1–2　ニュートンの運動方程式

≪ この項で学ぶこと ≫
[**運動量，運動方程式，質量，不変性，運動方程式の積分形，ヘルムホルツの方法**]

★　運動量

粒子は，他からの助けなしに自由運動を維持する能力を持っている．粒子をはじめ物体のこの性質を「**慣性**」と呼ぶ．運動する粒子は，方向性も付与されたある種の力学的勢いを持っているらしいことは，やがて正確に論じることになる衝突の際の相手への影響の大小によっても予想される．比例定数は後に定めるとして，粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ に比例する物理量として**運動量** という量を導入する．これを $\boldsymbol{p}$ とおく．今，分かっているのは，

$$\boldsymbol{p} \propto \boldsymbol{v}$$

ということだけ.

★　運動方程式

運動量の時間変化を引き起こす外因を**力**と呼ぶ．これを $\boldsymbol{f}$ と書くことにすると，

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f} \tag{1.6}$$

この式を**ニュートンの運動方程式**，あるいは，ニュートンの運動の第 2 法則という．運動方程式の右辺（以下, この項を**外界項**と呼ぶことにする.）は「原因」，左辺以下, この項を**粒子項**と呼ぶことにする.）は「結果」を表し，これらを等置している．ニュートンの運動方程式は「因果律の式」である．これ以降，物理法則が「因果律の式」で表される例は他にも現れる.

つまり,「運動方程式を解く」ためには，右辺の力の形を知っていることが前提である．いろいろな力については次の章で学ぶが，基本的な力に関しては,「運動についての方程式」とはまた別の「力についての方程式」を解いて値が定まる．このことに関しては II. 波動の物理学で勉強する.

★　質量

自然科学における理論は，測定可能な量に関して展開される．いくら矛盾のない理論を構築しても，測定のできない量からなっているのであれば，実験的に検証することができない．力の決定に関しては，後回しになったのだが，運動方程式の中のもう一つの物理量である運動量をどのように測るかを考えて行こう．この項の議論は，1 次元の式を用いる．

粒子 A と，粒子 B に同じ大きさの力 f を作用したとする．A，B の運動量を $p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}$ とおくと，A，B についての運動方程式は

$$\begin{cases} \mathrm{A}: & \dfrac{dp_{\mathrm{A}}}{dt} = f \\ \mathrm{B}: & \dfrac{dp_{\mathrm{B}}}{dt} = f \end{cases}$$

A，B の速度を $v_{\mathrm{A}}, v_{\mathrm{B}}$ とする．運動量は速度に比例するが，力が同じで

$$\frac{dp_{\mathrm{A}}}{dt} = \frac{dp_{\mathrm{B}}}{dt} \quad \text{であっても，} \quad \frac{dv_{\mathrm{A}}}{dt} \neq \frac{dv_{\mathrm{B}}}{dt}$$

である．すなわち，物体は同じ力を作用させても，同じ加速度は生じない．物体によって，運動の変化をさせ易い物体と，させ難い物体とがある．物体の持つこの性質を**慣性**と呼ぶ．つまり，させ易い物体は「慣性が小さい」と言い．させ難い物体は「慣性が大きい」と言う．この慣性を量として表したものが**質量**である．粒子は大きさは無視できるが，質量を持った物体である．

質量 m の測定は，基準とする質量 m_0 を持つ物体に加速度 a_0 を生じさせるのと同じ力を測定物体に作用させ，その加速度 a を測定することによって得られる．すなわち，

$$\frac{m}{m_0} = \frac{a_0}{a}$$

質量と加速度が一定力に対して反比例することを用いる．このことは，次のように示される．

また，運動量は速度に比例するとしたが，この比例定数が質量である．A，B の質量を $m_{\mathrm{A}}, m_{\mathrm{B}}$ とすると，

$$p_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}}, \quad p_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{B}} v_{\mathrm{B}}$$

運動の間，質量が時間変化しない場合，一定力に対して，

$$\frac{dp_{\mathrm{A}}}{dt} = \frac{dp_{\mathrm{B}}}{dt} \quad \text{は，} \quad m_{\mathrm{A}} \frac{dv_{\mathrm{A}}}{dt} = m_{\mathrm{B}} \frac{dv_{\mathrm{B}}}{dt}$$

A，B の加速度を $a_{\mathrm{A}}, a_{\mathrm{B}}$ とすると，$a = \dfrac{dv}{dt}$ の関係から，

$$m_{\mathrm{A}} a_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{B}} a_{\mathrm{B}}$$

これらのことから，質量が時間変化しない場合，ニュートンの運動方程式は

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \tag{1.7}$$

と表される．また，運動量 $\boldsymbol{p}$ は，質量 m と 速度 $\boldsymbol{v}$ の測定によって，

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{1.8}$$

として得られる．

$\boxed{\textbf{例 1}}$ すべての物理量は，3 つの基本的物理量の組み合わせによって表すことができる．基本的物理量としては，普通，質量 M，長さ L，時間 T を採用する．ある物理量が，単位なしの定数を除いて，M，L，T のそれぞれ，p,q,r 乗の積の関係で与えられるとき，

$$[\mathrm{M}^p\mathrm{L}^q\mathrm{T}^r]$$

と表し，p,q,r をこの物理量のディメンションと呼ぶ．[15]

例えば，速度 v のディメンションは，(1.3) 式などより，

$$[v] = \frac{[dx]}{[dt]} = [\mathrm{LT}^{-1}]$$

と表される．速度の単位は m/s，km/h 等いろいろあるが，共通することはすべて LT^{-1} の組み合わせとなっていることである．

L，M，T の単位として，それぞれ，m（メートル），kg（キログラム），s（秒）として，これらを基本単位として他の物理量の単位を定めた単位の集まりを **MKS 単位系**という．

$\boxed{\textbf{問 1}}$ 加速度，力，運動量のディメンションを求め，MKS 単位系における単位を言え．[16]

$\boxed{\textbf{例 2}}$ 質量 m と力 $\boldsymbol{f}$ が与えられ，ある時刻（例えば，時刻 $t = 0$ のとき）の位置と速度が指定（これを「**初期条件**」と言う.）されているとき，運動方程式から任意の時刻 t のときの粒子の位置と速度を t の関数として求める．前項の「運動方程式」のところで説明した「**運動方程式を解く**」とは具体的にこの操作を言うのである．

直線上の粒子に一定な力 $f(=\text{const.})$ は作用し続ける場合に，運動方程式を解け．ただし，初期条件は $t = 0$ のとき，粒子の位置 x_0，速度 v_0 とする．

① 運動方程式は (1.17) 1 次元にしたものである．

$$ma = f$$

② 加速度は，直ちに，

$$a = \frac{f}{m}$$

と求められる．

③ 速度は，$a = \dfrac{dv}{dt}$ の関係と速度の初期条件から得られる．すなわち，

$$\frac{dv}{dt} = \frac{f}{m}$$

[15] 元，次元は不採用．

[16] 問 1 の答：$[\mathrm{LT}^{-2}]$，$[\mathrm{MLT}^{-2}]$，$[\mathrm{MLT}^{-1}]$; m/s^2，N，kg·m/s

の両辺を t で定積分する．左辺は v の定積分に変換され，積分の下限は v_0 ，上限は時刻 t のときの速度 v となる．

$$\int_{v_0}^{v} 1dv = \frac{f}{m}\int_0^t 1dt$$

右辺が定数なので，簡単に解ける場合なのである．

$$v - v_0 = \frac{f}{m}t$$

故に，時刻 t のときの速度は，

$$v = \underline{\underline{v_0 + \frac{f}{m}t}} \tag{1.9}$$

④ 位置は，$v = \dfrac{dx}{dt}$ の関係と速度の初期条件から得られる．すなわち (1.8) 式より，

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{f}{m}t$$

両辺を t で定積分する．左辺は x の定積分に変換され，積分の下限は x_0 ，上限は時刻 t のときの位置 x となる．

$$\int_{x_0}^{x} 1dx = v_0\int_0^t 1dt + \frac{f}{m}\int_0^t tdt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}\frac{f}{m}t^2$$

故に，時刻 t のときの位置は，

$$x = \underline{\underline{x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{f}{m}t^2}} \tag{1.10}$$

問 2 質量 0.1 kg の粒子に，時刻 0 s 以降，一定方向に大きさ 1 N の力を加え続けた．1 s 後の速度が 10 m/s になったとすると，初速，2 s 後，10 s 後の速度と移動距離を求めよ．[17]

[17]問 2 の答：速度： 0 m/s，20 m/s，100m/s；位置：20 m，500 m

★ 不変性

ニュートンの運動方程式は，ガリレイの相対性原理を満たしているだろうか．I 1-1.$\boxed{\text{例 3}}$の形で見て行こう．K 系の加速度を a, K' 系の加速度を a' とおく．変換の式

$$x' = x - Vt$$

を，V =const. であることに注意して，時刻 t で 2 度微分する．

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2},\quad \text{すなわち}, a' = a$$

したがって，K 系でのニュートンの運動方程式：

$$ma = f$$

と，K' 系でのニュートンの運動方程式：

$$ma' = f$$

は，同一である．

「ニュートンの運動方程式は，慣性系で式を立てる限り，不変性を保つ.」

ここで,「不変性を保つ」といったのは，K 系と K' 系との間などの座標変換によって，式が形を変えないことを意味している．

しかし，運動方程式の不変性については，大きな前提がある．一つは，右辺の力 f がこの変換に対して，これも「不変性を保つ」ように定義されていなければならないということであり，もう一つは，質量 m についても，前提を持つことである．

[参考]

ニュートンの運動方程式を，元の形：$\dfrac{dp}{dt} = F,\quad p = mv$ で見て行こう．K 系の速度を v，K' 系の速度を v' とおく．変換の式を時刻 t で 1 度微分すると，

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V,\quad \text{すなわち}, v' = v - V$$

K’ 系の運動方程式は

$$\frac{dp'}{dt} = f,\quad p' = mv'$$

であるが，

$$\frac{dp'}{dt} = \frac{d(mv')}{dt} = m\frac{dv'}{dt} + \frac{dm}{dt}v' = m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}(v - V)$$

一方，

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v$$

であるから，$\dfrac{dm}{dt} \neq 0$ でない限り，K 系の運動方程式と同じ形にならない．[18]

[18] II 極限の数学で積関数の微分をやる場合には，この部分の書き方を式を用いない形に改める．

K 系の運動量の時間変化 $\dfrac{dp}{dt}$ と，K′ 系の運動量の時間変化 $\dfrac{dp'}{dt}$ が「不変性を保つ」ためには，運動の間，質量が時間変化しない，つまり，$\dfrac{dm}{dt} = 0$ の条件が必要である．しかし，例えば，ロケットのように，燃料を噴射して飛行する物体では，$\dfrac{dm}{dt} \neq 0$ であるが，運動方程式は成立する．ここで，質量の不変性とともに，粒子の定義についての付帯条件を定める．2 つ以上の粒子をまとめて取り扱う場合については次の節で見て行くが，

「粒子の質量は，時間変化に対して一定であり，座標変換に対して不変である.」

「一定」という用語は，前節で const. という記号とともに説明した．$\dfrac{dm}{dt} = 0$ ならば，$m =$const. である．ロケットを粒子と見なす場合には，燃料はこの粒子とは別のものとして取り扱われなければならない.

★　運動方程式の積分形

ニュートンの運動方程式：

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$$

は，右辺 $\boldsymbol{f}$ が時刻 t の関数であるとき，これを変数 t による被積分関数として見れば，定積分の定義をそのまま使って，時刻 $t = t_1, t_2$ のときの粒子の運動量を $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とすると，

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{f} dt \tag{1.11}$$

右辺を，力 $\boldsymbol{f}$ の**力積**と呼ぶ.

「　粒子の運動量の変化は，その間に粒子に作用した力積に等しい.」

ということである.

運動方程式は，加速度をひきおこす外界の影響を「力」の形で考えたが，変形されたこの式では，原因となる外界項を「力積」の形で考え，結果である粒子項を「運動量の変化」で見ている．右辺はベクトル量で，左辺のベクトル差と等しいとしたから，当然，向きの変化も，運動方程式のときと同様に，考慮されている.

例 3 微小量の計算を用いて，同じ結果を導出してみよう．運動方程式は

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$$

両辺に微小の時間変化 Δt を掛けると，

$$m\boldsymbol{a}\Delta t = \boldsymbol{f}\Delta t \tag{1.12}$$

この間の速度変化は微小量であるから，$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\Delta t$ が成り立つ．運動量の微小変化は，

$$m(\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v} = m\Delta \boldsymbol{v}$$

であるから，

$$m\boldsymbol{a}\Delta t = m(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v} \tag{1.13}$$

(1.11)，(1.12) 式より

$$m(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}\Delta t$$

したがって，左辺は運動量の微小変化，右辺は微小の力積を示す式が導出された．微小量の間の関係は，積分によって有限な関係式となる．

例 4 運動方程式を用いれば良く，特に (1.10) 式は必要ないかのように思われがちであるが， 粒子が激しく衝突したりする問題では，力 f がかなり大きくなり，測定も困難となる場合には，力を与えることはできない．しかし，この力は瞬間的，つまり，十分短い時間内のみ，働く場合には極限記号を使って考えれば，$f \to \infty, \Delta t \to 0$ で $f\Delta t$：有限となる．ただし，こういう場合でも，外界項から粒子項を求めるという筋道よりも，むしろ，粒子項，つまり，運動量の変化を知って，外界項，つまり，力積を調べるという使い方が，より多くなされる．

例えば，質量 m の粒子が壁と速さ v で衝突し，速さ v ではねかえる弾性衝突の場合には，壁から与えられた力積の大きさを I とおくと， (1.11) 式は

$$mv - m(-v) = I$$

したがって，粒子は大きさ $I = \underline{\underline{2mv}}$ の力積をはねかえる向きに受ける．

問 3 速度 8.00×10 m/s で落下していた質量 1.00×10^3 kg の惑星探査機が，2×10 kg の燃料を噴射して，速度を $\dfrac{1}{2}$ に減速した．この間に探査機に加わった力積の大きさと向きを求めよ．[19]

★ ヘルムホルツの方法

前項と同じく，運動方程式の積分型を作るのであるが，今度は少し違ったやり方をする．この方法はヘルムホルツが定式化したものである．

ニュートンの運動方程式：

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$$

は，右辺 $\boldsymbol{f}$ が位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数であるとき，前項とは，また異なる積分形の関係式にまとめることができるが，この計算は，今度は 例 3 でやったような微小量の計算を用い，さらに，まず，すべて直線上の問題と考えてやってみよう．

[19]問 3 の答：3.92×10^4 N·s，上向き．

加速度を a，力を f として，運動方程式は

$$ma = f$$

速度 v とすると，微小時間 Δt 間の微小の変位は， $\Delta x = v\Delta t$ と表されるから， 運動方程式の左辺に $v\Delta t$ を，右辺に Δx を掛けても等式となる．

$$mav\Delta t = f\Delta x$$

ここで，速度 v の微小変化は $\Delta v = a\Delta t$ だから，左辺は，$mav\Delta t = mv\Delta v$ と表せる．故に，

$$mv\Delta v = f\Delta x$$

微小量の間の関係は，積分によって有限な関係式となる．粒子の位置が $x = x_1,x_2$ のとき，速度 $v = v_1,v_2$ となるとして，

$$m\int_{v_1}^{v_2} vdv = \int_{x_1}^{x_2} fdx$$

右辺の定積分は

$$m\int_{v_1}^{v_2} vdv = m\left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} fdx \tag{1.14}$$

ここで，

$$K_i = \frac{1}{2}m{v_i}^2, \quad (i = 1,2) \tag{1.15}$$

なる量を粒子の**運動エネルギー**と呼ぶ．それに対して

$$W = \int_{x_1}^{x_2} fdx \tag{1.16}$$

を「力 F のする**仕事**」という．日常生活で使っている「仕事」と異なり,「仕事をするのは力」と非人称化していることに注意．また，$W < 0$ の場合,「力が仕事をされる」というより,「力が負の仕事をする」と表現しよう．(1.13) 式をまとめると，

$$K_2 - K_1 = W \tag{1.17}$$

「　粒子の運動エネルギーの変化は．その間，粒子に作用した力のした仕事に等しい．」
ということである．

運動方程式は，加速度をひきおこす外界の影響を「力」の形で考えたが，変形されたこの式 (1.16) では，右辺，原因としての外界項を「仕事」の形で考え，左辺，結果としての粒子項を「運動エネルギーの変化」で見るている．

例 5 f =const. の場合の 例 2 について，ヘルムホルツの変形を実行してみよう．今度は積分公式：$\int \frac{dv}{dt}dt = \int 1dv$ を用いることにする．

運動方程式 (1.17) の左辺に v を，右辺に v に等しい $\frac{dx}{dt}$ を掛け，t で定積分する．

$$m\int_{v_0}^{v} vdv = f\int_{x_0}^{x} 1dx$$

左右辺の定積分の下限は，例 2 の初期条件の値，上限は時刻 t のとき値である．一般論との違いは f =const. であるため，積分の外に出せることである．積分を実行すると，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = f(x - x_0)$$

したがって，粒子の速さが位置 x の関数として，

$$|v| = \sqrt{{v_0}^2 + \frac{f}{m}(x - x_0)}$$

と与えられる．

問 4 質量 5kg の物体に力を加えて，力の向きに物体を直線運動させた．物体の移動距離 x と力の大きさ F との関係は，図 1.3 のグラフで示されている．また，$x = 0$m における物体の速度は 6m/s であった．

(1) $x = 0$m から $x = 7$m までの間に，力が物体にした仕事を求めよ．
(2) $x = 7$m における物体の速度を求めよ．
(3) $x = 20$m における物体の速度を求めよ．

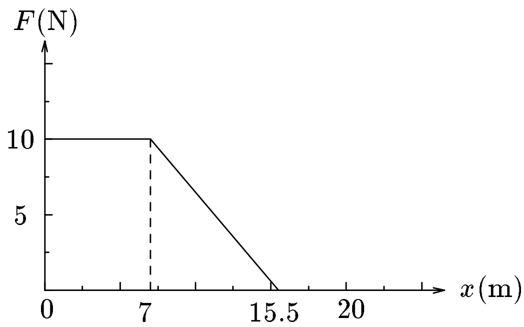

図 1.3: 運動エネルギーと仕事

[参考]

さて，この関係を，直線上の粒子の運動に限らず，空間座標 (x, y, z) を用いて一般化する．

まず，(1.13) 式は，x 成分についてのみ導いた関係となる．すなわち．加速度の x 成分を a_x，力の x 成分を f_x と表した運動方程式の x 成分：

$$ma_x = f_x$$

から，③ 式を，粒子の位置が $x = x_1,x_2$ のとき，速度の x 成分が $v = v_{1x},v_{2x}$ となると書き換えて，

$$\frac{1}{2}m{v_{2x}}^2 - \frac{1}{2}m{v_{1x}}^2 = \int_{x_1}^{x_2} f_x dx \tag{1.18}$$

同様に，運動方程式

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}, \quad \text{ただし} \quad \boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{f} = (f_x, f_y, f_z)$$

の y,z 成分の式

$$ma_y = f_y, \quad ma_z = f_z$$

から，粒子の位置が $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ のとき，速度が $\boldsymbol{v}_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$,　$(i = 1, 2)$ として，

$$\frac{1}{2}m{v_{2y}}^2 - \frac{1}{2}m{v_{1y}}^2 = \int_{y_1}^{y_2} f_y dy \tag{1.19}$$

$$\frac{1}{2}m{v_{2z}}^2 - \frac{1}{2}m{v_{1z}}^2 = \int_{z_1}^{z_2} f_z dz \tag{1.20}$$

速度の大きさ（速さ）v と速度の各成分 v_x, v_y, v_z との関係が

$$v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2$$

となることから，運動エネルギー K の一般形は

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2)$$

したがって，(1.18) + (1.19) + (1.20) の左辺は，一般的にも粒子の運動エネルギーの変化 $K_2 - K_1$ を表している．一方，(1.18) + (1.19) + (1.20) の右辺は，これを W とおくと，

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f_x dx + \int_{y_1}^{y_2} f_y dy + \int_{z_1}^{z_2} f_z dz \tag{1.21}$$

この式はベクトルのスカラー積の成分表示を用いると，[20]

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1.22}$$

力 $\boldsymbol{f}$ のする仕事の一般化である．スカラー積の約束から，簡単のため，$\boldsymbol{f}$ =const. の場合とすると，図 1.4 のように，

[20] I 数合の数学のカリキュラム 2 年目に，同時並行的にやる．

$\boldsymbol{f}$ を変位 $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ に平行な成分 $f_{\parallel}$ と垂直な成分 $f_{\perp}$ とに分解すると,「変位と垂直な力の仕事は 0 である」ことから,$|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = l$ とおいて,

$$W = f_{\parallel} l \tag{1.23}$$

となる.

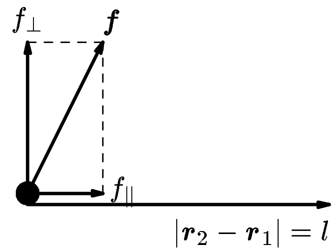

図 1.4: 力と変位

これで

$$K_2 - K_1 = W$$

を,一般的に示したことになる.ここで注意すべきことは,2 つのベクトルの積がスカラー積となることから,この等式は運動方程式のようなベクトル式ではなく,大小比較のみ問題となる量となることである.このような量を**スカラー**と呼ぶ,エネルギーは,運動エネルギーにせよ,仕事にせよ, スカラー量である.