第 3 章 周期運動

3–1 調和振動

≪ この項で学ぶこと ≫
[**調和振動，減衰振動**]

★ 調和振動

I–2–3 や II–1–1 でも習った「調和振動」を，運動方程式の解として見直そう．1 次元座標 x に対して，質量 m の粒子に弾性力を $-kx$ が作用する場合を考える．この粒子の運動方程式は，加速度を $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ と表して，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3.1}$$

粒子の位置 x，速度 $\dfrac{x}{dt}$ の初期条件を

$$t = 0 \text{ のとき };x = x_0, \quad \frac{x}{dt} = v_0 \tag{3.2}$$

とする．(3.1) 式の型の微分方程式とその解については，数学の単元 II-4 でちょうど始めたところである．x に補助的に虚数 iy を加えて，複素数 $z = x + iy$ についての微分方程式：

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -kz \tag{3.3}$$

の一般解は，複素数の積分定数を A,ϕ を実数として $Ae^{i\phi}$ とおくと，

$$z = Ae^{i(\omega t+\phi)}, \text{ ただし}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

また，

$$\frac{dz}{dt} = i\omega Ae^{i(\omega t+\phi)}$$

ここで，複素数 z の極形式における絶対値 $|z| = A$ はこの解においては一定で，調和振動の**振幅**である．また，偏角 $\arg z = \omega t + \phi$ が，II–1–2 で導入した**位相**である．ただし，波の場合と異なり，位相は時刻 t のみの関数であり，位置の関数とはならない．ω は**角振動数**（周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$），ϕ は**初期位相** である．そして，物理的意味を持つのは各実部，Re z=x， Re $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dx}{dt}, \cdots$ のみであり，虚部は計算の見通しを良くするために付加されている．それぞれに (3.2) 式の初期条件を代入する．$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の関係より，

$$x_0 = A\cos\phi$$

$$v_0 = i^2\omega A\sin\phi = -\omega A\sin\phi$$

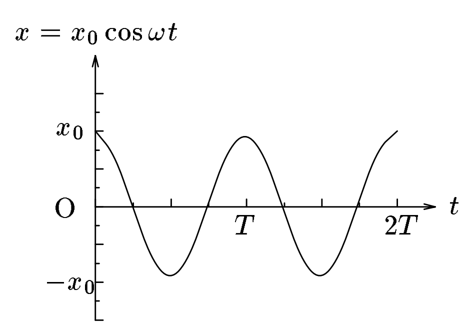
これによって，積分定数は，

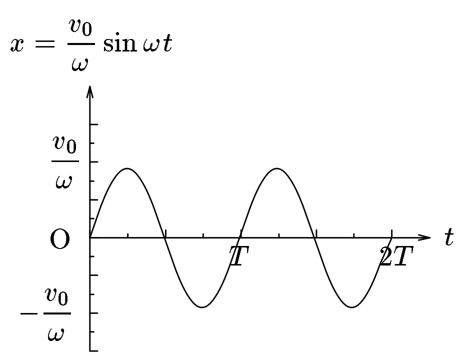
$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \tan\phi = \frac{v_0}{\omega x_0} \tag{3.4}$$

と決定される．時刻 t における粒子の位置 x，速度 v は，

$$x = A\cos(\omega t + \phi), \quad v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \tag{3.5}$$

簡単な初期条件の例について，位置，速度のグラフを示す．図 3-1(a) は $x_0 > 0, v_0 = 0$ の場合，(b) は $x_0 = 0, v_0 > 0$ の場合である．





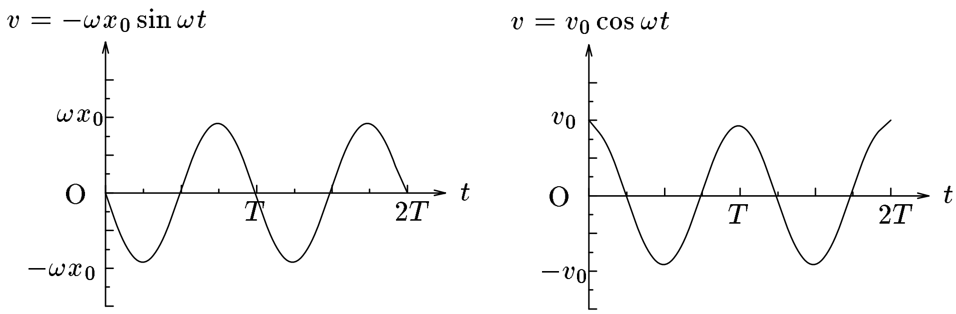


図 3.1　(a)　　　　　　　　　　(b)

調和振動における $|z|$ =const. の条件は，$|z|^2 = A^2$ とも表されるから，(3.5) 式を用いれば，

$$|z|^2 = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$$

$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ であるから，この式はエネルギー保存則：

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{3.6}$$

を表している．左辺第 2 項は弾性力のポテンシャルである．

例 1 質量が，それぞれ $m_{\mathrm{A}}, m_{\mathrm{B}}$ の小球 A,B が，弾性定数 k，自然の長さ l の質量の無視できるばねで結ばれ，摩擦の無視できる床に置かれて静止していた．時刻 $t = 0$ のとき，A に初速 v_0 を与えた．A,B の時刻 t のときの位置 $x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}$ を求めよ．ただし，x 座標は床を基準とした座標で時刻 $t = 0$ のときの A の位置を原点 O とし，初速の向きを x 軸の正の向きとする．

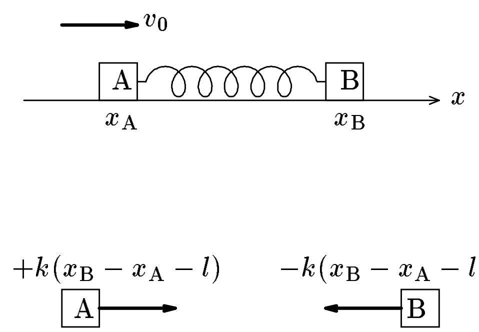


図 3.2: 相対的調和振動

①**力の拾い出し**：まず，を考える．ばねが伸びている場合，位置 $x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}$ にある 球 A,B に働くばねの弾性力は，大きさ，向きが図 3.1 の下図のようになる．力をこのように表示しておけば，ばねが縮んでいる場合も $x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} - l < 0$ となり，式としてはそのまま使える．

②**運動方程式を立てる**：A,B の加速度は，$\dfrac{d^2x_\mathrm{A}}{dt^2}$，　$\dfrac{d^2x_\mathrm{B}}{dt^2}$ と表すと，A,B の運動方程式は，

$$m_\mathrm{A}\frac{d^2x_\mathrm{A}}{dt^2} = +k(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} - l) \tag{3.7}$$

$$m_\mathrm{B}\frac{d^2x_\mathrm{B}}{dt^2} = -k(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} - l) \tag{3.8}$$

③**質量中心，相対の座標に変換**：質量中心の座標 ：$x_\mathrm{c} = \dfrac{m_\mathrm{A}x_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}x_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}$ と，A に対する B の相対座標 $x_\mathrm{r} = x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}$ を導入する．これらを用いて解いた後で，逆の変換式：

$$x_\mathrm{A} = x_\mathrm{c} - \frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}x_\mathrm{r} \tag{3.9}$$

$$x_\mathrm{B} = x_\mathrm{c} + \frac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}x_\mathrm{r} \tag{3.10}$$

によって，床に対する座標に戻して A，B の運動を見ることができる．(3.7)，(3.8) 式を辺々加えると，

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_\mathrm{A}x_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}x_\mathrm{B}) = 0$$

故に，

$$(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})\frac{d^2x_\mathrm{c}}{dt^2} = 0 \tag{3.11}$$

A，B の質量中心は等速度運動をしていることが分かる．また，$\dfrac{1}{m_\mathrm{B}} \times (3.8) - \dfrac{1}{m_\mathrm{A}} \times (3.7)$ を作ると，

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}) = -\left(\frac{1}{m_\mathrm{A}} + \frac{1}{m_\mathrm{B}}\right)k(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} - l)$$

$$\mu\frac{d^2x_\mathrm{r}}{dt^2} = -k(x_\mathrm{r} - l),\text{ ただし，}\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_\mathrm{A}} + \frac{1}{m_\mathrm{B}} \tag{3.12}$$

④**初期条件を書き出す**：$t = 0$ のとき，

$$x_\mathrm{A} = 0, \quad x_\mathrm{B} = l, \quad \frac{dx_\mathrm{A}}{dt} = v_0, \quad \frac{dx_\mathrm{B}}{dt} = 0$$

これを，質量中心，相対の座標に直すと，$t = 0$ のとき，

$$x_\mathrm{c} = \frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}l, \quad x_\mathrm{r} = l, \quad \frac{dx_\mathrm{c}}{dt} = \frac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}v_0, \quad \frac{dx_\mathrm{c}}{dt} = -v_0 \tag{3.13}$$

⑤**微分方程式を解く**：微分方程式 (3.10) と (3.12) 式より，

$$\frac{dx_\mathrm{c}}{dt} = \text{const.} = \frac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}v_0 \tag{3.14}$$

$$x_\mathrm{c} = \frac{m_\mathrm{B}l + m_\mathrm{A}v_0t}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} \tag{3.15}$$

微分方程式 (3.11) は，$x = x_{\mathrm{r}} - l$ と置き換えると，$\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2x_{\mathrm{r}}}{dt^2}$ となるから，(3.3) 式と同じ型である．その解 (3.5) を参考にして，

$$x_{\mathrm{r}} = A\cos(\omega t + \phi) + l, \quad \frac{dx_{\mathrm{r}}}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

ただし，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$．初期条件 (3.12) より，

$$l = A\cos\phi + l, \quad -v_0 = -\omega A \sin\phi$$

$\phi = \dfrac{\pi}{2}$，　$A = \dfrac{v_0}{\omega}$ となるから，

$$x_{\mathrm{r}} = -\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + l \tag{3.16}$$

$$\frac{dx_{\mathrm{r}}}{dt} = -v_0\cos\omega t \tag{3.17}$$

(3.9)，(3.10) 式に，解 (3.15)，(3.16) を代入すれば，A，B の位置は，

$$x_{\mathrm{A}} = \underline{\underline{\frac{m_{\mathrm{A}}\omega t + m_{\mathrm{B}}\sin\omega t}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\frac{v_0}{\omega}}} \tag{3.18}$$

$$x_{\mathrm{B}} = \underline{\underline{l + \frac{m_{\mathrm{A}}(\omega t - \sin\omega t)}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}\frac{v_0}{\omega}}} \tag{3.19}$$

また，(3.14)，(3.17) 式を用いるか，(3.18),(3.19) 式を t で微分すれば，A，B の速度も得られる．

$$\frac{dx_{\mathrm{A}}}{dt} = \frac{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\cos\omega t}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}v_0 \tag{3.20}$$

$$\frac{dx_{\mathrm{B}}}{dt} = l + \frac{m_{\mathrm{A}}(1 - \cos\omega t)}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}v_0 \tag{3.21}$$

⑥**エネルギー保存則**：(3.6) 式の関係と同様，相対的な調和振動においても $\dfrac{1}{2}kA^2 = \mathrm{const.}$ が成り立っている．(3.16)，(3.17) 式を組み合わせると，z を複素数として，

$$\omega z = \omega(x_{\mathrm{r}} - l) + i\frac{dx_{\mathrm{r}}}{dt} = v_0\left\{\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right\} = v_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$k = \mu\omega^2$ であるから，各辺に $\dfrac{1}{2}\mu$ を掛けると，

$$\frac{1}{2}\mu {v_{\mathrm{r}}}^2 + \frac{1}{2}k(x - l)^2 = \frac{1}{2}\mu {v_0}^2$$

ただし，$v_{\mathrm{r}} = \dfrac{dx_{\mathrm{r}}}{dt}$ は A に対する B の相対速度であり，左辺第 1 項は**相対運動エネルギー** である．このエネルギー保存則は．もちろん，(3.12) 式をヘルムホルツの方法によっ

て変形しても求めることができる．この式の中には**質量中心の運動エネルギー**：$\frac{1}{2}(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}){v_{\mathrm{c}}}^2$，$\left(\text{質量中心の速度}：v_{\mathrm{c}}=\dfrac{dx_{\mathrm{c}}}{dt}\right)$ は表に現れない．何故ならば，ここでは A，B の系は閉じた系であり，運動量保存則が成り立っている．(3.14) 式より，

$$(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})v_{\mathrm{C}}(=m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}})=\mathrm{const.}=m_{\mathrm{A}}v_0$$

すなわち，$v_{\mathrm{C}}=$const. だからである．

問 1 A，B の質量が等しく m であるとして，他は **例 1** と同じ条件のとき，半周期後における A，B の速度を求めよ．[1]

[**参考**]

★　減衰振動

I–2–3 でいろいろな力を習ったときには，速度の関数となる抵抗力はまだ出て来なかった．しかし，III–1–2 で気体分子が固体に衝突を繰り返して力をおよぼす様子を見たので，ここではこの種の力も取り扱うことにする．ただし，ここで問題とするのは，力が速度 v に比例する**スト ークスの抵抗力**と呼ばれるものである．

$$f=-bv,\quad v=\mathrm{const.} \tag{3.22}$$

例 2 速度 v_0 で走っていた質量 m の粒子に，時刻 $t=0$ 以後，b を正の定数として，抵抗力 $-bv$ が作用する場合の速度 v の変化を調べてみよう．

粒子の運動方程式は，加速度を $\dfrac{dv}{dt}$ と表すと，

$$m\frac{dv}{dt}=-bv \tag{3.23}$$

この型の微分方程式も，数学の単元 II–4 で習った．一般解は実数の指数関数となり，

$$v=Ce^{-\frac{b}{m}t}$$

と表される．初期条件：$t=0$ のとき,$v=v_0$ を用いて積分定数 C を決める．

$$v_0=Ce^0=C$$

結局，時刻 t のときの速度は，

$$v=v_0e^{-\frac{b}{m}t} \tag{3.24}$$

[1] $\boxed{\text{問 1}}$の答：$v_{\mathrm{A}}=0, v_{\mathrm{B}}=v_0$

となり，図 3.3 のような変化をする．

非保存力である抵抗力が働くため，系の力学的エネルギーは保存せず，減少する．(3.23）式の両辺に v を掛けると，左辺は

$$v \times m\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

運動エネルギーを $K = \dfrac{1}{2}mv^2$ とおくと，右辺は

$$-v \times bv = -\frac{2b}{m}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{2b}{m}K$$

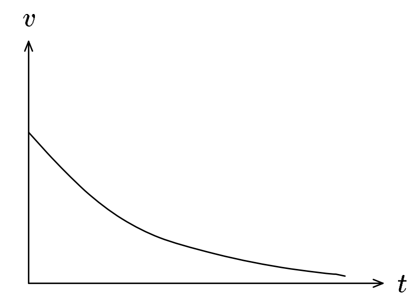


図 3.3: 抵抗力による速度の変化

となるから，

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{2b}{m}K \tag{3.25}$$

この式より，運動エネルギー K の時間変化は，K に比例していることが分かる．

問 2 質量 m の水滴に抵抗力 $-bv$ が働くため，加速度 g で落下しない場合，十分時間が経った後の速度（終速度）を求めよ．[2]

例 3 質量 m の粒子に弾性力 $-kx$ と抵抗力 $-bv$ が作用する場合の運動方程式の解を調べよう．ただし，抵抗力は弾性力による振動を全く壊してしまうほど大きくはないとする．

粒子の運動方程式は，速度を $v = \dfrac{dx}{dt}$ と表し，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \tag{3.26}$$

変形して，

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

この微分方程式を解くために，$x = Xe^{-\frac{b}{2m}t}$ とおいて，(3.26）式に代入する．X も時刻 t の関数である．順を追ってやると，

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt}e^{-\frac{b}{2m}t} - \frac{b}{2m}Xe^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2X}{dt^2}e^{-\frac{b}{2m}t} - 2\frac{b}{2m}\frac{dX}{dt}e^{-\frac{b}{2m}t} + \left(\frac{b}{2m}\right)^2 Xe^{-\frac{b}{2m}t}$$

[2] 問 2 の答：$v = \dfrac{mg}{b}$

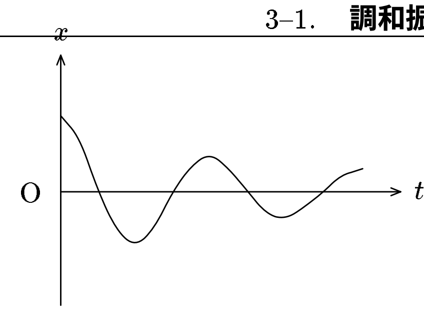


図 3.4: 減衰振動

$$\left[\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x\right]e^{\frac{b}{2m}t}=0$$

の形に代入すると，

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\left\{\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2\right\}X=0$$

ここで，$\omega^2=\dfrac{k}{m}-\left(\dfrac{b}{2m}\right)^2$ とおく．問題の設定から，b は十分小さく，ω^2 は負，つまり，ω が虚数になることはないとする．すなわち，X が満たす微分方程式は，

$$\frac{d^2X}{dt^2}=-\omega^2X$$

となって，これは調和振動の微分方程式である．その解は (3.5) 式で与えられるから，結局，時刻 t のときの粒子の位置は，

$$x=Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t+\phi) \tag{3.27}$$

初期条件から，$\phi=0$ となっている場合のグラフを図 3.4 に示す．