2–3　現象論的な力

≪ この項で学ぶこと ≫
[**現象論的な力，垂直抗力，摩擦の法則，張力，ラグランジュの方法，フックの法則**]

★　現象論的な力

自然界には，前節で論じた 4 つの基本力以外には存在しないのであるが，この結論は日常感覚から「力」をとらえている人にとっては，理解し難いものである．何故ならば，私たちは「遠く離れていても働く力」よりも，物体や人が接触して「押したり，引いたりする力」を最も身近に感じているからである．人の働きは複雑であるから，今，物体と物体が近接している場合を考えてみる．

2 物体間の重力の相互作用は，前節 $\boxed{\text{例 1}}$ で計算したように極めて小さく今は問題にならない．さらに，2 物体が接触していると言っても素粒子論の強い力，弱い力が働くほど，つまり，10^{-15} m のオーダーまで近接することはできない．一方の物体に所属する原子と他方の物体に所属する原子は，人の目から見ればくっついているように見えても，10^{-10} m のオーダー程度は離れている．それ以上近づくことができない原因も，その位置でいわゆる「押したり，引いたりする力」が働く原因も，ミクロな世界にとって長距離でも作用する静電気力の働きである．他の物体に接している物体内の原子には，お互いどうしの電気的な相互作用だけでなく，接する物体内の各原子からの静電気力が複雑に重なり合って作用している．

しかしながら，力の正体が分かったからと言って問題は解決した訳ではない．この例はミクロな世界の影響が，マクロな世界に及んでいる一つの場合である．ここでは，原子等のミクロな世界の力学的計算をする準備はまだできていないので，原子間の力についての定性的な考察はするものの，力の値を求めるのに別の方法を用いる．ここでは基本力のように普遍的な「力の定数」が存在する訳ではなく，その時に設定された状況によって力の値，あるいは，その力に付随する物理量を定めながら議論を進めて行く．つまり，以下で取り上げる力は，すべて現象論として取り扱われるものである．

それにしても，マクロな自然現象の中で取り扱われる力は実に様々である．現象論的な力と言っても，まだここでそのすべてについて議論できる訳ではない．上で 近接する 2 物体と言ったのは，2 つの固体の意味である．大きさを持った物体についてもまだ習っていない．ここでは，少なくてもそのうちの一方の固体は「粒子」として取り扱える場合を考

えて行く．この節では，固体の周りに気体や液体があってそこから力を受ける場合については取り上げない．その理由の一つは，気体等が，単元 III の物質の物理的構造の所で学習する題材であること．第二には，これらの力は固体の表面の大きさに関係し，それ故に単位断面積当たりの力，すなわち,「圧力」の形で取り扱われることが多いことから分かるように，この場合には広がりを持つ固体となるため粒子とは見なすことができないからである．具体的には，浮力，揚力，表面張力，慣性抵抗力，粘性抵抗力などの話はここには出て来ない．さらに，固体の周りが真空であっても，固体に大量の光が照射され，いわゆる「光圧」を受ける場合等も，同様な理由からここではまだ説明できないのである．

1–I で明らかにしたように，この単元における運動はすべて「慣性系」から測定される．「非慣性系」，すなわち，他の慣性系から見てその座標が加速度をもって動いている座標系から測定すると，物体には「見かけの力」も働くと解釈しないと運動方程式が成り立たなくなる．有名な見かけの力は，回転座標系における，遠心力とコリオリの力であるが，これらを含めてこの単元の中には「見かけの力」は出て来ない．

★　垂直抗力

固体と固体が接触して押す力が，**垂直抗力**である．力の方向は接触面に垂直である．図 2.4 に，一方の原子を静止していると見なしてもう一方の原子の働く力のポテンシャル U の様子を原子間の距離 r の関数として示す．(2.16) 式で見たように，力 F とポテンシャル U の関係は $F = -\dfrac{dU}{dt}$ となっているから，図で $\dfrac{dU}{dr} > 0$ はこの力が斥力であることを，$\dfrac{dU}{dr} < 0$ が引力であることをあらわしているが，垂直抗力は原子間の力は近距離で斥力となることの現われである．しかし，もちろん原子論のなかでこの力が見出された訳ではなく，古典力学の創生期にガリレイが著書「新科学対話」の中でまず最初に取り上げたのもこの力である．

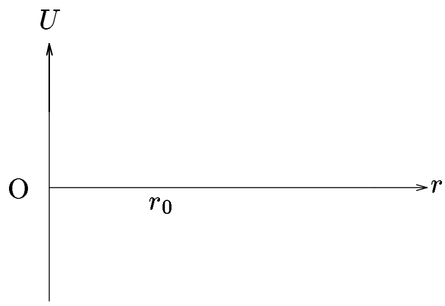

図 2.4: 原子間の力のポテンシャル

例 1 重量計をエレベーターの床に固定し，この上に $m = 1.00 \times 10$ kg のおもりを乗せる．エレベーターが上昇し始めたときの重量計の指針は 1.20×10 kgf，エレベーターが停止し始めたときの重量計の指針は 8.0 kgf であった．重力加速度の大きさを $g = 9.8$ m/s^2 として，(a) エレベー

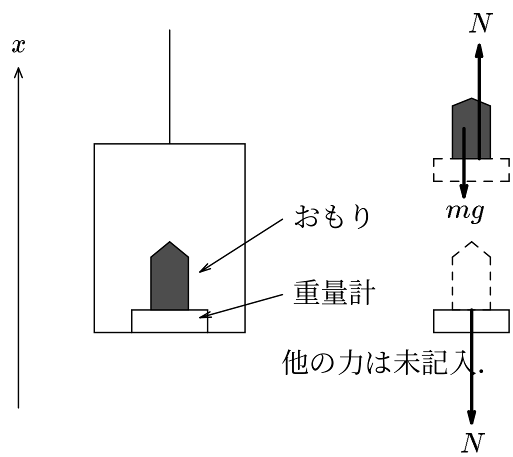

図 2.5: おもりに作用する垂直抗力

ターが上昇し始めたときと，(b) 停止し始
めたときの加速度を求めよ．ただし，鉛直上向きに x 軸の正方向をとる．
① まず，日常生活でよく使われている力の単位
である**重力キログラム** kgf について．[1]
「 標準重力加速度（$g = 9.80665$ m/s^2）を用い
て，質量 1 kg の物体に働く地上の重力と同じ大
きさの力を 1 kgf とする単位である.」

$$1\ \mathrm{kgf} = 1\ \mathrm{kg} \times 9.80665\ \mathrm{m/s^2} = 9.80665\ \mathrm{N}$$

である．
② **重さの定義**：よく誤解されているが,「重さと質量は全く別の量」であり,「重さと地上の重力の値は，一般に異なる.」重さが何であるかは,「重量計の指針の指し示す数値が何を意味するか.」と言う問いに答えることによって示される．重さを測りたい物体を重量計の上に乗せると，物体は重量計の上部を押す，つまり，垂直抗力を及ぼす．重量計の指針はこの大きさに応じて一定の値を示す．一方，秤の上の物体には，秤との相互作用として運動の第 3 法則にしたがう上向きの垂直抗力が働き，秤と物体が地上付近に静止しているときは，物体に働く上向きの垂直抗力と下向きの地上の重力はつりあっている．このような理由で，このような場合には確かに，重量計の指針は物体に働く地上の重力と同じ値を示す．しかし，この例のように秤と物体が加速度をもつ乗り物の中にあったり，月面など地球外の場所にある場合には，さらに物体に重力以外の力が働いている場合には，重量計の指針は，一般に測定物体を支える垂直抗力の反作用を示すとしか言いようがない．

「物体の重さとは，重量計が物体を支える垂直抗力の反作用である.」

そして，定義からは「重さの単位」を N（ニュートン）としてもよいのだが，重さが日常生活で用いられる関係から kgf[2]が用いられる．
③ このテキストでは，当初からそのように記述して来たのであるが，ここで改めて物理の問題を取り扱う際の細かい注意をしておこう．例としては，今の場合のように「運動方程式を立てて解く.」という場合が適当であろう．

(i) まず，物体に働く力を拾い出す作業から始める．図 2.5 右上下のように，力を受ける物体は実線で，近接して現象論的な力を相手に及ぼす物体は点線で描く．そうしなければどちらの物体に力が作用してるか分からなくなる．

ここでは，右上の図で，おもりに働く基本力である重力をその向きを考え下向きの矢印で表し，大きさ mg を付した．次いで点線で接することが示されている体重計からの垂直抗力をその向きを考え上向きの矢印で表し，大きさ N を付した．おもりについては他に働く力は何もない．一方，重量計については，ここでは運動方程式を立てないので，おもりからの反作用としての下向きの垂直抗力（大きさ N）のみを示し，その他の力は記入していない．

---

[1] kgw，kg 重は採用しない．
[2] kg とのみ言う場合が多い．

(ii) すべての物理量を英文字で表し，文字式として物理法則の式を立てる．

ここでは，おもりについての運動方程式を立てる．ここで，おもりの加速度 a とおくが，これはエレベーターの加速度でもある．すべては地上に固定された座標から測っている．

$$ma = N - mg$$

(iii) 文字式のまま解き，最後に単位付き数値を代入する．

ここでは，加速度 a を求めるのであるから，まず，

$$a = \frac{N}{m} - g$$

の形に変形し，

(a) エレベーターが上昇し始めたとき;

$$N = 1.20 \times 10\ \mathrm{kgf} = 1.20 \times 10\ \mathrm{kg} \times g, \quad m = 1.00 \times 10\ \mathrm{kg}$$

（注意：文字 N は (数値)+(単位) を表しているから，別の単位に移るとき，実質的に同じ量となるならば等号で結び付けられる．）を代入すると，

$$a = \frac{1.20 \times 10\ \mathrm{kg} \times g}{1.00 \times 10\ \mathrm{kg}} - g$$

$$= 0.20g = 0.20 \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \approx \underline{\underline{2.0\mathrm{m/s^2}}}$$

(b) エレベーターが停止し始めたとき;

$$N = 8.0\ \mathrm{kgf} = 8.0\ \mathrm{kg} \times g, \quad m = 1.00 \times 10\ \mathrm{kg}$$

を代入すると，

$$a = \frac{8.0\ \mathrm{kg} \times g}{1.00 \times 10\ \mathrm{kg}} - g$$

$$= -0.20g \approx \underline{\underline{-2.0\mathrm{m/s^2}}}$$

もちろん，$a < 0$ は減速の意味である．

この例で分かるように，おもりの重さは状況に応じて，いろいろな値となっているし，また，重量計を抜いてエレベーターの床とおもりの間に働く垂直抗力とした場合でも，**垂直抗力は状況に応じて，いろいろな値を取り得る．**等速度運動，すなわち，$a = 0$ のときは $N = mg$ であり，$a = -g$ のとき．$N = 0$．つまり，エレベーターのロープが切れ自由落下するときは，重さは 0 kgf なのである．

$\boxed{\textbf{問 1}}$ 加速度 a で上昇するリフトの水平な床 C に質量 M の直方体 B を置き，その上に質量 m の物体 A を置いたとき，AB 間の垂直抗力 N_{AB}，BC 間の垂直抗力 N_{BC} とおく．重力加速度の大きさを g とする．

(1)(a) A に働く上向きの力は何か．(b) また，下向きの力は何か．それぞれ記号で答えよ．

(2)(a) B に働く上向きの力は何か．(b) また，下向きの力は何か．それぞれ記号で答えよ．

(3) N_{AB}，　N_{BC} の大きさを，M, m, g, a で表せ．[3]

[3]問 1 の答:(1)(a) N_{AB}，(b) mg，(2)(a) N_{BC}，(b) N_{AB}, Mg，(3) $N_{\mathrm{AB}} = m(g+a), N_{\mathrm{BC}} = (m+M)(g+a)$

★ 摩擦の法則

固体と固体が接触していて，しかも互いに接触部が肉眼で見ればずれていない場合に働く力としては，垂直抗力以外に**静止摩擦力**がある．垂直抗力は原子間の距離が近接した場合に生じる斥力の集合的な現われであるのに対して，静止摩擦力は原子間の距離がある程度離れた場合に生じる引力の現われである．マクロにはずれが生じていないように見えても，2 つの固体の接触面付近で初め互いに近距離にあった原子は面に平行にミクロには引き離されてる．さらに，2 つの固体どうしがマクロにもずれを生じている場合にも，その大きさは異なるが原子間の引力は同様に生じる．この力が**動摩擦力**である．

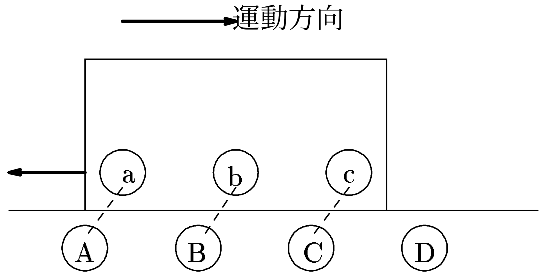

図 2.6: 摩擦力の原子論的模型

原子間に働く力のポテンシャルの図 2.4 からも明らかなように，原子間の距離があまり離れ過ぎてしまうと力はほとんど 0 となってしまうことにも注意しよう．固体と固体をすり合わせたまま接触面に沿ってずらそうとすれば，図 2.6 のように原子 a と原子 A，b と B，c と C は引力の強い原子間距離にあるが，さらにずらすとこれらの原子間の引力はほとんどなくなり，新たに原子 a と原子 B，b と C，c と D の間の引力が生じる． 摩擦力は接触面に平行な原子間の引力の集合的な現われである．

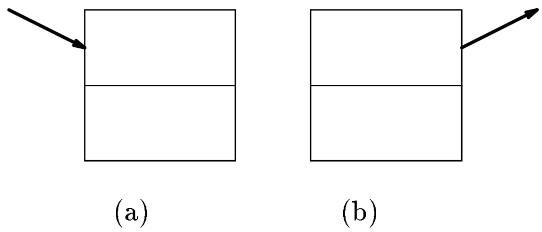

図 2.7: 摩擦力の生じる場合 生じない場合

しかし，ここで着目すべきことは，この力は固体が接触して働くもう 1 つの力，垂直抗力と全く無関係に生じている訳ではないと言うことである．互いに接している 2 物体の一方（図の上の物体）に 図 2.7 (a) のような方向にここで話題にしている垂直抗力，摩擦力以外の何か他の力を加えた場合を考えてみる．話を簡単にするため，その他の力は働いていないとする．ここで,「図で力の矢印の触れていない方の物体（図で下の物体）にもこの力が作用している.」というような考え方をしてはいけない．矢印の力の加わっていない下の物体は，上の物体から接触面に垂直な力と，接触面に平行な力を受ける．前者が垂直抗力で，後者が摩擦力である．このことは 2 物体が静止していようと，運動を始めようと関係がない．一方，(b) の場合，これは経験的に言えばあたりまえのことなのであるが，図の矢印の力以外に何の力も作用していないので，上の物体はただちに下の物体から離れてしまい，上の物体の原子と下の物体の原子の距離は斥力も引力も作用しない遠方に達してしまう． この考察から，(a) のときには，何かの力が働き，2 物体の接触面の原子間の面に垂直な距離が極めて接近し向き合った各原子どうしの間に垂直抗力という相互作用が発生する場合に限り（ただし，この条件は垂直抗力が極めて小さくなる場合まで含む.），面に平行な相互作用である静止摩擦力，あるいは，動摩擦力が生じる．また，(b) のような

場合には，たとい面に平行な他の力の成分があっても摩擦力は生じないということである．注意すべきことは，ここで前提としているのは，あくまでも接触面にずれが起こすような他の力，ないし，運動があるということである．接触面にずれが起こすような他の力，ないし，運動が存在しない場合には摩擦力は発生しない，つまり 0 である．

定性的な議論はここまでである．それ以上詳しく原子論に立ち入ることはできないので，この力も定量的には現象論的に取り扱わざるを得ない．つまり，以下の**摩擦の法則**は，力学原理から導かれたものではなく，主にクーロンによってまとめられた経験的な法則である．[4]

【1】静止摩擦力は接触面内で状況に応じて，いろいろな大きさと方向を取り得るが，その大きさには垂直抗力に比例した上限がある．

垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力を R_0[5]とおくと，

$$R < \mu_0 N \tag{2.29}$$

ここで，静止摩擦力の上限の比例定数 μ_0 を**静止摩擦係数**と呼ぶ．接触面が水平な場合には，前項で見たように垂直抗力 N は重さと考えると，体験的なイメージと重なって理解しやすい．すなわち，静止摩擦力の上限を超える他の力を加えることで物体は動き出すから,「重い物体ほど動かすために大きな力を必要とする.」しかしながら，接触面が水平ではなく斜面を形成している場合には，垂直抗力 N はもはや重さと考えられない．

【2】動摩擦力は垂直抗力に比例し，2 物体のすべる相対速度によらない．

すなわち，動摩擦力を R とおくと，

$$R = \mu N \tag{2.30}$$

ここで，動摩擦力の比例定数 μ を**動摩擦係数**と呼ぶ．動摩擦力が生じているとき，接触面では絶えず原子の結合が切れ，別の原子と再結合するという繰り返しが起こっているので，このことは 2 物体の内部構造の変化をもたらさずには置かない．[6]そのため動摩擦力は，その仕事が移動径路に依存する I–2–1 で述べたような「非保存力」となる．

【3】動摩擦力は静止摩擦力の上限より小さい．また，どちらの値も見かけの接触面積の大小には関係しない．

すなわち，

$$\mu < \mu_0 \tag{2.31}$$

「重い物体を動かすまでは大変でも，動き出してしまえば少し楽になる.」というよなことは体験できることである．後半の事実は，予想外のことかも知れないが，水平面に置いた

[4]この法則は「クーロンの法則」と呼ぶが，静電気力の法則と混同するから，採用しないことにする．

[5]よく摩擦力に F を用いるテキストがあるが，力一般も F と書き混乱を招いている．ドイツ語 Reibung の頭文字を採用する．

[6]その意味で，動摩擦力が働く物体は，厳密な意味では内部構造を考える必要のない「粒子」とは言い難くなる．

箱を動かすのに必要な力は箱の底面を下にしても，側面を下にしてもほぼ変わらない，という実験をすることは容易であろう．

例 2 図 2.8 のように，質量 m の小さい物体を板に乗せて水平面との傾きの角 θ をしだいに大きくしていくと，小物体は $\theta = \theta_{\mathrm{c}}$ のとき滑り出した．重力加速度の大きさを g とする．
(1) $\theta = 0$ のとき，小物体に働く静止摩擦力はいくらか．
(2) $\theta < \theta_{\mathrm{c}}$ のとき，小物体に働く静止摩擦力はいくらか．
(3) 板と小物体の間の静止摩擦係数はいくらか

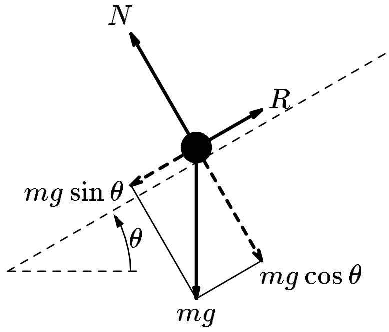

図 2.8: 斜面上の傾きによる摩擦力の測定

(4) $\theta > \theta_{\mathrm{c}}$ のとき，小物体の加速度は板に沿って下向きを座標の正の向きとしたときいくらか．ただし，板と小物体の間の動摩擦係数を μ とする．

摩擦力が作用しているが，小物体は粒子と見なす．もし，物体の大きさを考えるなら，角 θ を大きくして行ったとき物体は滑り出す前に倒れたり転がり出したりするかも知れない．そのような場合はこの単元では第 4 章になって勉強する．粒子と見なせば，各力が「物体のどの部分に作用するか.」という問いを考慮する必要はなくなる．どの場合であっても，粒子に働く力は，地上の重力 mg，垂直抗力 N，静止または動摩擦力 R が図 2.8 の向きに働く．ここで，板に沿って下向きに x 座標を，板に垂直斜め上向きに y 座標を選ぶと，重力の x 成分は $+mg\sin\theta$，y 成分は $-mg\cos\theta$ と分解できる．
(1),(2) つりあいの式（加速度 0 の運動方程式）を立てると，

$$\begin{cases} x\ \text{成分} : 0 = mg\sin\theta - R & (2.32) \\ y\ \text{成分} : 0 = N - mg\cos\theta & (2.33) \end{cases}$$

(2.32) より，(2) の答：静止摩擦力は $R = \underline{\underline{mg\sin\theta}}$．
この答に $\theta = 0$ を代入すれば，(1) の答：$R = \underline{\underline{0}}$．つまり，板に沿って何の力も働いていないので，静止摩擦力は働かない．
(3) 静止摩擦係数を μ_0 とおくと，(2.33) より $N = mg\cos\theta$ だから (2.29) 式より

$$R < \mu_0 N, \quad mg\sin\theta < mg\cos\theta$$

$\theta \to \theta_{\mathrm{c}}$ のとき，$mg\sin\theta_{\mathrm{c}} \to mg\cos\theta_{\mathrm{c}}$ となるから，

$$\mu_0 = \underline{\underline{\tan\theta_{\mathrm{c}}}}$$

(4) 動摩擦力は $R = \mu N = \mu mg\cos\theta$ となるから，小物体についての運動方程式（x 成分）は，

$$ma = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

$$a = \underline{\underline{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}$$

$\tan\theta > \tan\theta_c$ だから，(3) の答より，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} > \mu_0$．(2.31) 式の関係より

$$\sin\theta > \mu_0\cos\theta > \mu\cos\theta$$

となるから，確かに $a > 0$ で板に沿って下向きに加速される．

問 2 オイラーは，次の測定から，動摩擦係数 μ の値を求めた．板の長さ $l = 176$ cm，板の一方を持ち上げた高さ $h = 93$ cm，小物体の滑った距離 $s = 168$ cm，その間の所用時間 $t = 2.0$ s．μ を求める文字式を立て，動摩擦係数 μ の値を求めよ．[7]

★　張力

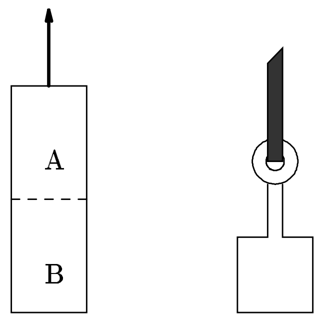

図 2.9: 張力の発生と結び目

垂直抗力や摩擦力は，互いに化学的に結合していない 2 つの固体の接触面に生じる力であったが，引く力，すなわち，**張力**は，1 つの固体（のりづけされた 2 つの固体も含める.）を 2 つの部分に分けて考えたときに断面間に働く相互作用である．この力の起源は物体を構成する原子間の引力であることは言うまでもない．図 2.9 右のように他の力が A の部分に作用しているとき，AB 間の断面では A が B を引く，そして，反作用として，B が A を引く，大きさが同じで互いに逆向きの張力が発生する．垂直抗力や静止摩擦力と同様，**張力は状況に応じて，いろいろな値を取り得る．**多くの固体では，断面積 1 m^2 当たり 10^8 N 程度まで両端に引く力を加えなければ破壊されないから，張力の取り得る値の範囲は非常に広い．

ささいな注意であるが，図 2.9 左のような取っ手とひもの結び目では，張力のように見えて実は垂直抗力が相互に作用している．ひもと取っ手は別々の物体であるから当然とも言える．

---

[7]問 2 の答：$\mu = \tan\theta - \dfrac{2s}{gt^2\cos\theta} = 0.521$．ただし，$\sin\theta = \dfrac{h}{l}$

★ ラグランジュの方法

これまで見て来たように，現象論的な力はその値が未定な力である．このままでは，ニュートンの運動方程式を解いて粒子の運動を決定することはできない．何故ならば，運動方程式の解を得るには，粒子の質量とともに，右辺の外界項である力が与えられていなければならないからである．ラグランジュは値の定まらない現象論的な力を消去した形の運動方程式を定式化した．残念ながらラグランジュの提起した形式をそのまま学ぶための数学的準備はまだできていない．ここではこれまでに習ってきた手法の範囲内で，具体的な問題についてラグランジュの広義の運動方程式を導くことにする．

例 3 図 2.10 のように，質量 m_{A} の物体 A と質量 m_{B} の物体 B のそれぞれに付いている取っ手に質量の伸びも無視できる糸の両端を結び，A を机 F の水平面に置き，糸を F の角に取り付けた滑車に掛け，B をつり下げる．A と F の間の摩擦，滑車の質量は無視できるとし，重力加速度の大きさを g とする．糸をぴんと張った状態で A，B を押さえておき，その後時刻 $t=0$ に静かに放したときの A，B の運動を調べる．このような問題を解くには，次のような手順に従う．

①**力の拾い出し**：まず，糸を A についた取っ手のところの結び目から滑車に触れる手前までの水平部分 C と滑車に接している部分 D と D の端から B についた取っ手のところの結び目までの鉛直部分 E に分けて考える．A，B，C，D，E に働く力は図 2.11 のようになる．図では，運動方程式の粒子項に取り上げられる，つまり，力が作用する物体を実線で示し，基本力（ここでは，地上の重力）以外の外界項，つまり，現象論的な力を他に及ぼす原因となる接触物体を点線で示してある．また，図の矢印は力の向きを，英文字は力の大きさを表すとする．すなわち，A には地上の重力 $m_{\mathrm{A}}g$，F からの垂直抗力 N_{AF}，A の取っ手が C の結び目を左向きに押す垂直抗力の右向きの反作用 N_{AC} が，B には地上の重力 $m_{\mathrm{B}}g$，B の取っ手が E の結び目を下

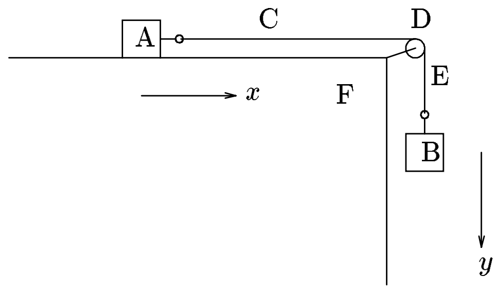

図 2.10: 張力と垂直抗力の消去

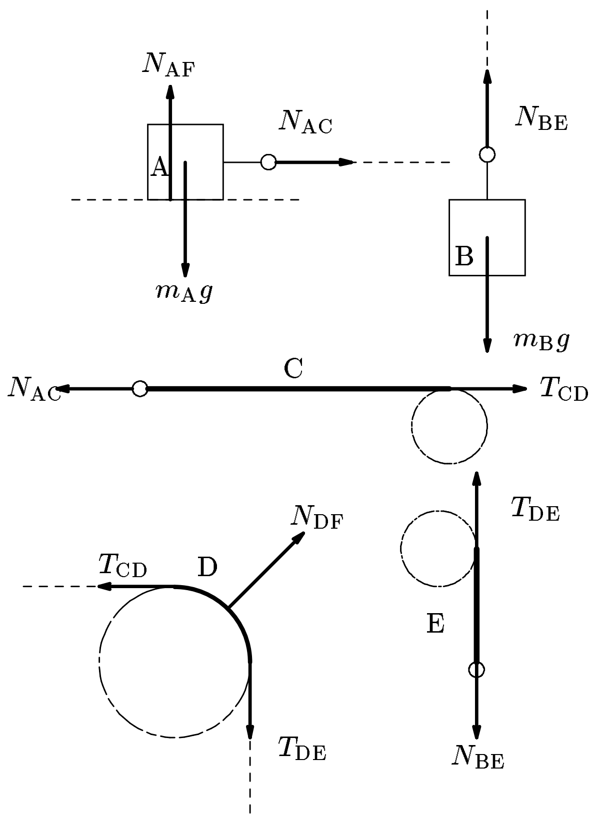

図 2.11: 各部分に働く力

向きに押す垂直抗力の上向きの反作用 N_{BE} が働く．糸の質量は無視できるため，糸に作用する地上の重力は考えなくてよい．C には A の取っ手からの垂直抗力 N_{AC}，CD は同じ糸を形成しているため，D から C に働く張力 T_{CD} が，E には B の取っ手からの垂直抗力 N_{BE} と D から E 働く張力 T_{DE} が働く．4 分の 1 円弧になっている D の両端には，それぞれ，水平左向きと鉛直下向きに張力 T_{CD},T_{DE} が働き，円弧の各部分に垂直に垂直抗力が働くが，その合力は図の向きに大きさ N_{DF} となる．糸 C，D，E には，全く質量がない訳ではないので，それぞれの質量中心を定めることはできる．各力はそれぞれの質量中心に作用していると見なし得るから，粒子についての力学が適用できるのである．

②**束縛条件の式を作る**：図 2.10 に書き込んである座標 x,y のそれぞれの原点 O は，時刻 $t=0$ のときの A，B の位置にとってあり，それぞれの運動方向を正の向きとしている．ここで A，B の運動の間，糸の長さは変わらないとする条件を式で表す．時刻 t のときの A，B の位置をそれぞれ x,y とすると，糸の長さが不変な条件は $y=x$ と表される．これより，A，B の速度，加速度も

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

となって，それぞれ等しい．この例のように，対象とする物体の運動が他の物体によって制約されることを表す，位置，速度，加速度の式を**束縛条件**と呼ぶ．[8]A の運動が F によって水平方向のみに制限されていることも，もちろん，束縛条件である．ここでは，A，B の速度，加速度を（それぞれ，異なる座標の下に定まる量であるが，）共通の文字 v,a で表すことにする．座標を設定して直接は考えなかったが，C，D，E の瞬間々々の質量中心の速度，加速度も，同様に，v,a で表すことができる.（ただし，D については，滑車の接線方向，水平と $\frac{\pi}{4}$ をなす座標についての速度，加速度となる.）

③**運動方程式を立てる**：A，B，C，D，E について，ニュートンの運動方程式を立てる．F は十分大きな物体で，他に力を及ぼすだけの存在として取り扱う．

$$\mathrm{A}(x\text{ 成分}) \ : \ m_{\mathrm{A}}a=N_{\mathrm{AC}} \tag{2.34}$$

$$\mathrm{A}(y\text{ 成分}) \ : \ m_{\mathrm{A}}\cdot 0=N_{\mathrm{AF}}-m_{\mathrm{A}}g \tag{2.35}$$

$$\mathrm{B} \ : \ m_{\mathrm{B}}a=m_{\mathrm{B}}g-N_{\mathrm{BE}} \tag{2.36}$$

$$\mathrm{C} \ : \ 0\cdot a=T_{\mathrm{CD}}-N_{\mathrm{AC}} \tag{2.37}$$

$$\mathrm{D}(x\text{ 成分}) \ : \ 0\cdot a\cos\frac{\pi}{4}=N_{\mathrm{DF}}\cos\frac{\pi}{4}-T_{\mathrm{CD}} \tag{2.38}$$

$$\mathrm{D}(y\text{ 成分}) \ : \ 0\cdot a\sin\frac{\pi}{4}=T_{\mathrm{DE}}-N_{\mathrm{DF}}\sin\frac{\pi}{4} \tag{2.39}$$

$$\mathrm{E} \ : \ 0\cdot a=N_{\mathrm{BE}}-T_{\mathrm{DE}} \tag{2.40}$$

糸に働く重力は無視できるから，C の糸が水平でなくたるんだり，E の糸がを各部分で切ってそれぞれの断面における張力を比べたとき，下の部分の質量が大きくなるほどその重さを支えるため大きな張力になることもない．D では滑車との間の摩擦を考えなければ，糸

[8]「拘束条件」は不採用．

と滑車は一体となって回らないのではないか，と思うかも知れないが，質量の無視できる滑車は無視できる大きさの摩擦力によって回転し続けることが分かっている．ただし，回転する滑車は粒子とは見なせないので，この点を証明することは，この単元の第 4 章で内部構造のある物体を習うまではできない．

④**ラグランジュの式を導く**：(2.34) 式から (2.40) 式まで，(2.35) 式を除いて，辺々加えると，

$$(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})a = m_\mathrm{B}g \tag{2.41}$$

が得られる．この式は 1 粒子についてのものでもなければ，直線座標のものでもないから，ニュートンの言う意味での運動方程式ではないが，A，B の加速度が定まる単純な式である．すなわち，A，B は

$$a = \frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}g \tag{2.42}$$

の等加速度運動をする．いろいろな垂直抗力，張力は (2.42) 式の加速度 a の値を使って，(2.34)〜(2.40) 式より，

$$N_\mathrm{AF} = m_\mathrm{A}g, \quad N_\mathrm{AC} = T_\mathrm{CD} = T_\mathrm{DE} = N_\mathrm{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}}N_\mathrm{DF} = \frac{m_\mathrm{A}m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}$$

⑤**初期条件を書き出す**：加速度の値を知っても，ある時刻（多くは，この時刻を $t = 0$ とする.）の位置と速度があらかじめ与えられていなければ，任意の時刻 t の位置と速度は t の関数として求まらない．この条件を**初期条件**と呼ぶ．そしてもちろん，これらの式は初めに座標をどのように選ぶかによって異なって来る．ここでは，A，B の初めの位置をそれぞれの原点にとった．また， 問題文の「静かに」という意味は初速 0 を意味している．

初期条件：$t = 0$ のとき,$x = y = 0$,$v = 0$

したがって，A，B の時刻 t のときの速度，位置は，$v = at$，　$x = y = \frac{1}{2}at^2$ の関係から簡単に求まる．

⑥**エネルギー保存則を組み立てる**:速度 v を時刻 t の関数としてよりも，位置 x,y の関数として見た方が便利な場合もある．そこでここでは，I–1–2 で習ったヘルムホルツの方法を用いて，エネルギー保存則を組み立てておこう．$a = \frac{dv}{dt}$ の関係から，(2.41) 式は

$$(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})\frac{dv}{dt} = m_\mathrm{B}g$$

両辺に，v を掛ける.（右辺は，$v = \frac{dy}{dt}$ であるから，$\frac{dy}{dt}$ に直して掛け算をする.）

$$(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})v\frac{dv}{dt} = m_\mathrm{B}g\frac{dy}{dt}$$

両辺を t で積分すれば，積分変数は変換されて，左辺は v，右辺は y についてのものとなる．左辺を $t=0$ から t まで，右辺を $y=0$ から y までの定積分とする．

$$(m_{\rm A}+m_{\rm B})\int_0^v v dv = m_{\rm B} g\int_0^y dy$$

結局，エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}(m_{\rm A}+m_{\rm B})v^2 - m_{\rm B} g y = 0 \tag{2.43}$$

となる．初期条件が $y=0$,　$v=0$ なので，時刻 $t=0$ のときの運動エネルギーは 0，地上の重力のポテンシャル U は基準点 $y=0$ のとき $U=0$．B は落下するのでその後 $U=-m_{\rm B}gy$ となる．

A に作用している垂直抗力 $N_{\rm AC}$ のする仕事 $W_{\rm A}$ は

$$W_{\rm A} = N_{\rm AC} x$$

と表される．一方，A に作用しているもう一つの垂直抗力 $N_{\rm AF}$ のする仕事は，垂直抗力 $N_{\rm AF}$ が A の変位に絶えず直角になっているので，0 となる．B に作用している垂直抗力 $N_{\rm BE}$ のする仕事 $W_{\rm B}$ は

$$W_{\rm B} = -N_{\rm AE} y$$

と，B の変位の向きと力の向きが逆向きとなるため負の仕事となる．ところで，(2.37) 式から (2.40) 式まで辺々加えると，$N_{\rm BE}=N_{\rm AC}$ となるから，

$$W_{\rm A} + W_{\rm B} = 0$$

すなわち，A，B の系において，現象論的な力は内部的なエネルギーのやり取りに過ぎず力学的エネルギーは保存する．ここでは，質量の無視できる糸 C，D，E は力の伝達の役割しか果たしていない．[1]

問 3 図 2.12 のように，質量 $m_{\rm A}$ の物体 A と質量 $m_{\rm B}$ の物体 B に質量の伸びも無視できる糸の両端を糊付けし，A を水平と角 θ をなす斜面に置き，糸を 斜面の頂上に取り付けた滑車に掛け，B をつり下げる．A と斜面の間の摩擦，滑車の質量は無視できるとし，重力加速度の大きさを g とする．糸をぴんと張った状態で A，B を押さえておき，その後時刻 $t=0$ に静かに放したときの A，B の加速度を求めよ．また，B が初

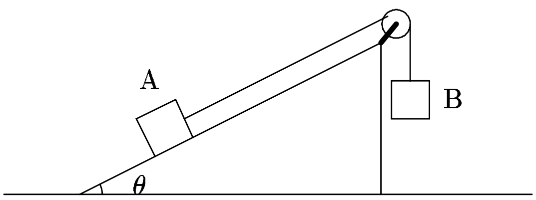

図 2.12: 斜面と滑車

[1][教師用メモ]: 系のラグラジアンは $L=\frac{1}{2}(m_{\rm A}+m_{\rm B})v^2+m_{\rm B}gy$．ラグランジェの運動方程式: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ に適用すると，(2.41) 式となる．

めの位置から y だけ落下したときの速度を v として，A，B の系のエネルギー保存則を書け．[2]

例 4 図 2.13 のように，質量 m_{A} のおもり A と質量 m_{B} のおもり B を糸につなぎ糊付けし，滑車 P に掛ける．さらに，この滑車 P と質量 m_{C} のおもり C を糸でつなぎ糊付けする．滑車と糸の質量は無視できるとし，重力加速度の大きさを g とする．初め A，B を天井から l_1+l_2 の位置，C を l_2 の位置に固定し，時刻 $t=0$ に同時に静かに放す．A，B，C の運動を調べよう．特に，$m_{\mathrm{A}}=M, m_{\mathrm{B}}=3M, m_{\mathrm{C}}=4M$ の場合に，A，B，C の加速度，および，2 本の糸の張力を求め，時刻 t の速度，位置を求めよ．

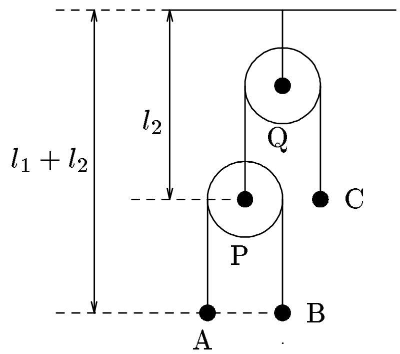

図 2.13: 動滑車

①**力の拾い出し**： A，B，C，P に働く力は図 2.14 のようになる．重力は質量が無視できない A，B，C のみ考慮される．滑車 P に掛かる糸の張力の大きさ T_1 は，糸の質量が無視できるから，A，B に上向きに作用する場合も，P に掛かって両側から下向きに引く場合も同じである．ただし，ここでは P と P に掛かる糸の半周部分を一体と見ることにしたが，例 3 のように滑車と糸を別々に見れば， 糸の半周部分の中央に P からの垂直抗力の合力が鉛直上向きに作用し，P は 2 本の糸の下向きの張力ではなく，糸に及ぼした垂直抗力の反作用を下向きに受けているのである．滑車 Q に掛かる糸の大きさはまた別の糸であるため張力の大きさ T_2 は T_1 とは異なるが，P，C を上向きに引く場合と Q での作用の仕方は同様である．しかし，Q は定滑車で力のつりあいは自明なので，式にするのは省略する．

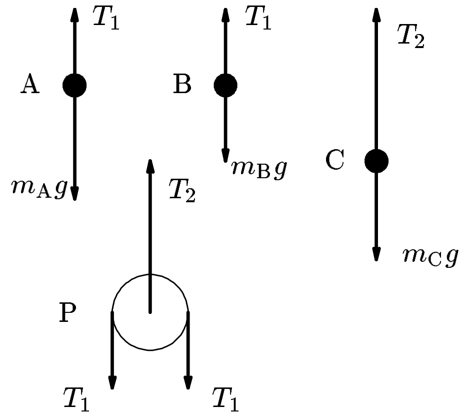

図 2.14: 各部分に働く力

②**束縛条件の式を作る**：次に，図 2.15 のように，天井を原点 O とし，鉛直下向きを x 軸の正方向とする共通座標を選ぶ．考えやすくするため，ここでは滑車 Q を吊るす糸の長さ，および，両滑車の半周部分が糸の長さが無視できるほど小さい場合を図にしてあるが，この部分は大きくてもいつも一定であるから，以下の考察に影響しない．AB 部分の糸の長さは $2l_1$，PC 部分の糸の長さは $2l_2$ で，それぞれ伸び縮みしない．したがって，条件式は 2 つになる．

[2]問 3 の答：$a=\dfrac{m_{\mathrm{B}}-m_{\mathrm{A}}\sin\theta}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}g,\quad \dfrac{1}{2}(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})v^2-(m_{\mathrm{B}}-m_{\mathrm{A}}\sin\theta)gy=0$

$$(x_{\rm A} - x_{\rm P}) + (x_{\rm B} - x_{\rm P}) = 2l_1 \tag{2.44}$$
$$x_{\rm C} + x_{\rm P} = 2l_2 \tag{2.45}$$

そのため，A，B，C，P の 4 個の座標のうち独立なものは
4 個$-$2 式 $=$ 2 個 となる．そこで，計算をするときには，P の座標 $x_{\rm P}$ を残し，A の P に対する 相対座標 $x_{\rm r} = x_{\rm A} - x_{\rm P}$ を導入し， $x_{\rm P}$ と $x_{\rm r}$ を独立変数として見て行くことにしよう．(2.24)，(2.25) 式の関係があるから，元の座標に戻すには，

$$x_{\rm A} = x_{\rm P} + x_{\rm r} \tag{2.46}$$
$$x_{\rm B} = 2l_1 + x_{\rm P} - (x_{\rm A} - x_{\rm P}) = 2l_1 + x_{\rm P} - x_{\rm r} \tag{2.47}$$
$$x_{\rm C} = 2l_2 - x_{\rm P} \tag{2.48}$$

とすればよい．A，B，C，P の速度，加速度を $v_{\rm A}, v_{\rm B}, v_{\rm C}, v_{\rm P}$； $a_{\rm A}, a_{\rm B}, a_{\rm C}, a_{\rm P}$ とおくことにする．(2.25) 式を辺々 t で微分すると，定数の微分は 0 であるから，

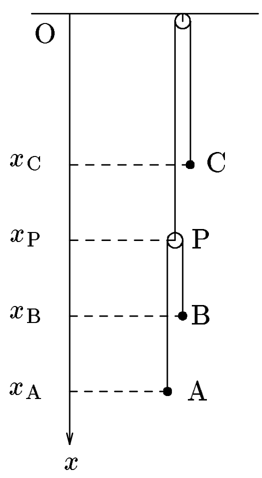

図 2.15: 動滑車の束縛条件

$$\frac{x_{\rm C}}{dt} + \frac{x_{\rm P}}{dt} = 0$$

すなわち，$v_{\rm C} + v_{\rm P} = 0$．これは，例えば，C が速度 $v_{\rm C}$ で落下すれば，同じ糸に結ばれている P は速度 $v_{\rm P} = -v_{\rm C}$，つまり，同じ速さで上昇することを意味している．(2.24) 式を辺々 t で微分すると，

$$\left(\frac{x_{\rm A}}{dt} - \frac{x_{\rm P}}{dt}\right) + \left(\frac{x_{\rm B}}{dt} - \frac{x_{\rm P}}{dt}\right) = 0$$

すなわち，A の P に対する相対速度 $v_{\rm r} = v_{\rm A} - v_{\rm P}$ とすると，B の P に対する相対速度は $-v_{\rm r} = v_{\rm B} - v_{\rm P}$ となっている．これは，A，B は同じ糸に結ばれているから，例えば，A が滑車 P に対して速度 $v_{\rm r}$ で相対的に落下すれば，B は速度 $-v_{\rm r}$，つまり，同じ相対的速さで上昇することを意味している．これらの関係は，

$$v_{\rm A} = v_{\rm P} + v_{\rm r} \tag{2.49}$$
$$v_{\rm B} = v_{\rm P} - v_{\rm r} \tag{2.50}$$
$$v_{\rm C} = -v_{\rm P} \tag{2.51}$$

とまとめられる．(2.49)，(2.50)，(2.51) 式を再び辺々 t で微分すれば，加速度の間の関係：

$$a_{\rm A} = a_{\rm P} + a_{\rm r} \tag{2.52}$$
$$a_{\rm B} = a_{\rm P} - a_{\rm r} \tag{2.53}$$
$$a_{\rm C} = -a_{\rm P} \tag{2.54}$$

となる．

③**運動方程式を立てる**：まず，P について運動方程式を立てる．ただし，P の質量は 0 と

見なせるので，

$$0 \cdot a_{\mathrm{P}} = 0 \cdot g + 2T_1 - T_2$$

P が動滑車であって，加速度を持っていても，質量が無視できるため見かけ上つりあっているようになる．したがって，C に働く張力は

$$T_2 = 2T_1$$

これを用いて， A，B，C について運動方程式を立てる．

$$\mathrm{A} \ : \ m_{\mathrm{A}} a_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{A}} g - T_1 \qquad (2.55)$$

$$\mathrm{B} \ : \ m_{\mathrm{B}} a_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{B}} g - T_1 \qquad (2.56)$$

$$\mathrm{C} \ : \ m_{\mathrm{C}} a_{\mathrm{C}} = m_{\mathrm{C}} g - 2T_1 \qquad (2.57)$$

④**ラグランジュの式を導く**：(2.55)，(2.56)，(2.57) 式に，(2.52)，(2.53)，(2.54) 式を代入する．

$$\mathrm{A} \ : \ m_{\mathrm{A}}(a_{\mathrm{p}} + a_{\mathrm{r}}) = m_{\mathrm{A}} g - T_1 \qquad (2.58)$$

$$\mathrm{B} \ : \ m_{\mathrm{B}}(a_{\mathrm{p}} - a_{\mathrm{r}}) = m_{\mathrm{B}} g - T_1 \qquad (2.59)$$

$$\mathrm{C} \ : \ m_{\mathrm{C}}(-a_{\mathrm{P}}) = m_{\mathrm{C}} g - 2T_1 \qquad (2.60)$$

T_1 を消去した式：(2.58)−(2.59) と，(2.58)+(2.59) − (2.60) を作る．

$$(m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}})a_{\mathrm{P}} + (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})a_{\mathrm{r}} = (m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}})g \qquad (2.61)$$

$$(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}})a_{\mathrm{P}} + (m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}})a_{\mathrm{r}} = (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{C}})g \qquad (2.62)$$

これが加速度を求めるための式である．[3]

$m_{\mathrm{A}} = M$,$m_{\mathrm{B}} = 3M$,$m_{\mathrm{C}} = 4M$ の場合には，(2.61) ,(2.62) 式は，

$$\begin{cases} -2Ma_{\mathrm{P}} + 4Ma_{\mathrm{r}} = -2Mg \\ 8Ma_{\mathrm{P}} - 2Ma_{\mathrm{r}} = 0 \end{cases}$$

これを解いて，

$$a_{\mathrm{P}} = -\frac{1}{7}g, \quad a_{\mathrm{r}} = -\frac{4}{7}g$$

(2.52)，(2.53)，(2.54) 式を用いると，

$$a_{\mathrm{A}} = \underline{\underline{-\frac{5}{7}}}g, \quad a_{\mathrm{B}} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}g, \quad a_{\mathrm{C}} = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}g$$

[3][教師用メモ]：系のラグラジアンは $L = \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}(v_{\mathrm{p}} + v_{\mathrm{r}})^2 + m_{\mathrm{B}}(v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{r}})^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{C}}v_{\mathrm{P}}^2 + \{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{C}})x_{\mathrm{P}} + (m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}})x_{\mathrm{r}}\}g$. ラグランジェの運動方程式：$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_{\mathrm{P}}} - \frac{\partial L}{\partial x_{\mathrm{P}}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_{\mathrm{r}}} - \frac{\partial L}{\partial x_{\mathrm{r}}} = 0$ に適用すると，(2.61),(2.62) 式となる．

が得られる．A，B の質量の和と C の質量が等しくても，A が上昇，B，C は下降する．さらに，(2.55) 式より，

$$T_1 = \frac{1}{2}T_2 = m_\mathrm{A}(g - a_\mathrm{A}) = \underline{\underline{\frac{12}{7}Mg}}$$

⑤**初期条件を書き出す**：問題文より，

$$\text{初期条件：} t = 0 \text{ のとき}, x_\mathrm{A} = x_\mathrm{B} = l_1 + l_2, x_\mathrm{C} = l_2, v_\mathrm{A} = v_\mathrm{B} = v_\mathrm{C} = 0$$

ここから，A，B，C の速度は，

$$v_\mathrm{A} = \underline{\underline{-\frac{5}{7}gt}}, \quad v_\mathrm{B} = \underline{\underline{\frac{3}{7}gt}}, \quad v_\mathrm{C} = \underline{\underline{\frac{1}{7}gt}}$$

A，B，C の時刻 t における位置は

$$x_\mathrm{A} = \underline{\underline{l_1 + l_2 - \frac{5}{14}gt^2}}, \quad x_\mathrm{B} = \underline{\underline{l_1 + l_2 + \frac{3}{14}gt^2}}, \quad x_\mathrm{C} = \underline{\underline{l_2 + \frac{1}{7}gt^2}}$$

⑥**エネルギー保存則を組み立てる**:(2.61)，(2.62) 式を $a_\mathrm{P} = \dfrac{dv_\mathrm{P}}{dt}, a_\mathrm{r} = \dfrac{dv_\mathrm{r}}{dt}$ の関係を用いて書き直しておき，それぞれの両辺に，$v_\mathrm{r}, v_\mathrm{P}$ を掛け，時刻 t で積分する.（右辺は，$(v_\mathrm{r} =)\dfrac{dx_\mathrm{r}}{dt}$,$(v_\mathrm{P} =)\dfrac{dx_\mathrm{P}}{dt}$ に直して掛け算をする.）(2.61) 式の左辺の第 2 項と，(2.62) 式の左辺の第 2 項の計算は，それぞれ，

$$(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})v_\mathrm{P}\int_0^{v_\mathrm{r}} 1 dv_\mathrm{r} = (m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})v_\mathrm{P}v_\mathrm{r}$$

$$(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})v_\mathrm{r}\int_0^{v_\mathrm{P}} 1 dv_\mathrm{P} = (m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})v_\mathrm{P}v_\mathrm{r}$$

となる．v_P と v_r は独立変数であるから，それぞれの被積分関数とはならない．それぞれは同じ値になる．(2.61)+(2.62) を作ると，

$$(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B} + m_\mathrm{C})\int_0^{v_\mathrm{P}} v_\mathrm{P} dv_\mathrm{P} + 2(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})v_\mathrm{P}v_\mathrm{r} + (m_\mathrm{A} - m_\mathrm{B})\int_0^{v_\mathrm{r}v_\mathrm{r}} dv_\mathrm{r}$$

$$= (m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B} - m_\mathrm{C})g\int_{l_2}^{x_\mathrm{P}} 1 dx_\mathrm{P} + (m_\mathrm{A} - m_\mathrm{B})g\int_{l_1}^{x_\mathrm{r}} 1 dx_\mathrm{r}$$

定積分の下限は，初速 0 と $x_\mathrm{P} = l_2$，$x_\mathrm{r} = x_\mathrm{A} - x_\mathrm{P} = (l_1 + l_2) - l_2$ の初期条件が入る．定積分を実行すると，

$$\frac{1}{2}(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B} + m_\mathrm{C})v_\mathrm{P}^2 + 2(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})v_\mathrm{P}v_\mathrm{r} + \frac{1}{2}(m_\mathrm{A} - m_\mathrm{B})v_\mathrm{r}^2$$

$$= (m_A + m_B - m_C)g\,(x_P - l_2) + (m_A - m_B)g(x_r - l_1)$$

右辺は，少し計算すると，

$$\frac{1}{2}m_A(v_P + v_r)^2 + \frac{1}{2}m_B(v_P - v_r)^2 + \frac{1}{2}m_C v_P^2$$

となるから，結局，エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}m_A(v_P + v_r)^2 + \frac{1}{2}m_B(v_P - v_r)^2 + \frac{1}{2}m_C v_P^2 - m_A g(x_P + x_r) - m_B g(2l_1 + x_P - x_r) - m_C(2l_2 - x_P)$$

$$= -m_A g(l_1 + l_2) - m_B g(l_1 + l_2) - m_C l_2 \tag{2.63}$$

(2.46)∼(2.51) 式を用いれば，

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}m_C v_C^2 - m_A g x_A - m_B g x_B - m_C g x_C$$
$$= -m_A g(l_1 + l_2) - m_B g(l_1 + l_2) - m_C g l_2$$

A，B，C の運動エネルギーと (2.23) 式の地上の重力のポテンシャル（$x = 0$ を基準点とする.）の和となっていることが分かるが，後式の形では束縛条件が含まれていない.

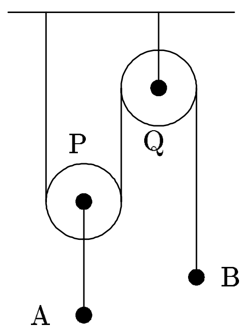

図 2.16: 動滑車

問 4 図 2.16 のように，質量 m_A のおもり A を糸につなぎ糊付けし，動滑車 P に掛ける．さらに，天井と質量 m_B のおもり B を糸でつなぎ糊付けし動滑車 P と定滑車 Q に掛ける．滑車と糸の質量は無視できるとし，重力加速度の大きさを g とする．A，B の加速度（鉛直下向きを正とする.）と，それぞれに作用する糸の張力を求めよ．[4]

いわゆる「手で押す」と言うような力も垂直抗力 N である．人を含めない力学系を考えるときは，N は消去することはできないから，別の方法であらかじめ計量しておく必要がある.

また，物体に動摩擦力 R が働く場合も，R はポテンシャルで表せない非保存力なので，例 3，例 4 の取り扱いと多少違った点が出て来ることに注意しよう.

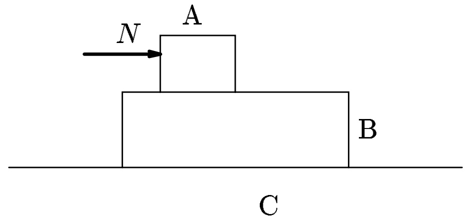

図 2.17: 摩擦力が働く場合

例 5 水平で滑らかな（摩擦が無視できる）床 C の上に質量 m_B の十分長い板 B を置き，B の上に質量 m_A の小さい物体 A を板 B の左端に乗せる．A と B との間の静止摩擦係数は μ_0，動摩擦係数は μ とする．図 2.17 のように，A に右向きに作用する水平な力 N をいろいろな大きさに変え，その都度，A，B の初速を 0 として実験したときの A，B の運動を調べよう．重力加速度の大きさを g とする.

[4]問 4 の答：$a_A = \frac{1}{2}a_B = \frac{2m_B - m_A}{m_A + 4m_B}g, T_A = 2T_B = \frac{6m_A m_B}{m_A + 4m_B}g$

①**力の拾い出し**：A，B に働く力は図 2.18 のようになる．A，B 別々にそこに働く力を拾っているので，基本力である地上の重力もそれぞれの質量に応じて別々に表示する．系外から加える力 N の大きさによって，R_{AB} は静止摩擦力となる場合も，動摩擦力となる場合もあるが，摩擦力の向きは N を加える物体やこの力の向きを変えない限り，A は運動を妨害されるから図で左向き，B には A に引きずられる形となるので右向きである．AB 間の垂直抗力 N_{AB} もそうであるが，R_{AB} も互いに作用・反作用の関係を満たしている．B は C にも接しているが，BC 間では摩擦が無視できるので垂直抗力 N_{BC} のみ B に上向きに働く．

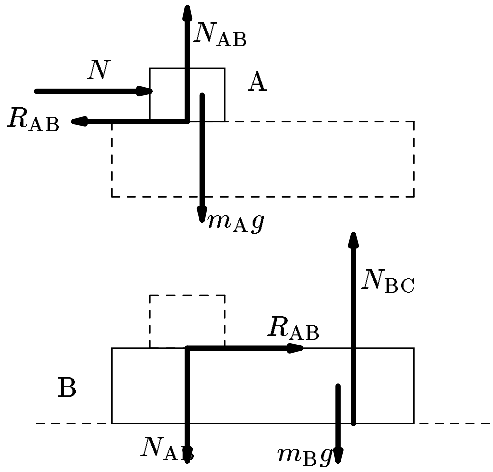

図 2.18: A，B に働く力

②**束縛条件の式を作る**：水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸の正方向を選ぶ．A，B とも x 方向にのみ移動することは，自明であろう．A が B から飛び出す場合は，今は考えない．A，B の速度，加速度を v_{A},v_{B};　a_{A},a_{B} とおくことにする．束縛条件は

ⓐ R_{AB} が静止摩擦力のとき；$v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{A}}$,　$a_{\mathrm{B}} = a_{\mathrm{A}}$

ⓑ R_{AB} が動摩擦力のとき；$v_{\mathrm{B}} \neq v_{\mathrm{A}}$,　$a_{\mathrm{B}} \neq a_{\mathrm{A}}$

つまり，動摩擦力のときのときには，水平方向以外の束縛条件はなくなる．

③**運動方程式を立てる**：A，B について運動方程式を立てるのだが，静止摩擦力のときと動摩擦力のときと，別々に式を立てよう．

ⓐ R_{AB} が静止摩擦力のとき；$a_{\mathrm{B}} = a_{\mathrm{A}} = a$ とおく．

$$\mathrm{A}(x\text{ 成分}) \ :\ m_{\mathrm{A}}a = N - R_{\mathrm{AB}} \tag{2.63}$$

$$\mathrm{A}(y\text{ 成分}) \ :\ 0 = N_{\mathrm{AB}} - m_{\mathrm{A}}g \tag{2.64}$$

$$\mathrm{B}(x\text{ 成分}) \ :\ m_{\mathrm{B}}a = R_{\mathrm{AB}} \tag{2.65}$$

$$\mathrm{B}(y\text{ 成分}) \ :\ 0 = N_{\mathrm{BC}} - N_{\mathrm{AB}} - m_{\mathrm{B}}g \tag{2.66}$$

ⓑ R_{AB} が動摩擦力のとき；摩擦の法則 (2.30) 式より，$R_{\mathrm{AB}} = \mu N_{\mathrm{AB}}$ とおくことができる．A，B の y 成分の式は変わらないから，x 成分の式のみ立てる．

$$\mathrm{A}(x\text{ 成分}) \ :\ m_{\mathrm{A}}a_{\mathrm{A}} = N - \mu N_{\mathrm{AB}} \tag{2.67}$$

$$\mathrm{B}(x\text{ 成分}) \ :\ m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{B}} = \mu N_{\mathrm{AB}} \tag{2.68}$$

④**加速度と現象論的な力の決定**：

ⓐ R_{AB} が静止摩擦力のとき；(2.63)+(2.65) を辺々実行すると，

$$(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})a = N \tag{2.69}$$

この式は，AB を一体と見なしたときの運動方程式で，結局，加速度は「押す力」N によって定まり，

$$a = \underline{\underline{\frac{N}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}}}} \tag{2.70}$$

となる．N 以外の垂直抗力は (2.64)，(2.66) 式より，

$$N_\mathrm{AB} = \underline{\underline{m_\mathrm{A} g}} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned} N_\mathrm{BC} &= N_\mathrm{AB} + m_\mathrm{B} g \\ &= \underline{\underline{(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})g}} \end{aligned} \tag{2.72}$$

また，静止摩擦力は，(2.65)，(2.71) 式より，

$$R_\mathrm{AB} = m_\mathrm{B} a = \underline{\underline{\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} N}} \tag{2.73}$$

と，あくまでも「押す力」に比例して大きくなるのであるが，摩擦の法則 (2.29) 式より，$R_\mathrm{AB} < \mu_0 N_\mathrm{AB}$．(2.70) 式を代入して，

$$R_\mathrm{AB} < \mu_0 m_\mathrm{A} g \tag{2.74}$$

(2.71)，(2.73) 式より，

$$\frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} N < \mu_0 m_\mathrm{A} g$$

したがって，

$$N < \frac{m_\mathrm{A}(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})}{m_\mathrm{B}} \mu_0 g$$

の条件が満たされていることが，AB が一体となって動く条件である．それ以上 N を大きくすると，B は A からずれた動きを始める．

ⓑ R_AB が動摩擦力のとき；つまり,「押す力」が大きく

$$N \leqq \frac{m_\mathrm{A}(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})}{m_\mathrm{B}} \mu_0 g$$

の条件が満たされているとき，(2.71) 式より，動摩擦力の大きさは

$$R_\mathrm{AB} = \underline{\underline{\mu m_\mathrm{A} g}} \tag{2.75}$$

と決まっている．これは，静止摩擦力の性質とかなり異なる．この値と (2.67)，(2.68) 式から，A，B の加速度は，それぞれ，

$$a_\mathrm{A} = \underline{\underline{\frac{N}{m_\mathrm{A}} - \mu g}}, \quad a_\mathrm{B} = \underline{\underline{\frac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}} \mu g}}$$

⑤**初期条件を書き出す**：座標原点 O を $t=0$ のときの A の位置 $x_A=0$，そして，板 B の位置を左端で測るとして $x_B=0$ とする．初速は $v_A=v_B=0$ である．これを用いれば，ⓐ，ⓑ それぞれのときの等加速度運動の速度，位置は計算できる．

⑥**ヘルムホルツの方法を用いる**：この系では，力学的エネルギー保存則は成り立たないが，ヘルムホルツの変形を実行すれば，エネルギーの収支関係を見ることはできる．

ⓐ R_{AB} が静止摩擦力のとき；(2.69) 式の両辺に A，B の速度 v を掛ける．（右辺は，$\dfrac{dx}{dt}$ を掛ける．ただし，x は，一体となって動く AB の座標である．）また，$a=\dfrac{dv}{dt}$ も使う．

$$(m_A+m_B)v\frac{dv}{dt}=N\frac{dx}{dt}$$

両辺を t で積分すると，左辺は v の，右辺は x の積分になる．ここで，左辺は 0~ v の，右辺は 0~ x の定積分とする．

$$(m_A+m_B)\int_0^v vdv=N\int_0^x 1dx$$

$N=$const. に注意せよ．結局，

$$\frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2-0=Nx \tag{2.76}$$

右辺は「押す力」N の仕事で，この分が A，B の運動エネルギーの（ 0 からの) 増加になっている．

ⓑ R_{AB} が動摩擦力のとき；(2.67) 式に v_A （右辺は $\dfrac{dx_A}{dt}$），(2.68) 式に v_A （右辺は $\dfrac{dx_A}{dt}$）を掛けて加える．

$$m_Av_A\frac{dv_A}{dt}+m_Bv_B\frac{dv_B}{dt}=(N-\mu N_{AB})\frac{dx_A}{dt}+\mu N_{AB}\frac{dx_B}{dt}$$

それ以降の計算は詳しく繰り返さなくてもよいであろう．(2.71) 式より，$N_A=m_Ag$ である．結果として，

$$\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2-0=Nx_A-\mu m_Ag(x_A-x_B) \tag{2.77}$$

B は A より左にずれるから，$x_A>x_B$ であり，右辺の第 2 項は負である．つまり，AB の系で動摩擦力は合計，負の仕事をする．この場合には，右辺の第 1 項「押す力」N の仕事は 100% 運動エネルギーには使われていない．右辺第 2 項の分だけ系から失われている．

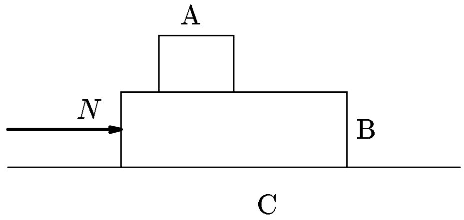

図 2.19: 摩擦力が働く場合

問 5 水平で滑らかな（摩擦が無視できる）床 C の上に質量 m_B の十分長い板 B を置き，B の上に質量 m_A の小さい物体

A を板 B の左端に乗せる．A と B との間の 静止摩擦係数は μ_0，動摩擦係数は μ とする．図 2.19 のように，B に右向きに水平な力 N を加え，A，B の初速を 0 から動かしたとき， A が B からずれる最小の N を求めよ．また，この値より大きな N を加えてたとき，AB 間が初めの位置から距離 l だけずれるまでに，AB の系から失われたエネルギーはいくらか．ただし，重力加速度の大きさを g とする．[5]

★　フックの法則

張力の説明の項で固体をある断面で A，B の部分に分けたとき，A の原子と B の原子間に働く引力の総合を考えた．そして，$\boxed{\text{例 3}}$，$\boxed{\text{例 4}}$ で見たように，張力の値は運動方程式にしたがうある一定値となった．図 2.4 の原子間のポテンシャルを見ると，原子間の力が近距離の斥力からやや距離が離れた所の引力の間に，なだらかに斥力から引力に変わる点がある．この距離が原子のつりあいの距離で，自然の状態では各原子は平均的にはつりあいの位置に配列しているのである．固体に引く力を加えると，原子間の距離は平均的につりあいの位置から長くなる方へずれる．全体に引力が生じるのはこのためである．$\boxed{\text{例 3}}$，$\boxed{\text{例 4}}$ では，糸がこの状態のを保ちながら全体が運動する様子を考えたのである．そして，糸の場合はたるんでしまうので考えられないが，硬い物体に押す力を加えれば原子間の距離は平均的につりあいの位置から短くなる方へずれる．全体に斥力も同様に生じるのである．これらの力は外から加えていた力を取り去れば，元のつりあいの位置に戻る傾向がある．固体のこの性質を**弾性**という．この性質はもちろん，加えた力が固体を破壊したり，固体内の原子の配列を変えてしまう程強くないことが前提である．加える力があまり大きくない範囲内では

「変形の大きさは，外から加える力の大きさに比例する．」

これを**フックの法則**と言う．簡単な変形の場合として，固体の伸び縮みを問題とする．図 2.20 のように，一端を固定し他端に外からの力 f を加えたとき，固体をこの力に垂直な任意の断面によって A，B の部分に分けて考え，A は元の長さ l_1 に対して長さの変形 Δx_1，B は元の長さ l_2 に対して長さの変形 Δx_2 をしたとする．ここでは伸びは正，縮みは負で表すことにする．A，B に働く力を，図 2.21 に示す．ここでは，$f > 0$ として考えることにしよう．まず，固定された A の左端には，大

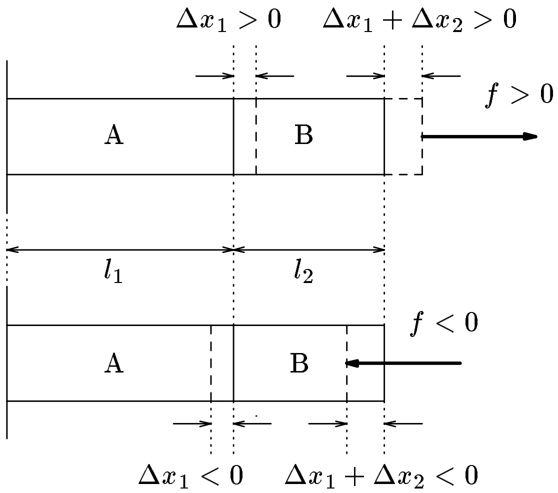

図 2.20: 伸び・縮みの変形

[5]問 5 の答：$N = \mu_0(m_A + m_B)g, \quad \mu m_A g l$

きさ f で B の右端に作用している力と逆向きの力が働く．そうでなければ，AB はつりあって静止していることはできない．
A の右端にはフックの法則に従い，B の長さの変形を比で表した $\dfrac{\Delta x_2}{l_2}$ に比例した張力が働く．比例定数を K とおく．B の右端には外からの力 f が右向きに働き，左端には A の長さの変形を比で表した $\dfrac{\Delta x_1}{l_1}$ に比例した張力が働く．A，B についてのつりあいの条件と作用 · 反作用の法則より，

$$f = K\frac{\Delta x_1}{l_1} = K\frac{\Delta x_2}{l_2}$$

固体をもっと多くの部分に，例えば n 個の部分に，分けた場合も同様な関係が成り立つ．各部分の元の長さ $l_1, l_2, \cdots, l_n$ に対して伸び $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$．全体の元の長さ

$$l = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$$

全体の伸び

$$x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n$$

とおくと，比の関係から，

$$K\frac{\Delta x_1}{l_1} = K\frac{\Delta x_2}{l_2} = \cdots = K\frac{\Delta x_n}{l_n} = K\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n}{l_1 + l_2 + \cdots + l_n} = K\frac{x}{l}$$

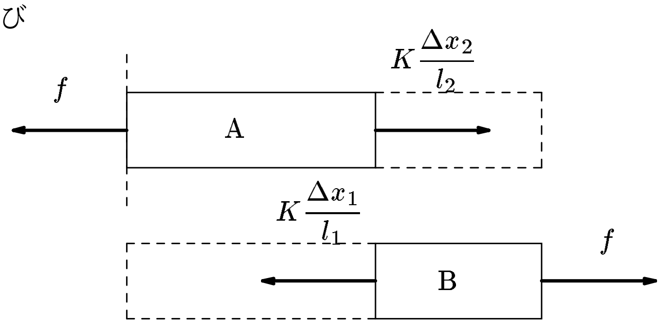

図 2.21: 各部分に働く力

となっていることが分かる．ここで，あらためて，$\dfrac{K}{l} = k$ と表すことにすると，固体の端に結び付けられた物体には，固体の長さの変形 x（$x > 0$ を伸び，$x < 0$ を縮みとする.）に応じて，

$$-kx \tag{2.78}$$

($-kx < 0$ のとき；引力,
$-kx > 0$ のとき；斥力)

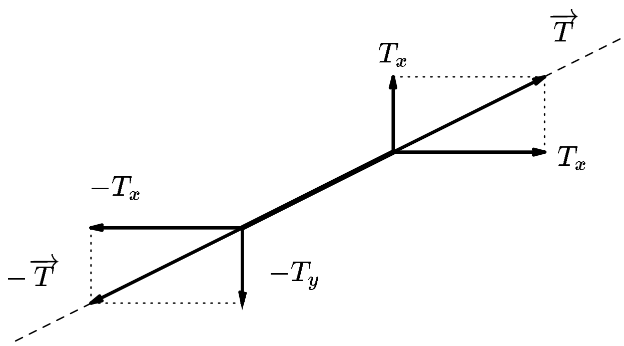

図 2.22: ばねの部分

が作用すると結論づけられる．この力を**弾性力**，[6]k を**弾性定数**と呼ぶ．注意すべきことは，この項では変形物体の運動を議論しようとしているのではないと言うことである．何故な

[6]「復元力」は不採用.

らば，大きさや変形を考慮しなければならない物体は，最早，粒子として取り扱うことができないからである．ここでは，質量の無視できる変形物体を他に力を伝達するものとしてのみ取り扱う．例としてよく取り上げられるのが「ばね」である．ばね全体としての伸び・縮みは，ばねを構成している金属線の方向とは異なるが，問題を単純化して金属線の変形は伸び・縮みのみと考えると，図 2.22 のように，例えば金属線の伸びはある部分の両端に互いに反対向きの張力（大きさ T）となって現われるが，伸びや張力のばねに垂直な成分は，この平面内で放射状にいろいろな方向を向くので平均的に 0 とみなせる．結局，ばねの中心線に沿った成分の伸び・縮みとばねの両端に結びつけられた物体に働く力が全体として比例するという関係が得られる．しかもばねの長さに対して金属線が巻いている長さはかなり長いので，結び付けられた物体は，固体の棒に結んだ場合よりも，はるかに大きな変位をする．そういう訳で,「ばね」は力学実験に適切な素材となるのである．

例 6 図 2.23 のように，摩擦が無視できる水平な床の上に質量の無視できるばねを置き，その一端を固定し他端に質量 m のおもりを結び付ける．ばねが自然の長さから床に沿って A だけ伸びた位置におもりを持って行き，静かに放したときの物体の運動を調べよう．ただし，ばねの弾性定数を k とする．

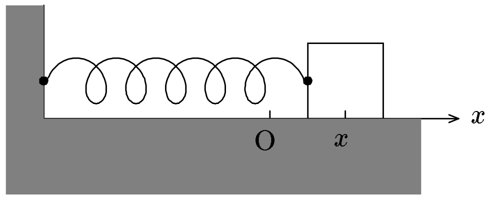

図 2.23: 弾性力による運動

①**力の拾い出し**：ここでは，運動に直接関係する水平方向のみ考えて行こう．弾性力は座標によって関数形が定数だけ違ってくるから，まず，座標を定める．図のように，ばねが自然の長さのときのおもりの位置を原点 O，水平右向きを x 軸の正方向とする．そうすれば，$x > 0$ をばねの伸び，$x < 0$ を縮みとすることができ，おもりが任意の位置 x にいるとき働く力は $-kx$ である．

②**運動方程式を立てる**：おもりの加速度を a とおくと，運動方程式（x 成分）は，

$$ma = -kx \tag{2.79}$$

となる．加速度は $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ であるから，運動方程式を解くということは，微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

の解を求めることとなる．しかし，この作業は数学の単元 II 極限構造の中で 微分方程式を習ってからやることにする．ここでは，別の方法を考える．

③**初期条件を書き出す**： 静かに放したときの時刻を $t = 0$ とする．

初期条件：$t = 0$ のとき,$x = A$,$v = 0$

④**ヘルムホルツの方法を用いる**：(2.79) 式の両辺に速度 v を掛ける.（右辺は，$\dfrac{dx}{dt}$ を掛ける.）また，$a = \dfrac{dv}{dt}$ も使う.

$$mv\frac{dv}{dt} = -kx\frac{dx}{dt}$$

両辺を t で積分すると，左辺は v の，右辺は x の積分になる．ここで，左辺は 0∼ v の，右辺は A∼ x の定積分とする.

$$m\int_0^v vdv = -k\int_A^x xdx$$

積分を実行すると，

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kA^2$$

移項すれば，エネルギー保存則：

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{2.80}$$

が得られる．ここで，

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.81}$$

は，基準点を $x = 0$ (ばねが自然の長さのときの物体の位置) とする**弾性力のポテンシャル**である．(図 2.4 の原子間の力のポテンシャルのつりあいの位置付近は，つりあいの点を平行移動して原点に持って来れば，近似的にこの形をしているのである.）

(2.80) 式の形のエネルギー保存則を満たすようなおもりの位置 x と速度 v を求めるために，xy 座標による楕円の方程式：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

と，楕円のパラメーター θ による表示：

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta$$

を使う．$\dfrac{k}{m} = \omega^2$ とおいて，(2.80) 式と書き直すと，

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(\omega A)^2} = 1$$

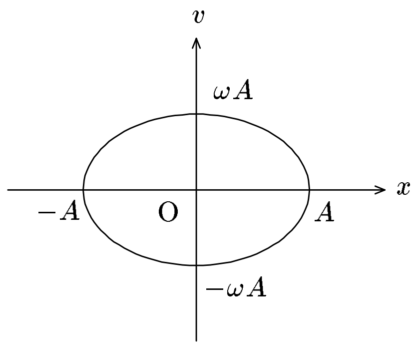

図 2.24: $x - v$ 図

となる．この式のグラフは横軸を x，縦軸を v にとったときの楕円となる．図 2.24 に示すように，楕円の長短の半径は，それぞれ，A,ωA である.（どちらが長いなどとは言えな

いが.）また，このグラフのパラメーター表示において，θ は物理的には，時刻 t に関係する．初期条件から，$t=0$ のとき，$x=A\cos 0=A$,　$v=\omega\sin 0=0$ となり，そこを出発点として時間が経つと楕円上を時計周りに一周する位置 x と速度 v の変化をすることは，実際のおもりの運動が次のように観測されることと一致する．(i) 最大の伸び A で静止から左向きの速さを得て行く．(ii) ばねが自然の長さとなったとき，左向きの最大の速さとなる．(iii) その後，減速して行き最大の縮み $|-A|$ でいったん静止した後，今度は右向きの速さを得て行く．(iv) ばねが再び自然の長さとなったとき，今度は右向きの最大の速さとなる．(v) 最大の伸び A の点の初めの位置に戻るが，以降，同じ運動を同じ周期で繰り返す．このような運動を**調和振動**と呼ぶ．[7]そこで $\theta=\omega t$ とおけば，

$$x=A\cos\omega t \tag{2.82}$$

振動の周期 T は $x=A\cos 2\pi=A\cos\omega T$ より，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.83}$$

また，楕円の式より，

$$v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}=\pm\omega A\sin\omega t$$

であるが，$\omega t<\pi$ のとき $v<0$ となるはずであるから，

$$v=-\omega Asin\omega t \tag{2.84}$$

となる．[8]これらの解は，初期条件が違えばもちろん違う．さらに，加速度は，運動方程式 (2.80) を変形して

$$a=\frac{k}{m}x=-\omega^2 x=-\omega^2 A\cos\omega t$$

$a-t$,$v-t$,$x-t$ のグラフの関係から，これを確かめることもできる．

問 6 図 2.25 のように，弾性定数 k，質量の無視できるばねの一端を天井に固定し，他端に質量 m のおもりをつるす．重力加速度の大きさを g とする．

ばねが自然の長さとなるようにおもりを支えておいて，静かに放した．

(1) 振動の周期を求めよ．

(2) 振動の中心の位置はどこにあるか．この点を原点 O としたとき，弾性力と重力の合力のポテンシャルが $\frac{1}{2}kx^2$ と表されることを示せ．

(3) 振幅を求めよ．[9]

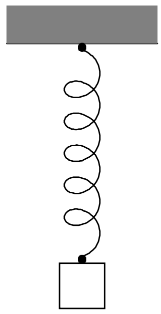

図 2.25: 鉛直につるしたばね

[7]「単振動」は訳語として良くない．

[8] $v=\frac{dx}{dt}=A\frac{d}{dt}\cos\omega t=-\omega A\sin\omega t$ 等はまだ使えない．

[9]問 6 の答：(1)$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$,(2) 自然長より $\frac{mg}{k}$ 下．証明略．(3) $\frac{mg}{k}$