1–3　運動量保存則

≪ この項で学ぶこと ≫
[**力学系，質量中心，運動量保存則，ニュートンの運動の第 3 法則**]

★　力学系

これまでの節では，1 粒子の問題に限って，議論してきたが，ここでは，2 つ以上の粒子がある場合の取り扱いを問題としよう．複数の特定な粒子に着目する場合，その集まりを**力学系**と呼ぶ．例えば，実験室の机上を連動して動く，2，3 個の物体を考える場合，これらの物体を力学系と考え，机や床はその外部として取り扱うと便利であろう．また，物体の構造を考慮しなければならない場合には，その物体自体が力学系と考える．

粒子 A，B，$\cdots$ からなる力学系について考える．それぞれの粒子の運動方程式は

$$\begin{cases} \mathrm{A}: & \dfrac{d\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}}}{dt} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{A}} \\ \mathrm{B}: & \dfrac{d\boldsymbol{p}_{\mathrm{B}}}{dt} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}} \\ & \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ここで，粒子 A，B，$\cdots$ の運動量を $\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{B}}, \cdots$，それぞれに作用する力を $\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}}, \cdots$ とおいた．すべての式を辺々加えると，

$$\frac{d\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{p}_{\mathrm{B}}}{dt} + \cdots = \boldsymbol{f}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}} + \cdots$$

右辺は，力学系に作用する全部の力のベクトル和である．これを $\boldsymbol{F}$ とおいておこう．

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}} + \cdots$$

左辺は，$\dfrac{d}{dt}$ でまとめると，

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{p}_{\mathrm{B}} + \cdots)$$

カッコの中は，個々の粒子の運動量のベクトル和であり，これを $\boldsymbol{P}$ とおい

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{p}_{\mathrm{B}} + \cdots \tag{1.24}$$

を，この力学系の**全運動量**と呼ぶ．$\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{F}$ を用いれば，力学系についても，運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

が成り立つことが明らかである．

★ 質量中心

前節の**★不変性**の項で，粒子の質量は時間変化しないと約束した．力学系では，粒子の出入りは考えていないので，力学系の全質量 M とおくと，

$$M = m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + \cdots = \mathrm{const.}$$

ここで，粒子 A，B，$\cdots$ の質量を m_{A},m_{B},$\cdots$ とする．

「力学系では，質量保存則が成り立っている.」

ここで，力学系の ”速度 ”$\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}$ というものを考えて，個々の粒子のときのように，

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}$$

が成り立っているとすると，

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} = \frac{\boldsymbol{P}}{M} = \frac{\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{p}_{\mathrm{B}} + \cdots}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + \cdots}$$

さらに，粒子 A，B，$\cdots$ の速度を $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$,$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$,$\cdots$ とおいて，各運動量を $\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{A}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$,$\boldsymbol{p}_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{B}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$,$\cdots$ と表すと，

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} = \frac{m_{\mathrm{A}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}} + \cdots}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + \cdots} \tag{1.25}$$

この形を見れば，力学系の ”速度 ”$\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}$ とは，力学系の中にある点を想定し，その点の移動の速度を考えていることが，見えて来る．この点を表す位置ベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}$ は，粒子 A，B，$\cdots$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$,$\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$,$\cdots$ とおくと，

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} = \frac{m_{\mathrm{A}}\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} + \cdots}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + \cdots} \tag{1.26}$$

である．何故ならば，両辺を時間微分すれば，$\dfrac{d\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}}{dt} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}$,$\dfrac{d\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}{dt}$,$\dfrac{d\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}}{dt}$,$\cdots$ だから，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}$ の関係式が得られる．このように定義された点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}$ を力学系の**質量中心**，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}$ を**質量中心の速度**と呼ぶ．質量中心のことを「重心」と呼ぶ人もいるが，ここではその用語は使わない．今まで粒子とは,「十分小さい」物体だとして来たが，物体の広がりが考えられる場合であっても，質量中心の運動を考えているだけなら，力学系も粒子も変わりはないように理論を組み立てることができるのである．

$\boxed{\textbf{例 1}}$ 図 1.5 のように，床の上に質量 m_{B} の長い板 B が置かれている．その上を初め静止していた質量 m_{A} の人 A が動き出した．A が B に対して距離 l 変位する間に，A，B は床に対してどれだけ変位するだろうか．ただし，床はとても滑らかで B の水平方向の運動を妨げることはないとする．このような場合，A，B の質量中心の位置は動かないことが分かっている．これを用いて問題を解いてみよう．

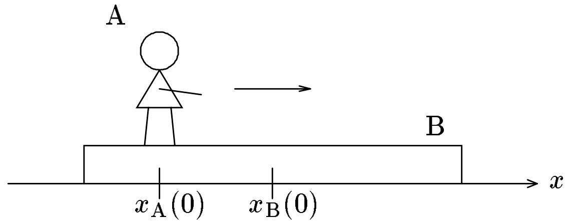

図 1.5: 板の上を歩く人

図 1.5 に，座標と初めの A と B の質量中心の位置 $x_{\mathrm{A}}(0)$,$x_{\mathrm{B}}(0)$ が付されている．A が B に対して距離 l 変位したときの A，B の座標を x_{A},x_{B} とおくと，それぞれのこの間の変位は，

$$\Delta x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{A}}(0), \quad \Delta x_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{B}}(0)$$

となる．距離 l は相対的変位であるから，

$$\Delta x_{\mathrm{A}} - \Delta x_{\mathrm{B}} = l \tag{1.27}$$

一方，質量中心の位置が変わらないことから，

$$\frac{m_{\mathrm{A}}x_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}x_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} = \frac{m_{\mathrm{A}}x_{\mathrm{A}}(0) + m_{\mathrm{B}}x_{\mathrm{B}}(0)}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$$

これを変形すると，

$$m_{\mathrm{A}}(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{A}}(0)) + m_{\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{B}}(0)) = 0$$

変位の式に直すと，

$$m_{\mathrm{A}}\Delta x_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\Delta x_{\mathrm{B}} = 0 \tag{1.28}$$

(1.27)，(1.28) 式を連立すれば，答が得られるのであるが，ここで作図的にも考えてみよう．質量中心不変ということは，A が右に動けば，B は左に動くはずだ，ということは分かっている．したがって，$\Delta x_{\mathrm{B}} < 0$ であるから，ここでは絶対値で考えよう．(1.27) 式は，

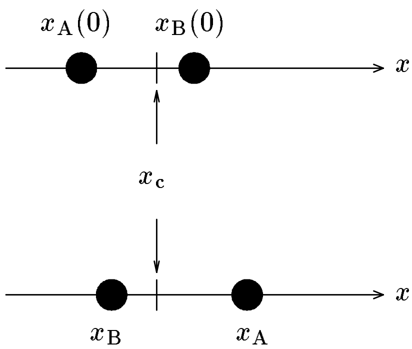

図 1.6: 質量中心不変

$$\Delta x_{\mathrm{A}} + |\Delta x_{\mathrm{B}}| = l$$

つまり，内分すべき線分の長さが l となる．
この配分比を定める式が (1.28) である．(1.28) 式を書き換えると，

$$\Delta x_{\rm A} : |\Delta x_{\rm B}| = m_{\rm B} : m_{\rm B}$$

配分比は，質量の逆比であった．ここから，

$$\Delta x_{\rm A} = \underline{\underline{\frac{m_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}}}l, \quad |\Delta x_{\rm B}| = \frac{m_{\rm A}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}l$$

となるが，第 2 式は符号を考慮して，

$$\Delta x_{\rm B} = \underline{\underline{-\frac{m_{\rm A}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}l}}$$

が答である．図 1.6 では，A，B を粒子として描いている．
問 1 質量の等しい 3 粒子 O，A，B が平面上で 図 1.7 の位置にあるとき，力学系の質量中心を求めよ．[21]

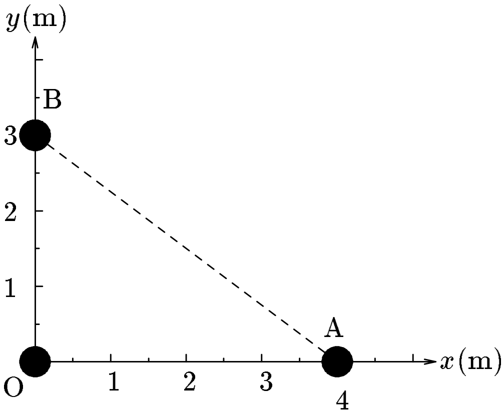

図 1.7: 等質量の 3 粒子

★ 運動量保存則

力学系に作用する全部の力のベクトル和が完全に打ち消された状態にあるとき，すなわち，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}_{\rm A} + \boldsymbol{f}_{\rm B} + \cdots = \boldsymbol{0}$$

であるとき，この力学系を**閉じた系**と呼ぶ．閉じた系においては，力学系の運動方程式が

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{0}$$

時刻 $t = t_1, t_2$ のときの力学系の全運動量が，それぞれ，$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ とすると，定積分がゼロになるということから，

$$\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{0}, \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1$$

これは，力学系の全運動量が常に変化しない，

$$\boldsymbol{P} = \text{const.}$$

[21]問 1 の答：($\frac{4}{3}$ m，1 m)

であることを意味する．すなわち，

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{A} + \boldsymbol{p}_\mathrm{B} + \cdots = \mathrm{const.} \tag{1.29}$$

「閉じた系においては，粒子の運動量の和は保存される.」

このことを「力学系に**運動量保存則**が成り立つ.」という．

例 2 運動量保存則もガリレイの相対性原理に従うことを 1 次元 2 粒子の場合に示せ．

$t=0$ のときの A．B の速度を $v_\mathrm{A}(0)$,$v_\mathrm{B}(0)$ とおく．運動量保存則は，

$$m_\mathrm{A}v_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}v_\mathrm{B} = m_\mathrm{A}v_\mathrm{A}(0) + m_\mathrm{B}v_\mathrm{B}(0)$$

この座標を K 系として，(1.1) 式で関係づけられる K' 系に移ることにする．両辺に $(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})V$ で引くと，

$$m_\mathrm{A}v_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}v_\mathrm{B} - (m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})V = m_\mathrm{A}v_\mathrm{A}(0) + m_\mathrm{B}v_\mathrm{B}(0) - (m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})V$$

まとめ直せば，

$$m_\mathrm{A}(v_\mathrm{A} - V) + m_\mathrm{B}(v_\mathrm{B} - V) = m_\mathrm{A}(v_\mathrm{A}(0) - V) + m_\mathrm{B}(v_\mathrm{B}(0) - V)$$

ところで，(1.1) 式の両辺を t で微分した式は，$v'_\mathrm{A} = v_\mathrm{A} - V$,etc. であるから，

$$m_\mathrm{A}v'_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}v'_\mathrm{B} = m_\mathrm{A}v'_\mathrm{A}(0) + m_\mathrm{B}v'_\mathrm{B}(0)$$

これは，K' 系で運動量保存則と立てたものに他ならない．

例 3 運動量保存則を用いて，例 1 を解くことにしよう．

床は B の水平方向の運動を妨げることはないと仮定しているので，A，B の系は x 軸方向には，閉じた系である．A，B の初速は共に 0 であった．A が B に対して距離 l 変位したときの A，B の速度を v_A,v_B とおくと，運動量保存則（x 成分）は，

$$m_\mathrm{A}v_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}v_\mathrm{B} = 0$$

$v_\mathrm{A} = \dfrac{dx_\mathrm{A}}{dt}$,$v_\mathrm{B} = \dfrac{dx_\mathrm{B}}{dt}$ を代入して，t で積分すれば，

$$\int_{x_\mathrm{A}(0)}^{x_\mathrm{A}(0)+\Delta x_\mathrm{A}} 1 dx_\mathrm{A} + \int_{x_\mathrm{B}(0)}^{x_\mathrm{B}(0)+\Delta x_\mathrm{B}} 1 dx_\mathrm{B} = 0$$

定積分の下限は，A，B の初めの位置，上限はこれにそれぞれの変位を加えた値にしてある．積分を実行すれば，

$$m_\mathrm{A}\Delta x_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}\Delta x_\mathrm{B} = 0$$

この式は，例 1 の (1.26) 式である．以下，(1.25) 式と組み合わせれば，解答が得られる．

問 2 質量がそれぞれ，M, m の 2 つの部分 P,Q を切り離せるようにしたロケットが，宇宙空間を速度 V_0 で飛行している．その進行方向を座標の正方向とする．しばらくして，P を Q に対して相対速度 v_{r} で打ち出すと，P は V，Q は v の速度で飛行するようになった．V, v を求めよ．[22]

★ ニュートンの運動の第 3 法則

閉じた系における各粒子が，それぞれ，無関係に自由運動しているようなつまらない問題は，取り扱う必要はない．一般に，閉じた系における全体の力が $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ ということは，各粒子に力が全く作用しないことを意味しない．2 粒子 A，B のみからなる閉じた系を考えて行こう．今まで 1 粒子の問題を考えていたとき，粒子 A に作用する力は，A 以外の外界の影響だとしたが，その影響の源には論及しなかった．2 粒子の閉じた系において，それぞれに，A，B 以外の外界の影響はやって来ない．そして，保存則が成り立つから，A が運動量を増加させたとき，B はその分だけ運動量を減少させていなければならない．この考察から A，B が相互作用をしていることが見えてくるはずである．

すなわち，閉じた系において，A に作用する力の源は B にあるから，これを $\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$ と記そう．同様に，B に作用する力の源は A にあるから，これを $\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ と記す．それぞれの運動方程式は

$$\begin{cases} \mathrm{A}: & \dfrac{d\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}}}{dt}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} \\ \mathrm{B}: & \dfrac{d\boldsymbol{p}_{\mathrm{B}}}{dt}=\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \end{cases}$$

であるが，運動量保存則が成り立っているから，

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{p}_{\mathrm{B}}=\text{const.},\quad \text{すなわち}\quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}}+\boldsymbol{p}_{\mathrm{B}})=\boldsymbol{0}$$

だから，

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}+\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}=\boldsymbol{0},\quad \text{あるいは}\quad \boldsymbol{f}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}=-\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \tag{1.30}$$

「粒子 A が粒子 B に作用する力と粒子 B が粒子 A に作用する力とは，大きさが同じで，互いに逆向きである.」

このことを，**ニュートンの運動の第 3 法則**，または，**作用・反作用の法則**という．

一般に，N 個の粒子の閉じた系においては，系外からの力が存在しないだけでなく，${}_NC_2$ の作用・反作用の対があり，それぞれが打ち消し合って，力の合計がゼロとなっている．そうでなければ，孤立した物体を取り扱う場合，その物体を構成する粒子からの力まで問題にしなければならなくなる．

問 3 3 粒子の閉じた系において，すべての力が打ち消し合っていることを示せ．

---

[22]問 2 の答：$V=V_0+\dfrac{m}{M+m}v_{\mathrm{r}}, v=V_0-\dfrac{M}{M+m}v_{\mathrm{r}}$