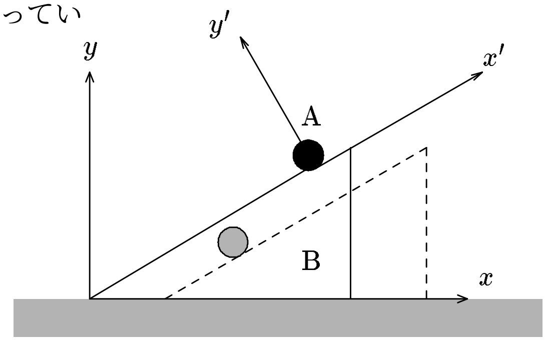


図 3.9: 動く斜面上の運動

A_x と，垂直抗力の大きさ：N が決定できる．

A に働く力は図 3.10 のようになる．B については，水平成分のみ考慮するため，B に働く力としては，B から A に作用した垂直抗力の内の水平成分（図 3.8 の x 成分）：$-N\sin\theta$ の反作用として A から B に作用する $+N\sin\theta$ のみを考えればよい．運動方程式は，それぞれ，以下のようになる．

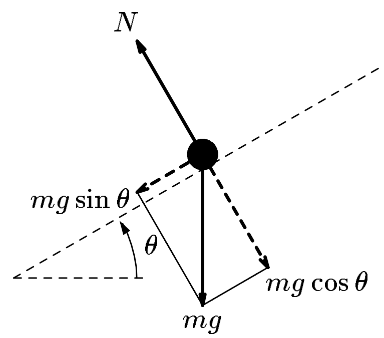


図 3.10: 力の成分分解

$$\underline{\underline{ma_{x'} = -mg\sin\theta}}$$
$$\underline{\underline{ma_{y'} = N - mg\cos\theta}}$$
$$\underline{\underline{MA_x = N\sin\theta}}$$

一方，B は x 方向にのみ移動するから，加速度の y 成分は 0 であり，B の加速度の x' 成分は $A_x\cos\theta$，y' 成分は $-A_x\sin\theta$ と表される．B に乗って観測すれば，A は水平と角 θ をなして落下するように見えるから，B にたいする A の相対加速度の y' 成分は 0 である．このことが，束縛条件の式となる．

$$\underline{\underline{a_{y'} - (-A_x\sin\theta) = 0}}$$

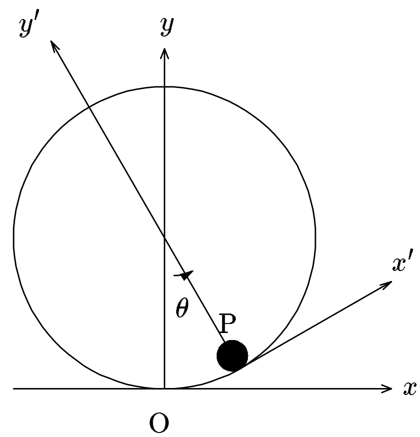


図 3.11: 球面内の運動

【2】今度は，図 3.11 のように，固定された半径 r の球面があり，その内部の最下点 O から，質量 m の小物体 P を水平方向に初速 v_0 で滑らせたとき，P の加速度の $x'y'$ 成分：$a_{x'}$,$a_{y'}$ と，垂直抗力の大きさ：N を，鉛直下向きとのなす角 θ の関数として求めよう．

P の運動方程式は，(3.33)，(3.34) 式を参考に（ただし，x',y' 軸の取り方が違うことに注意.），$a_{x'} = r\beta$,$a_{y'} = r\omega^2$ と角速度 ω，角加速度 β を用いて，

$$mr\beta = -mg\sin\theta \tag{3.35}$$
$$mr\omega^2 = N - mg\cos\theta \tag{3.36}$$

と表される．右辺は図 3.10 が全く同じように使える．加速度の x' 成分は (3.35) 式より，

$$a_{x'} = r\beta = \underline{\underline{-g\sin\theta}} \tag{3.37}$$

とすぐに求まる．

次に，加速度の y' 成分はこの (3.37) 式から求めるのであるが，導き方はヘルムホルツの方法と実質的に同じである．定義より，$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$，　$\beta = \dfrac{d\omega}{dt}$ の関係があることを使う．

(3.37) 式は

$$r\frac{d\omega}{dt} = -g\sin\theta$$

両辺に ω を掛ける.（右辺に掛けるときは，$\dfrac{d\theta}{dt}$ と直しておく.）

$$r\omega\frac{d\omega}{dt} = -g\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

両辺を時刻 t で積分すると，変数変換により左辺は ω の，右辺は θ の積分となる．定積分の下限，上限は，左辺では $\dfrac{v_0}{r}$ から ω, 右辺では 0 から θ となる．[3]

$$r\int_{\frac{v_0}{r}}^{\omega}\omega d\omega = -g\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta$$

$$\frac{1}{2}r\left[\omega^2\right]_{\frac{v_0}{r}}^{\omega} = -g\left[-\cos\theta\right]_0^{\theta}$$

$$\frac{1}{2r}\{(r\omega)^2 - {v_0}^2\} = -g(1-\cos\theta)$$

この式は，両辺に mr を掛けて適当に移項すると，エネルギー保存則：

$$\frac{1}{2}m\{(r\omega)^2 + mgr(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \tag{3.38}$$

ただし，重力のポテンシャルの基準点は，O 点とする．

(3.38) 式より，加速度の y' 成分は，

$$a_{y'} = r\omega^2 = \underline{\underline{\frac{{v_0}^2}{r} - 2g(1-\cos\theta)}}$$

また，垂直抗力は (3.36) 式にこの値を代入して，

$$N = \underline{\underline{m\frac{{v_0}^2}{r} - mg(2-3\cos\theta)}}$$

ただし，初速の値によって，以下のような運動となる．

① $v_0 \leqq \sqrt{2gr}$ のとき.

$$a_{y'} \leqq 2g - 2g(1-\cos\theta) = 2g\cos\theta$$

[3] $\sin\theta$ の積分は学習済み.

となるから，$\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $a_{y'} = 0$ となる点があり，そのとき速度も 0 となる．小物体が振動を繰り返す場合である．
② $v_0 \geqq \sqrt{5gr}$ のとき．

$$N \geqq 5mg - mg(2 - 3\cos\theta) = 3mg(1 + \cos\theta)$$

$\theta = \pi$ となっても，$N \geqq 0$ となるので，小物体は一定方向の円運動となる．
③ $\sqrt{2gr} < v_0 < \sqrt{5gr}$ のとき．

$$N < 5mg - mg(2 - 3\cos\theta) = 3mg(1 + \cos\theta)$$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のある点で $N = 0$ となる．P はその点から円軌道を外れて放物運動となる．

問 3 質量 m のおもりを長さ l の糸で固定点からつり下げ，おもりに水平方向の初速 v_0 を与えた．糸の質量，伸び縮み，空気抵抗は無視できるとし，重力加速度の大きさを g とする．鉛直下方に対して糸の角度が θ となったときの，おもりの速さ v と，糸の張力 T を求めよ．

初速 v_0 が小さいとき，おもりは調和振動をすることを示せ．[4]

★ 角運動量保存則

数学の単元 I-3-4 でベクトル積を習った．この演算の特徴は 同じベクトル $\boldsymbol{A}$ の間，あるいは，2 つの平行なベクトル $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$(\boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{B})$ の間の積は $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ となることである．ある固定点 O ，粒子の位置を P として，作用する力 $\boldsymbol{f}$ がつねに直線 OP に沿っているとき，この力を**中心力**と呼ぶ．O 点を原点として，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ とすると，$\boldsymbol{f}$ が中心力のとき

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．

粒子に中心力のみが働く場合，粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ として運動方程式：

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$$

の両辺に，右から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を掛けるベクトル積の演算をすると，右辺はゼロベクトルとなるから，

$$\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{0}$$

[4] 問 3 の答：$v = \sqrt{v_0^2 - 2gl(1 - \cos\theta)}$,　$T = m\dfrac{v_0^2}{l} - mg(2 - 3\cos\theta)$

ここで，**角運動量** $\boldsymbol{l}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{3.39}$$

角運動量の時間変化は，

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

運動量は，質量を m として， $\boldsymbol{p} = m\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ だから，右辺第 1 項は，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{0}$$

となるから，結局，中心力のみが働く場合の粒子の運動方程式は，

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{0}$$

のように変形される．この場合， $\boldsymbol{l}$ は時間変化しない，すなわち，

$$\boldsymbol{l} = \text{const.} \tag{3.40}$$

「 中心力のみが働くとき，粒子の角運動量は保存される.」

このことを「**角運動量保存則**が成り立つ.」という．[5]

ここでは，2 つ以上の粒子が互いに違った角度をなす回転面上で回るような場合は，まだ考察しないことにする．角運動量保存則が成り立つ 1 粒子のみの回転の場合であれば，回転平面を xy 平面に限っておくことができる．その場合の角運動量は z 成分 l_z のみ値を持つ．その大きさの計算は，図 3.12 のようになる．

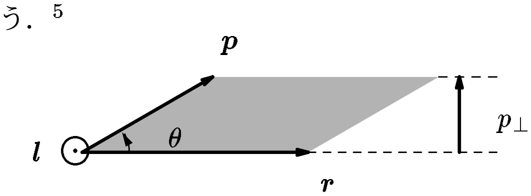


図 3.12: 角運動量の計算

まず，$\boldsymbol{l} = (l_z, 0, 0)$ は，図で紙面の裏から表向きで記号 ⊙ で示されている．この向きを右ねじの進む方向として，ねじを回す向きはベクトル $\boldsymbol{r}$ からベクトル $\boldsymbol{p}$ へ向かう向き，そのなす角を θ とする．l_z はベクトル $\boldsymbol{r}$ とベクトル $\boldsymbol{p}$ を 2 辺とする平行 4 変形の面積に等しいから，辺 $|\boldsymbol{r}| = r$ に対する高さを $p_\perp$ とすれば，

$$l_z = rp_\perp$$

と表される．角運動量は回転についての運動量の効果を考えているので，$\boldsymbol{r}$ に平行な運動量成分は回転していることにならないので，r と $p_\perp$ のみの積となっている．あるいは，辺 $|\boldsymbol{p}| = p$ に対する高さを $r_\perp$ とすれば，

$$l_z == r_\perp p = rp\sin\theta$$

[5] 多粒子系の角運動量保存則は，ここでは導入しない．

と考えてもよい．また，角速度 ω は $\boldsymbol{r}$ に垂直に測っていることから，$p_{\perp} = mr\omega$ となるから，

$$l_z = mr^2\omega \tag{3.41}$$

と表される．

例 5 図 3.13 のように水平で摩擦の無視できる板の上におかれた質量 m の小物体 P に質量の無視できる糸の一端を取りつけ，他端を板の中央 O にある穴に通す．P に半径 R, 速さ V の円運動をさせる．次に，糸を引き半径を r,$(r < R)$ の円運動にした．このときの P の速さと，糸の張力が P にした仕事を求めよ．

半径 R の円運動から半径 r の円運動に移る間の回転運動に対する P の運動方程式は複雑な形をしていて，直接は取り扱い難い．しかし，P に働く張力は中心力であり，他の力である重力と水平板からの垂直抗力はつりあって打ち消し合っているから，角運動量保存則が成立する．半径 r の円運動の速度は半径方向とつねに垂直であり，このときの速さは $v = r\omega$ であるから，角運動量は $mr^2\omega = mrv$ となり，半径 R の円運動でも同様な表し方ができるから，

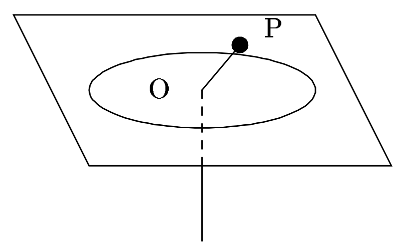


図 3.13: 回転半径の変更

$$mrv = mRV$$

よって，

$$v = \underline{\underline{\frac{R}{r}V}}$$

また，P が円運動をしているとき，張力は半径方向，つまり，絶えず円の接線方向の変位と垂直であるので仕事をしないが，半径 R の円運動から半径 r の円運動に移る間には張力の変位方向の成分が存在するから，この間に P は張力から仕事をされる．ただし，この仕事を求めるには，結果として現れる運動エネルギーの増加から計算する．

$$\text{張力の仕事}: \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mV^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1\right\}V^2}}$$

問 4 図のように，半頂角 θ の円錐面が，軸を鉛直に固定されている．その内面に沿って，小球が水平な円軌道を描きながら運動している．その軌道面の高さは，頂点から h であった．

次に，糸を静かに切ると，小球は回転しながら上昇し，しばらくして，頂点からの高さ H の水

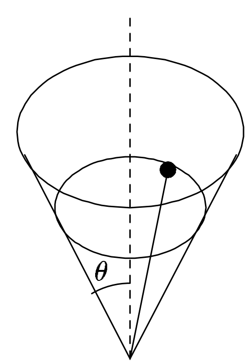


図 3.14: 回転半径の変更

平な軌道面で円運動をするようになった．重力加速度の大きさを g とする．また，小球と円錐面の間の摩擦は無視できるものとする．

(1) 糸を切った後の小球の円運動について：
 (a) 小球が円錐面から受けている垂直抗力の大きさは，小球に働く重力の大きさの何倍か．
 (b) 小球の円運動の加速度の大きさは，重力加速度の何倍か．
 (c) 小球の円運動の速さはいくらか．

(2) 糸を切る前の小球の円運動の速さと比べて (c) の速さは何倍となったか．[6]

★　ケプラー運動

この項では，ケプラーの惑星の運行に関する 3 法則が主題となるが，もともとのこの法則は惑星の観測資料から経験的に導き出した「現象論」である．各法則はすべて重力が作用した結果として力学的にそれを裏付けることができるし，また，惑星とは限らず対象がこれを同じ構造の機構をもつ系にも応用することができる．

静止していると見なすことのできる極めて大きな質量 M の物体からの重力の影響のみを受ける質量 m の粒子 P の運動を考える．I-2-2 の (2.19) 式の形の重力をここではベクトル表示で取り扱おう． 質量 M の物体の位置を原点 O として，点 P の位置を示す位置ベクトルを $\boldsymbol{r},(|\boldsymbol{r}|=r)$ とすると，P に働く重力は

$$\boldsymbol{f}=-G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

と表すことができる．$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ が大きさ 1 で，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 向きであるからである．したがって，この問題における運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{3.42}$$

となる．

【1】エネルギー保存則：ヘルムホルツの方法によって，運動方程式を変形する．(3.42) 式の両辺に $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ をスカラー積として掛ける．

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

この式の左辺は，次のように変形できる．まず，速度：$\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$，速さ：$v$ とおく．$v^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$

[6] $\boxed{\text{問 4}}$の答：(1)(a) $\dfrac{1}{\sin\theta}$ 倍，(b) $\dfrac{1}{\tan\theta}$ 倍，(c) $\sqrt{gH}$，(2) $\dfrac{h}{H}$ 倍．

を t で微分すると，

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$= 2\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 2\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

したがって左辺は，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{2}m\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

つまり，運動エネルギーの時間変化を表す．次に右辺は，今度は OP 間の距離の 2 乗：$r^2 = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$ の 両辺を t で微分すると，

$$2r\frac{dr}{dt} = 2\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

両辺に $\dfrac{1}{2r^3}$ を掛けると，

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

一方，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

したがって，変形すべき式の右辺は，

$$-\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r} = +GmM\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(G\frac{mM}{r}\right)$$

これは重力の仕事率に相当する．結局，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(G\frac{mM}{r}\right)$$

すなわち，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}\right) = 0$$

両辺を t で積分する．不定積分として，積分定数：const.$= E$ とおく．これが**エネルギー保存則**：

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = E \tag{3.43}$$

である．(3.43) 式左辺第 2 項は，(2.21) 式の基準点を $r \to \infty$ とする重力のポテンシャルである．(3.43) 式左辺第 1 項の運動エネルギーを加えた E が力学的エネルギーである．

【2】**角運動量保存則**：運動方程式 (3.42) の両辺に位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ をベクトル積として掛ける．

$$\boldsymbol{r} \times m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{r} \times G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = \mathbf{0}$ であるから，右辺はゼロベクトルとなる．重力が中心力となっているためである．左辺が角運動量 (3.39) の時間変化に等しいことは，この章の 2 節 2 項で示した．すなわち，角運動量：

$$\boldsymbol{l} = m\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

であり，

$$\frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \mathbf{0}$$

あるいは，これを t で積分する．不定積分として，積分定数： const.$= \boldsymbol{l}$ とおく．これが**角運動量保存則**：

$$m\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{l} \tag{3.44}$$

である．

ところで，ケプラーの第 2 法則は，
「太陽と惑星を結ぶ直線が，惑星の動きにしたがって描く面積は，時間に比例する．」
というものである．これは上で言う面積の時間変化が一定であるということを意味する．既に，図 3.12 で見たように，角運動量の大きさは OP 間の距離 r と運動量の大きさ mv を 2 辺とする平行 4 辺形の面積 $mrv\sin\theta$ に等しい．ただし，θ はこの 2 辺のなす角である．その一方，惑星が単位時間に描く面積は r と動径 OP の先端 P が単位時間に移動する距離，つまり，速さ v を 2 辺とする 3 角形の面積 $\dfrac{1}{2}rv\sin\theta$ である．前者が一定であれば，後者も一定となる．第 2 法則は角運動量保存則と同義だったのである．

【3】**有効ポテンシャル**[7] エネルギー保存則：(3.43) の中の運動エネルギーの部分を詳しく見てみる．P の運動平面を xy 平面にとると，角運動量：$\boldsymbol{l}$ これに垂直な座標成分のみを持つから，これを前提として xy 平面上の量に限り 2 次元ベクトルで取り扱おう． 3-2 の第 1 項の円運動のところで考えたように，再び，複素数：

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

を利用して考えることにする．速度の各成分は，

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}re^{i\theta}$$

[7] 遠心力ポテンシャルという用語は使わないことにする．

速度ベクトルの xy 表示は $\boldsymbol{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \quad \dfrac{dy}{dt}\right)$ であるが，円運動のとき同様に，図 3.5 に示した原点 O の回りに角 θ 回転した座標 $x'y'$ 表示に移るには，上の式の最右辺の極形式の微分を実行すればよい．今回は円運動ではないので，$y \neq$const. であるから，

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}e^{i\theta} + ir\omega e^{i\theta}$$

ここで $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ は角速度である． $x'y'$ 表示では，

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{dr}{dt}, \quad r\omega\right) \tag{3.45}$$

x' 成分は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向に沿った速さであり，y' 成分は角 θ 方向に回転する速さである．円運動のときには，$\dfrac{dr}{dt} = 0$ だったのである．

速さの 2 乗 $v^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ は，

$$v^2 = \left|\frac{dz}{dt}\right|^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r\omega)^2$$

だから，運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r\omega)^2\right\} \tag{3.46}$$

と表される．

ところで，ここでは角運動量保存則が成り立つから，角運動量の大きさ：$|\boldsymbol{l}| = l =$const. そして，(3.41) 式より，$l = mr^2\omega$ であるから，

$$\frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{(mr^2\omega)^2}{2mr^2} = \frac{l^2}{2mr^2}$$

これを用い，(2.46) 式を書き換えると，エネルギー保存則：(3.43) は，

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = E \tag{3.47}$$

左辺第 2 項は運動エネルギーの一部なのであるが，$l =$const. となるため r のみの関数となる．そこで 左辺第 2 項と重力ポテンシャルであり元々 r の関数である第 3 項とを合わせて，

$$\tilde{U}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} \tag{3.48}$$

とおき，$\tilde{U}(r)$ を形式上，ポテンシャルであるかのように取り扱うことができる．これを**有効ポテンシャル**と呼ぶ．

(3.48)，(3.49) 式より，

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E - \tilde{U}(r)$$

この式の左辺はつねに負になることはないから，運動の成立条件は

$$E - \tilde{U}(r) \geqq 0 \qquad (3.49)$$

となる．これを用いれば，全力学的エネルギー
E の値によって，粒子 P がどの範囲で運動する
かを知ることができる．

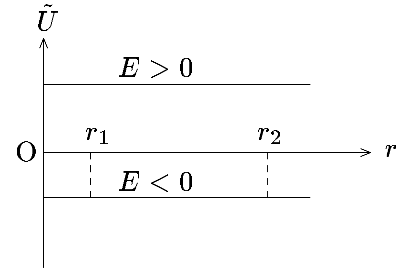


図 3.15: 有効ポテンシャル

図 3.15 には (3.49) 式で表される有効ポテンシャル $\tilde{U}(r)$ を原点 O に存在する質量 M の物体から粒子 P までの距離 r の関数として描かれている．

① $E \geqq 0$ の場合：P は点 O の向きに重力によって引かれていても，回転している限り大きさ $l \neq 0$ の角運動量の存在によって，点 O の所まで来ることはできない．そのことは図 3.15 において，$E =$const. ということは横軸に平行な直線を表すが，特に $E > 0$ の場合には，点 O の手前に $\tilde{U}(r) = E$ を示す $\tilde{U}(r)$ との交点があって，この点より小さい r のときは条件 (3.49) が満たされないことから分かる．一方， r が大きくいくらなっても $\tilde{U}(r) > E$ であって，条件 (3.49) は破れないことから，P は O に最接近した後は無限遠に飛び去ってしまうことが分かる．図から，$E = 0$ の場合も同様に，**周期性のない運動**をする．

② $E \leqq 0$ の場合：運動の条件 (3.49) を満たす $\tilde{U}(r) \geqq E$ となるのは，図 3.15 で $r_1 \leqq r \leqq r_2$ の範囲のみである．つまり,「 $E \leqq 0$ のとき，P は**周期運動**をする 」が，P が O に最接近する $r = r_1$，および，P が O から最も遠ざかる $r = r_2$ では，(3.48) 式より，$\dfrac{dr}{dt} = 0$ となるが，回転の速さ $r\omega \neq 0$ であるので，決して直線運動をすることはない．特に，E の値が $\tilde{U}(r)$ の最小値に等しい場合には，$r = r_1 = r_2$ となって，P は円運動をすることがわかるが，それ以外の場合にはこの段階では，まだ，P の軌道が楕円軌道であると言い切ることはできない．

例 6 ケプラーの第 1 法則：
「惑星の軌道は楕円で，太陽はその焦点の一つに位置する.」
は，その成立を仮定し，力学法則を用いて，ケプラーの第 3 法則：
「惑星の軌道を一周するに要する時間の 2 乗は，惑星が運行する楕円の長半径の 3 乗に比例する.」
を証明せよ．

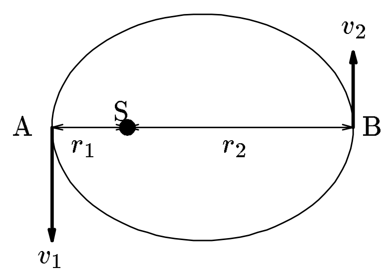


図 3.16: ケプラー運動

惑星の軌道が円の場合には，第 2 章 2 節 の $\boxed{\text{例 2}}$ で第 3 法則を示した．

楕円の長半径，短半径，離心率を a,b,e とおくと，

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

の関係がある．図 3.16 のように，近日点 A，遠日点 B，太陽 S からのそれぞれの距離 r_1 ,r_2 とすると，

$$r_1 = a(1-e), \quad r_2 = a(1+e)$$

とおくことができて，

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad r_1 r_2 = a^2(1-e^2) = b^2$$

の関係が成り立っている．

点 A，B においては，径 r は時刻の関数としての最短，最長という極値となっているので，$\dfrac{dr}{dt} = 0$ である．これを用いてエネルギー保存則 (3.47) を惑星が 点 A，B にいる場合について立てると，

$$\frac{l^2}{2m{r_2}^2} - G\frac{mM}{r_2} = \frac{l^2}{2m{r_1}^2} - G\frac{mM}{r_1}$$

これより，

$$G\frac{mM}{r_1} - G\frac{mM}{r_2} = \frac{l^2}{2m{r_1}^2} - \frac{l^2}{2m{r_2}^2}$$

$$GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{l^2}{2m}\left(\frac{1}{{r_1}^2} - \frac{1}{{r_2}^2}\right)$$

$$GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{l^2}{2m}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$GmM = \frac{l^2}{2m}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$l^2 = 2Gm^2M\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

r_1,r_2 を a,b に直すと，

$$l^2 = \frac{Gm^2Mb^2}{a}$$

故に，角運動量の大きさは，

$$l = mb\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

となり，楕円の形によって一定な値をとっていることが分かる．

楕円の面積は πab，この面積は太陽の位置 S，惑星の位置 P として，P が楕円軌道上を一周するとき線分 OP が作って行く面積に等しい．既に見たように，単位時間当たりのこの面積の増加は $\dfrac{l}{2m}$ となるから，惑星の周期を T とすると，

$$\pi ab = \frac{l}{2m}T$$

先に求めた l の値を代入すると，

$$\pi ab = \frac{mb\sqrt{\frac{GM}{a}}}{2m}T$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}},\quad \text{あるいは}\quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2}$$

GM =const. であるので，$\underline{\underline{T^2 \propto a^3}}$ が成り立つ．

問 5 惑星の力学的エネルギー E を，重力定数：G，太陽，惑星の質量：M,m，楕円軌道の長半径：a で表せ．[8]

[参考]

固定点 O から重力のみが作用する場合の粒子 P の運動は，例 6 で見たような楕円軌道だけではない．問 5 の答のように，軌道が楕円の場合，$E < 0$ となるが，$E = 0$ の場合は放物線，$E > 0$ の場合は双曲線となり，周期を持たない．一般の，運動方程式：(3.42)，あるいは，エネルギー保存則：(3.47) の解が 2 次曲線となることの証明はここではやらない．[9]その代わりに，十分条件に相当する 2 次曲線を表す方程式が，(3.47) 式を満たすことを以下に示す．

数学の単元 I-4 のところで習った 2 次曲線の極方程式：

$$r = \frac{\rho}{1 - e\cos\theta}$$

から出発する．$e = 0$ は円，$0 < e < 1$ は楕円，$e = 1$ は放物線，$e > 1$ ならば双曲線である．ρ は正の定数である．

$$r(1 - e\cos\theta) = \rho \tag{3.50}$$

[8] 問 5 の答：$E = -\dfrac{1}{2}G\dfrac{mM}{a}$

[9] これを高校の範囲を超えない数学のみを使って実行するのは，不可能ではないがまわりくどい．

と，両辺を時刻 t で微分した式：

$$\frac{dr}{dt}(1 - e\cos\theta) - er\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = 0 \tag{3.51}$$

の 2 式から，θ を消去することを考える．
　角運動量の大きさ：

$$l = mr^2\omega = mr^2\frac{\theta}{dt}$$

は定数であるから，

$$\frac{\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2}$$

を (3.51) 式に代入．また，(3.50) 式より，

$$1 - e\cos\theta = \frac{\rho}{r}$$

も，(3.51) 式に代入する．

$$\frac{\rho}{r}\frac{dr}{dt} - e\frac{l}{mr}\sin\theta = 0$$

$$\frac{\rho}{r}\frac{dr}{dt} = e\frac{l}{mr}\sin\theta$$

の両辺を 2 乗する．

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(e\frac{l}{mr}\right)^2\sin^2\theta$$

(3.50) 式より，

$$\cos\theta = \frac{\rho - r}{er}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{\rho - r}{er}\right)^2$$

$$= \frac{(e^2 - 1)r^2 + 2\rho r - \rho^2}{(er)^2}$$

として，$\sin^2\theta$ を消去する．

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(e\frac{l}{mr}\right)^2\frac{(e^2 - 1)r^2 + 2\rho r - \rho^2}{(er)^2}$$

この式を，ケプラー運動のエネルギー保存則：(3.48) の形になるように変形すると，

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{l^2}{m\rho r} = (e^2-1)\frac{l^2}{2m\rho^2} \tag{3.52}$$

(3.52) 式と (3.48) 式を比較する．左辺の第 2 項は既に一致しているが，その他は，

$$\frac{l^2}{m\rho} = GmM, \quad (e^2-1)\frac{l^2}{2m\rho^2} = E$$

すなわち，

$$\rho = \frac{l^2}{Gm^2M}, \quad e^2 - 1 = \frac{2El^2}{(GM)^2m^3} \tag{3.53}$$

のように ρ, e は力学量と関係づけられる．また，この関係より，確かに周期性のない運動である $E > 0$ および $E = 0$ が，$e > 1$ で双曲線，および，$e - 1$ で放物線となり，周期運動 $E < 0$ の条件と，$e < 1$ の楕円が対応している．これで
「2 次曲線軌道を描く粒子の運動，すなわち，ケプラー運動は重力ポテンシャルを含むエネルギー保存則，および，角運動量保存則を満たす.」

トレーニング A

A1 質量 $\dfrac{1}{20}$ kg のおもりを，一端を固定した質量の無視できるばねの他端につけて，鉛直につり下げる．このつりあいの位置からさらに dfc110 m 鉛直下におもりを静止させておくには，2 N の力でおもりを鉛直下向きに引張っておく必要があった．この力を急に取り除くと，おもりは初速 0 で調和振動を始めた．

(1) このばねの弾性定数を求めよ．

(2) 初めのつりあいの位置を原点 O とし，鉛直下向きに x 軸の正方向を選んだとき，おもりの位置 x の時刻 t による変化をグラフに描け．ただし，力を取り除いた瞬間を $t = 0$ s とする．

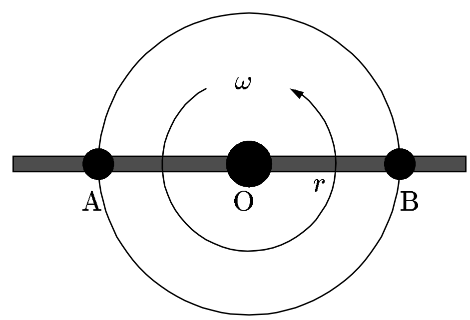
(3) おもりの速度 v の時刻 t による変化をグラフに描け．[10]

A2 質量 1.0×10^{-1} kg の小球に長さ 5.0×10^{-1} m のひもをつけて他端を固定して， 小球との摩擦が無視できる水平面上で等速円運動をさせた．このときのひもの張力は 7.9 N であった．

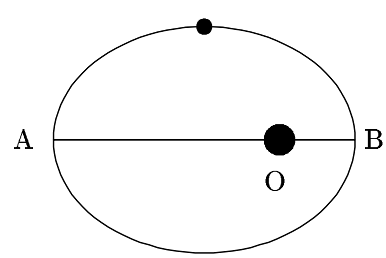
(1) 小球の毎秒の回転数を求めよ．　　(2) 円運動の速さを求めよ．[11]

A3 質量 m，半径 r，角速度 ω で等速円運動をする粒子の，(1) 運動エネルギー，(2) 角運動量，(3) 受ける力 を求めよ．[12]

A4 右図はフィギュアスケートで回転する人を模型化したものを真上から見たものである．人は点 O のところにいて，そこから両腕の質量中心 A,B までの距離は r で，それぞれ質量 m とする．今，角速度 ω でスピンしている人が，両腕の質量中心の位置が $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \dfrac{r}{2}$ となるように，腕を縮めたとき，角速度は ω の何倍となるか．ただし，人はこの間氷からのトルクは受けなかったとする．[13]



A5 O 点にある恒星の周りを楕円軌道を描いて回る惑星がある．恒星からの距離が最大となる A 点と最小となる B 点との比は $\overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OB}} = 3 : 1$ であった．次の量は B 点では A 点での何倍となるか．(1) 運動エネルギー．(2) 位置エネルギー．また，(3) A 点での位置エネルギー A 点での運動エネルギーの何倍か．[14]



---

[10] A1 の答：(1) 20 N/m．(2) $x = \dfrac{1}{10}\cos(20t)$ のグラフ．(3) $v = -2\sin(20t)$ のグラフ．

[11] A2 の答：(1) 2.0Hz．(2) 6.3 m/s．

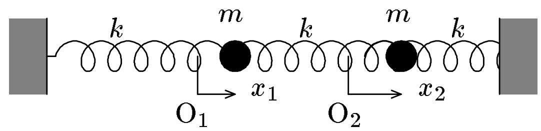
[12] A3 の答：(1) $\dfrac{1}{2}mr^2\omega^2$．(2) $mr^2\omega$．(3) $mr\omega^2$．

[13] A4 の答：4 倍

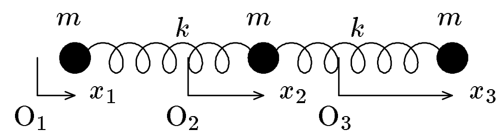
[14] A5 の答：(1) 9 倍．(2) 3 倍．(3) $-\dfrac{4}{3}$ 倍．

$\boxed{\text{B1}}$ 弾性定数 k の質量の無視できるばねを天井からつるし，先に質量 m のおもりをつける．おもりのつりあいの位置を原点 O とし，鉛直下向きに x 座標の正の向きを選ぶ．おもりについての運動方程式と，$x=0$ を基準点とした合力のポテンシャルを書け．[15]

$\boxed{\textbf{B2}}$ (1) 等質量 m の粒子 1，2 と固定壁のそれぞれの間にいずれも弾性定数 k の質量を無視できるばねで連結されている．すべてのばねが自然の長さとなっているときの粒子 1，2 の位置をそれぞれの変位 x_1,x_2 の原点 O_1，O_2 とする．2 粒子の角振動数 ω が等しく，



$$z_i = A_i e^{i\omega t}，\text{ただし}, x_i = \mathrm{Re} z_i, \quad (i=1,2)$$



となった場合（これを「ノーマルモード（基準振動）」と言う.）の ω の値とそのときの x_1,x_2 の関係を求めよ．
(2) 質量，弾性定数，座標の設定を同様にしたとき，今度は 3 粒子の間のみにばねが入っている場合，ノーマルモードの ω の値とそのときの x_1,x_2,x_3 の関係を求めよ．[16]
　ただし，解く場合に次のことを利用するとよい.

$$\text{行列：} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{の固有値は } 1,3 \quad \text{行列：} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{の固有値は } 0,1,3$$

$\boxed{\textbf{B3}}$ 水素原子のスペクトルの観測から，水素原子中の電子のエネルギーは n を正の整数として $\dfrac{1}{n^2}$ に比例する値のみしか取り得ないことが分かっている．次の量の n との比例関係を求めよ．(1) 電子の軌道半径．(2) 電子の角運動量．[17]

$\boxed{\textbf{B4}}$ 次の行列を使って，角運動量：$\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$ の各成分を位置ベクトル：$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の成分と運動量：$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ の成分で表せ．$A = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ としたとき，$A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
[18]

---

[15] $\boxed{\text{B1}}$ の答：$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx, U(x) = \dfrac{1}{2}kx^2$

[16] $\boxed{\text{B-2}}$の答：(1) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$； $x_2 = x_1$． $\omega = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$； $x_2 = -x_1$． (2) $\omega = 0$ の解は物理的意味はない． $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$； $x_2 = 0, x_3 = -x_1$． $\omega = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$； $x_2 = -2x_1, x_3 = x_1$．

[17] $\boxed{\text{B3}}$ の答：(1) n^2．(2) n．

[18] $\boxed{\text{B4}}$ の答：$l_x = yp_z - zp_y, l_y = zp_x - xp_z, l_x = xp_y - yp_x$

B5 地球の中心からの距離 r の地点から径に対して角 θ をなす方向に人工衛星を打ち出したとき，地球に戻る初速 v_0 の条件を求めよ．ただし，地球質量を M，地球半径を R，重力定数を G とする．[19]

[20]

[19] B5 の答：$v_0 < \sqrt{\dfrac{2GMR(r-R)}{r(r^2\sin^2\theta - R^2)}}$