第2章 力の法則

2–1　相互作用の性質

≪ この項で学ぶこと ≫
[**弾性衝突，ポテンシャル，保存力，**]

★　弾性衝突

前章 1-2 で運動方程式を導入したときには,「力」は粒子の運動量の時間変化を引き起こすための外界の影響という以外は何もはっきりした実体は明らかではなかった．1-3 で 2 粒子 A，B のみの閉じた系を考えたとき，力の発生源は A，B 以外に考えられず，運動の第 3 法則による作用・反作用の関係を満たす A，B 間の「相互作用」という姿が浮かび上がって来た．この節では，この相互作用の性質についてさらに詳しく考察する．

ここでもしばらくは，粒子 A，B のみが存在し，これらが直線上のみを運動する場合，すなわち，閉じた系における 1 次元の 2 体運動に限定して見て行こう．この系で運動量保存則が成り立つ理由は，作用・反作用の関係により B から A に作用する力積と A から B に作用する力積の和が打ち消し合い，その他の力積は存在しないからであった．しかし，A，B 間の「力積」の総和が 0 となっても， A，B 間の「仕事」の総和が 0 となるとは限らない．I-1-2 で運動方程式の積分形 (2) で考察した「運動エネルギーの変化イコール仕事」の式を，粒子 A，B が，それぞれほんのわずか位置を移動した，すなわち，A，B が微小変位 Δx_{A}， Δx_{B} をした場合について立てよう．その間の A，B の速度の変化もわず

かであるとして，A，B の運動エネルギーの微小変化を ΔK_{A}，　ΔK_{B} とおく．またその間，A，B 間の相互作用はほとんど変化せず，ほぼ一定と見なせるとし，

$$f_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = -f, \quad f_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = f$$

とする．

$$\begin{cases} \mathrm{A} : \Delta K_{\mathrm{A}} = -f\Delta x_{\mathrm{A}} & (2.1) \\ \mathrm{B} : \Delta K_{\mathrm{B}} = f\Delta x_{\mathrm{B}} & (2.2) \end{cases}$$

一般には $\Delta x_{\mathrm{B}} \neq \Delta x_{\mathrm{A}}$ であるから，閉じた系であるからといって (1)，(2) 式の右辺の和は 0 とはならないのである．

ここで，図 2.1 のように A，B をゴムボールの衝突の場合と考えると具体的に考えられるであろう．図の ① でボールは初めて接触し（力が作用し始めて），③ でボールは離れ出す（力の作用が終了した），と考える．一般論としては，ボール A，B の質量中心に位置する粒子には，両ボールの半径の和で表されている距離以内に近づいたときのみ力が働き，それ以上離れると力が働かなくなるという場合である.① から ③ までの微小変位においては，ボールが元の位置に戻ったと考えると，

$$\Delta x_{\mathrm{B}} = \Delta x_{\mathrm{A}}$$

が成り立ち，この場合には (2.1)，(2.2) 式の右辺の仕事の和は 0 となる．しかし，衝突の際ボールは ② のように一時的に変形するであろうから，① から ② までの微小変位 $\Delta x'_{\mathrm{A}}$，　$\Delta x'_{\mathrm{B}}$ の間では，

$$\Delta x'_{\mathrm{B}} \neq \Delta x'_{\mathrm{A}}$$

となる．これは一般論では，2 粒子がより近づいただけのことである．後者の場合については次の項で考察する．

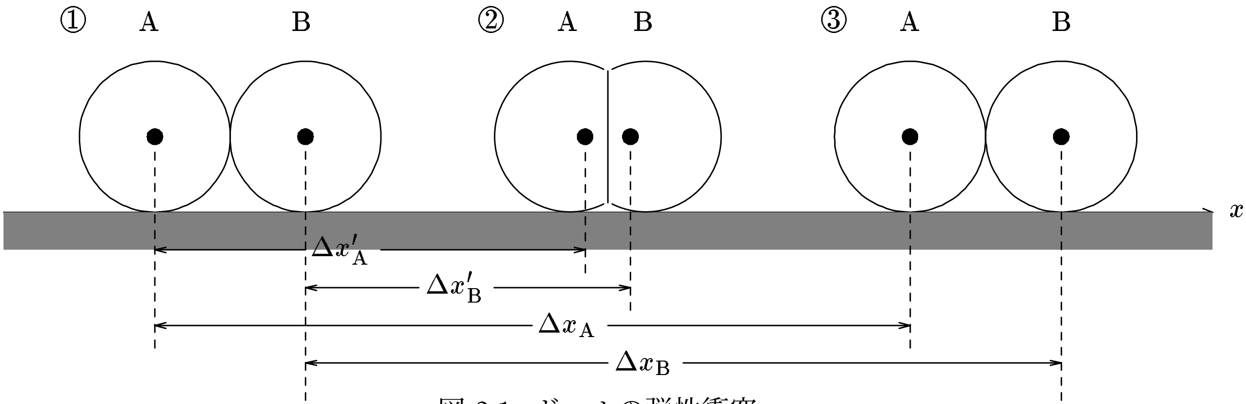

図 2.1: ボールの弾性衝突

例 1 $\Delta x_{\mathrm{B}} = \Delta x_{\mathrm{A}}$ が成り立つ場合，ボール（2 粒子）は「**弾性衝突**した」と言う．このとき (2.1)+(2.2) を辺々実行すると

$$\Delta K_{\mathrm{A}} + \Delta K_{\mathrm{B}} = 0$$

つまり，衝突前と衝突後の A，B の運動エネルギーの和は変化しない．

A，B の質量を m_{A}， m_{B}．衝突前の速度を v_{A1}， v_{B1}，衝突後の速度を v_{A2}， v_{B2} とおくと，

$$\begin{cases} \Delta K_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A2}}^2 - \dfrac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A1}}^2 \\ \Delta K_{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B2}}^2 - \dfrac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{B1}}^2 \end{cases}$$

$\Delta K_{\mathrm{A}} + \Delta K_{\mathrm{B}} = 0$ にこれらを代入して，少し整理すれば，

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A2}}^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B2}}^2 = \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A1}}^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B1}}^2 \tag{2.4}$$

すなわち,「弾性衝突においては，運動エネルギーの保存則が成り立つ.」

一方，この系では運動量保存則も成り立つから，

$$m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A2}} + m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B2}} = m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A1}} + m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B1}} \tag{2.5}$$

ここで，A，B の質量 m_{A},m_{B} と衝突前の速度 v_{A1},v_{B1} が与えられていたとすると，(2.4) 式を変形して，

$$m_{\mathrm{A}}(v_{\mathrm{A2}} - v_{\mathrm{A1}}) = m_{\mathrm{B}}(v_{\mathrm{B1}} - v_{\mathrm{B2}}) \tag{2.6}$$

(2.3) 式を変形して，

$$m_{\mathrm{A}}(v_{\mathrm{A2}}^2 - v_{\mathrm{A1}}^2) = m_{\mathrm{B}}(v_{\mathrm{B1}}^2 - v_{\mathrm{B2}}^2) \tag{2.7}$$

(2.6) 式を (2.5) 式で辺々割ると，

$$\begin{aligned} &v_{\mathrm{A1}} + v_{\mathrm{A2}} = v_{\mathrm{B1}} + v_{\mathrm{B2}}, \\ &v_{\mathrm{B2}} = v_{\mathrm{A1}} + v_{\mathrm{A2}} - v_{\mathrm{B1}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

(2.4) 式に (2.7) 式を代入して，少し計算すると，

$$v_{\mathrm{A2}} = \frac{(m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}})v_{\mathrm{A1}} + 2m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B1}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} \tag{2.9}$$

(2.3),(2.4) 式は A を B と書き換え，同時に B を A に書き換えても，変わらないから，(2.8) 式で A，B を入れ替えても成り立つ.

$$v_{\mathrm{B2}} = \frac{(m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{A}})v_{\mathrm{B1}} + 2m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A1}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} \tag{2.10}$$

(2.8),(2.9) 式が，衝突後の A，B の速度の解である．

問 1 A，B が等質量のとき，静止する B に A が初速度 v_0 で弾性衝突をした．衝突後の A，B の速度 v_A,v_B が，v_0 と同一直線上を動くとき，これらを求めよ．[1]

★　ポテンシャル

次に，$\Delta x_B \neq \Delta x_A$ の場合を考察しよう．例えば，図 2.1 の ③ の場合のように A，B 間の力の作用がこれ以後なくなってしまうのではなく．② の場合のように力はしばらく作用し続けているときを考える．

(2.1),(2.2) 式を辺々加えると，

$$\Delta K_A + \Delta K_B = -f(\Delta x_A - \Delta x_B) \tag{2.11}$$

この関係式は，A，B の閉じた系には．A，B の運動エネルギー K_A,K_B 以外にもエネルギーの担い手が存在することを示している．このエネルギーは，A，B の座標 x_A,x_B の関数であるから，これを

$$U(x_A,x_B)$$

と表し，A，B 間の相互作用の**ポテンシャル**と呼び，しばらくこれが何を意味するか見て行こう．ポテンシャル U[2]の微小変化が，

$$\Delta U(x_A,x_B) = f(\Delta x_A - \Delta x_B) \tag{2.12}$$

であると定めると．[3](2.10) 式は

$$\Delta K_A + \Delta K_B = -\Delta U(x_A,x_B)$$

すなわち，

$$\Delta K_A + \Delta K_B + \Delta U(x_A,x_B) = 0 \tag{2.13}$$

ここで，粒子 A，B の位置が，それぞれ x_{A1},x_{B1} にあるときの運動エネルギーの値が K_{A1} ,K_{B1}， ポテンシャルの値が $U(x_{A1},x_{B1}) = U_1$， また， x_{A2},x_{B2} にあるときの運動エネルギーの値が K_{A2},K_{B2}， ポテンシャルの値が $U(x_{A2},x_{B2}) = U_2$ にあるとすると，運動エネルギーの変化は $\Delta K_A + \Delta K_B = (K_{A2} + K_{B2}) - (K_{A1} + K_{B1})$，ポテンシャルの変化は $\Delta U(x_A,x_B) = U(x_{A2},x_{B2}) - U(x_{A1},x_{B1}) = U_2 - U_1$ と表されるから，(2.12) 式にこれを代入して，左辺に変化後の各量，右辺に変化前の各量を書くようにすると，

$$K_{A2} + K_{B2} + U_2 = K_{A1} + K_{B1} + U_1$$

[1]問 1 の答：$v_A = 0,v_B = v_0$

[2]このように略記する．

[3]左辺は $U = 0$ からの微小変位をとってある．しかし，積分定数については後述．

あるいは，運動エネルギーについて前項のときのような具体的な形とすると，

$$\frac{1}{2}m_{\rm A}v_{\rm A2}^2+\frac{1}{2}m_{\rm B}v_{\rm B2}^2+U(x_{\rm A2},x_{\rm B2})=\frac{1}{2}m_{\rm A}v_{\rm A1}^2+\frac{1}{2}m_{\rm B}v_{\rm B1}^2+U(x_{\rm A1},x_{\rm B1}) \tag{2.14}$$

運動エネルギーとポテンシャルの和を「**力学的エネルギー**」と呼ぶ.

「閉じた系では，運動エネルギーとポテンシャルの和は一定である.」

この関係を**力学的エネルギー保存則**と言う.

ここで注意すべきことは，$U(x_{\rm A},x_{\rm B})$ は粒子 A のみが持つエネルギーでもなく，粒子 B のみが持つエネルギーでもない，ということである．U は A，B 間の相互作用の存在のため，A，B の空間的な位置関係に関連して，系の共有物として立ち現われたものである．このことに関しては，単元 II でさらに詳しく論じられる.

例 2 B の質量が A の質量に比べて極めて大きく（$m_{\rm B}\gg m_{\rm A}$），B の変位は無視できる（$\Delta x_{\rm B}\approx 0$) 場合，ポテンシャルの約束と力学的エネルギー保存則を見てみよう．簡単にするため，$x_{\rm B}=0$ とおく.

ポテンシャルは，見かけ上 1 変数関数 $U(x_{\rm A})$ で表され，(2.11) 式は，

$$\Delta U(x_{\rm A})=f\Delta x_{\rm A} \tag{2.15}$$

(2.13) 式は，

$$\frac{1}{2}m_{\rm A}v_{\rm A2}^2+U(x_{\rm A2}) \;=\; \frac{1}{2}m_{\rm A}v_{\rm A1}^2+U(x_{\rm A1}) \tag{2.16}$$

となる．この系は,「A，B の閉じた系」として出発したが，静止し続けている B が，他の粒子 C，D，$\cdots$ と相互作用をしている場合でも成り立つ．すなわち,「B からの外力の作用を受ける A の開いた系」の場合であるにも適用できる．ただし，この場合においてもポテンシャルは <u>粒子 *A* のみが持つ</u> と考えるのは適当でない.

B が動かない場合，B から A に働く力 $f_{\rm B\to A}$ とポテンシャル U の関係は

$$f_{\rm B\to A}=-\frac{dU(x_{\rm A})}{dx_{\rm A}} \tag{2.17}$$

となる．[4] (2.14) 式より，

$$-\frac{\Delta U(x_{\rm A})}{\Delta x_{\rm A}}=-f$$

となるが，最初に $f_{\rm B\to A}=-f$ と約束してあった．$\Delta x_{\rm A}\to 0$ の極限が，(2.16) 式となる.

さて，(2.16) 式の逆演算として，数学 II-3B-2 で学ぶ不定積分

$$U(x_{\rm A})=-\int f_{\rm B\to A}dx_{\rm A}+C$$

[4] $U(x_{\rm A},x_{\rm B})$ の場合，$f_{\rm B\to A}=-\dfrac{\partial U}{\partial x_{\rm A}}, f_{\rm A\to B}=-\dfrac{\partial U}{\partial x_{\rm B}}$. 偏微分を避けている.

が出てくるが，ポテンシャルは積分定数 C が 0 となるように定義する．以下，$x_{\rm A} = x$，$f_{\rm B\to A} = f(x)$ と記すことにして，これを定積分の形で表せば，

$$U(x) = -\int_{x_{\rm S}}^{x} f(x)dx \tag{2.18}$$

ただし，$U(x_{\rm S}) = 0$ となる座標 $x = x_{\rm S}$ をポテンシャルの**基準点**と呼ぶ．

問 2 例 2 の場合で，力学的エネルギーが E で与えられた場合，A の速度の最大値を求めよ．[5]

[**参考**]

★　保存力

力 $\boldsymbol{f}$ が作用して，粒子が位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ で表されるある点から，$\boldsymbol{r}_2$ で表される別の点に移動するとき，力 $\boldsymbol{f}$ のする仕事 $W_{\boldsymbol{r}_1\to\boldsymbol{r}_2}$ は

$$W_{\boldsymbol{r}_1\to\boldsymbol{r}_2} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{2.19}$$

で表されることを，1-2 の [**参考**] の所で示した．しかし，最も一般的な「仕事」の内容は，高校で習う積分の意味を超えている．極限構造 II-3B-1 で学ぶ定積分は x 軸上，あるいは，y 軸上で実行されるものであるのに対して，仕事の計量で見る粒子の移動径路は，点 $\boldsymbol{r}_1$ から点 $\boldsymbol{r}_2$ に至る直線とは限らず，始点が $\boldsymbol{r}_1$ で終点が $\boldsymbol{r}_2$ となる径路は，図 2.2 の a，b，$\cdots$ 等，いろいろ考えられる．

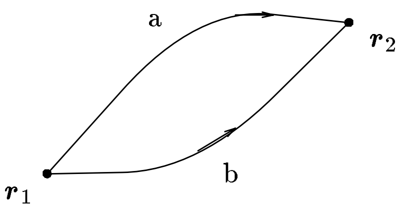

図 2.2: 粒子の移動径路

「力 $\boldsymbol{f}$ のする仕事は，一般に粒子のたどる径路に依存する.」**例 3** 平面上で力 $\boldsymbol{f}$ の方向がつねに x 軸を向き，その大きさが粒子の位置の y 座標に比例する，すなわち，k を定数として，

[5]**問 2 の答**：$\sqrt{\dfrac{2E}{m_{\rm A}}}$

$$\boldsymbol{f} = (ky, 0)$$

で与えらるとき，[6]原点 O を出発した粒子が，図 2.3 のように，O→X(1,0)→P(1,1) をたどる径路 a と，O→Y(0,1)→P(1,1) をたどる径路 b のそれぞれについて $\boldsymbol{f}$ のする仕事を求めよう．

径路 a をたどる仕事 W_{a} は，O→X では $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ であり，
X→P では $\overrightarrow{\mathrm{XP}} \perp \boldsymbol{f}$ であるから，どちらの径路の間の仕事
も 0 である．

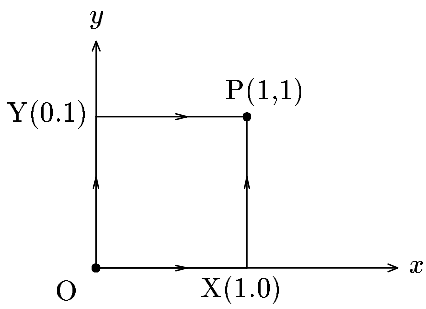

図 2.3: 粒子の移動径路

$$W_{\mathrm{a}} = 0$$

一方，径路 b をたどる仕事 W_{b} は，O→ Y では $\overrightarrow{\mathrm{OY}} \perp$
$\boldsymbol{f}$ でありその間の仕事は 0 であるが，$y = 1$ だから Y→P では $\boldsymbol{f} = (k, 0)$，したがって，

$$W_{\mathrm{b}} = k \times 1 = \underline{\underline{k}}$$

となる．

この力は径路によって，その仕事が異なる一例である．

問 3 x 軸上を原点 O と点 P（$x = a$）の間を移動する粒子に，

$$\begin{cases} \text{粒子が } x \text{ 軸の正方向に移動する場合には} & -f \text{ の力が，} \\ \text{粒子が } x \text{ 軸の正方向に移動する場合には} & +f \text{ の力が，} \end{cases}$$

が，それぞれ作用する場合，粒子が 1 往復する仕事 W_1 と， 2 往復する仕事 W_2 を求めよ．[7]

しかしながら，自然界の多くの基本的な力は，粒子がある点を出発し閉じた径路を一周して元に戻るとき，その力のする仕事が 0 となる性質を持っている．このことは，後に II–3–1 で習う「場に関する循環の法則」に関連する．この性質を持つ力を「**保存力**」と呼び，この性質を満たさない力を 「**非保存力**」と言う．

保存力のする仕事は，始点 $\boldsymbol{r}_1$ と終点 $\boldsymbol{r}_2$ で決まり,途中の径路によらない. 何故かと言うと，例えば，粒子が点 $\boldsymbol{r}_1$ から径路 a をたどり点 $\boldsymbol{r}_2$ 仕事を $W_{\boldsymbol{r}_1 \to (a) \to \boldsymbol{r}_2}$ と記すことにすると，

① 保存力の性質により，図 2.2 で点 $\boldsymbol{r}_1$ から径路 a をたどり点 $\boldsymbol{r}_2$ に達し，点 $\boldsymbol{r}_2$ から径路 b をたどり点 $\boldsymbol{r}_1$ に戻る仕事は 0 であるから，

$$W_{\boldsymbol{r}_1 \to (a) \to \boldsymbol{r}_2} + W_{\boldsymbol{r}_2 \to (b) \to \boldsymbol{r}_1} = 0$$

[6]そもそも，こんな形の力が存在するかどうかは，まだ問わないことにする．
[7]**問 2 の答**：$W_1 = -2fa, W_2 = -4fa$

② 同じ径路をたどるが，始点と終点を入れ換えたときの保存力のする仕事は，力の大きさと向きは同じで，粒子の移動方向のみ逆転するから（問 3 のような力は保存力ではないから，これを満たさない.），仕事の符号が逆転する.

$$W_{\boldsymbol{r}_2\to(b)\to\boldsymbol{r}_1} = -W_{\boldsymbol{r}_1\to(b)\to\boldsymbol{r}_2}$$

① と ② を使うと，

$$W_{\boldsymbol{r}_1\to(a)\to\boldsymbol{r}_2} = -W_{\boldsymbol{r}_2\to(b)\to\boldsymbol{r}_1} = W_{\boldsymbol{r}_1\to(b)\to\boldsymbol{r}_2}$$

すなわち，径路 a をたどる仕事も 径路 b をたどる仕事も等しい．つまり，保存力の場合には，a，b などの途中の径路を指定することは無用とであり,「仕事は始点と終点のみで決定される.」

さらに，仕事は始点と終点のみで決定されることから，基準点を $\boldsymbol{r}_\mathrm{S}$ とおいて，(2.18) 式を

$$W_{\boldsymbol{r}_1\to\boldsymbol{r}_2} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{S}}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{S}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{S}}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{S}}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = -U(\boldsymbol{r}_2) + U(\boldsymbol{r}_1)$$

これは，最後の結果が $-\Delta U$（ポテンシャルの変化にマイナスを付したもの）となり，(2.14) 式の一般化である．ポテンシャルは，一般に，(2.17) 式を 3 次元に直した式

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{S}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{2.20}$$

で定義される.

非保存力はポテンシャルで表すことのできない力である.