第1章 運動法則

1–1　ガリレイの相対性原理

≪ この節で学ぶこと ≫
[**粒子，慣性系，ガリレイの相対性原理，加速度，ニュートンの運動の第 1 法則**]

★　粒子

物体の運動を調べるために，まず，粒子と見なすことのできる物体から始めることにする．**粒子**とは, 十分小さい物体で，ひろがり，自転，変形が無視できるものを言う．粒子のことを質点と呼ぶ人もいるが，ここではその用語は使わない．[1]

「十分小さい」という表現には，科学的思考をする場合には切り離すことのできない「近似」を伴う判断が含まれている．[2]

例 1 物体の運動が十数メートルに及ぶ運動を考察する場合に，2,3 センチメートル，すなわち，2 か 3 の $\dfrac{1}{100}$ メートル[3]程度の物体を粒子と見なすかどうかは，測定値の

$$\frac{10^{-2}\mathrm{m}}{10\mathrm{m}} = 10^{-3}$$

[1]質点と呼んだ場合, 幾何学的な「点」についての数学上の議論を惹起してしまう．このことを避けるためである．

[2]「質量中心を見ているのだ」ということは，後で追加される．

[3]この単元では M.K.S.A. の基本単位以外の単位はほとんど用いないことにする．あくまでも肉眼で見える世界が主役であることと，学生に絶えず order 上の比較を意識させるためでもある．単位についての章は，カリキュラム 1 年度の単元：科学の現象論でやる．

以下の数値を，精度として問題とするか否かにかかっている．

例 2 地球の赤道半径は $6.378\cdots\times10^6$ m$\approx 10^7$ m[4]であり，地球・太陽間の平均距離は $1.49\cdots\times10^{11}$ m$\approx10^{11}$ m である．

$$\frac{10^7\mathrm{m}}{10^{11}\mathrm{m}}=10^{-4}$$

地球の運動を論じる場合に，測定値の 10^{-4} 以下の精度を問題としなければ，地球は私たちにとって大きな存在であろうが，実際に自転していようが，地球を粒子と見なすことができる．

問 1 水素原子のひろがりは，$5.29\cdots\times10^{-11}$ m であり，他の原子のひろがりもオーダーとしては同程度である．一方，肉眼で判断できる長さには個人差があるが，今，仮に，ほぼ 0.1 mm，すなわち，10^{-4} m 程度とする．日常的に取り扱っている物体のひろがりにとって，原子 1 個のひろがりは，当然，問題とならない．では，原子が 1 列に何個分程並べば考慮しなければならないか．[5]

★ 慣性系

粒子の運動を記述するためには，基準となる座標が必要となる. 座標は，測定したい粒子以外のある物体上に，例えば地面上の 1 点などに，原点 O をとって目盛付きの xyz 軸を設定したりして定める．現代では，地球が運動していることは誰でも知っているから，私たちが通常，地表を基準として粒子の運動を測定する理由は「地表が静止しているから」だとは，思えないはずである．では，何故そうしているのか．以下，このことに関連したことを考えて行くが，具体的に，地表や床を基準とした座標をとってよい理由は，しばらくしてから説明する．

一般に，基準とする座標が異なれば，物理法則は違った形になってしまう．しかし，単純な運動が，極めて複雑な式で表されることになるような座標を選ぶことは避けるべきであろう．そこで，座標の基準となる物体として，他の物体からそれによって運動が変化してしまうような影響を受けず，自由運動をする物体を選ぶ．**自由運動**とは，問題としている時間中に等速度運動する，すなわち，速度の大きさと向きとを変えない運動のことである．この条件を満たす座標を**慣性系**と呼ぶ．慣性系は，唯一存在する訳ではない．ある慣性系から観測して，自由運動をしているもう一つの物体に固定された座標もまた慣性系である．

[4]近似記号は，日本だけで通用している　　はやめて，$\approx$ を採用する.「近似」についての章がどこになるかも未定.

[5]10^6 個程度

例 3 問題を直線上の運動に限るとする．慣性系 K に対して，等速度 V で動く 慣性系 K$'$ を考える．K，K$'$ 両系の原点 O と O$'$ は，時刻 $t = 0$ のとき一致しているとする．図 1.1 のように，時刻 t とときの K 系での粒子 P の位置は x，同じ時刻のときの K$'$ 系での位置は x' で表されるとすると，両座標の関係は

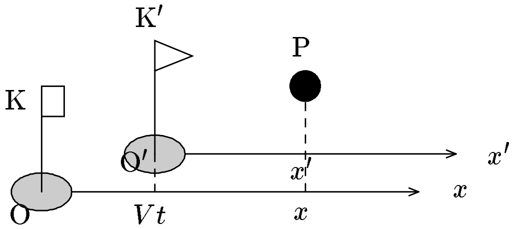

図 1.1: 慣性系 K，K$'$

$$x = x' + Vt,\quad \text{あるいは}\quad x' = x - Vt \tag{1.1}$$

となる．[6][7]

問 2 地上に対して，直線上を速度 $v_{\rm A}$,$v_{\rm B}$ で運動する物体 A，B がある．A と共に動く座標から観測した B の速度を「 A に対する B の**相対速度**」と言う．これを $v_{\rm r}$ で表すと，

$$v_{\rm r} = v_{\rm B} - v_{\rm A} \tag{1.2}$$

の関係がある．ただし，$v_{\rm A}$,$v_{\rm B}$,$v_{\rm r}$ は直線上の同じ向きを正と約束する．

B が $v_{\rm B} = 3$ m/s で動いているとき，A が以下の速度の場合の A に対する B の相対速度 $v_{\rm r}$ を求めよ．

(1) $v_{\rm A} = 0$ m/s のとき． (2) $v_{\rm A} = 3$ m/s のとき．(3) $v_{\rm A} = 5$ m/s のとき．

(4) $v_{\rm A} = -2$ m/s のとき．[8]

★　ガリレイの相対性原理

「あらゆる慣性系に対して，物理法則は同じ形を持つ.」

座標の選定について前項で述べた制限があるが，物理法則はこのような客観性を持ち，見る場所が違えば違った法則となるというようなことはないという意味である．しかし，私たちは，まだ一つも具体的な物理法則を取り上げていない．そこでまず,「粒子の自由運動」について検討してみよう．

一般に，粒子の位置は座標原点 O を基準とする**位置ベクトル** $\boldsymbol{r}$，あるいは，位置ベクトルの成分表示 $\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$ で示される．[9]一方, 粒子の位置 $\boldsymbol{r}_1$ から 位置 $\boldsymbol{r}_2$ への移動は

[6] I 集合の数学 B の第 1 章での取り扱いは，空間を固定し物体を動かすものであるが，第 2 章で，固定した物体に対して座標を変換することに切り換わったことを思い出すように.

[7] 物理で x' をこのように用いるので, 数学で導関数を y' などと書くのをやめる.

[8] 問 2 の答：(1) 3 m/s (2) 0 m/s (3) -2 m/s (4) 5 m/s

[9] I 集合の数学のカリキュラム 2 年目で，同時並行的に「ベクトル，位置ベクトル」をやっている．また,「運動学」の所でも詳しく説明.

変位ベクトル $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ で表される．また， 速度 $\boldsymbol{v}$ は位置ベクトル $\mathbf{r}$ の時間変化を表すベクトルだから，

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \tag{1.3}$$

となる．[10]しかし，自由運動のとき，粒子は運動の向きを変えないから，この方向を x 軸上とすると，

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

であるから，y, z 軸は考えず, 1 次元の座標上で取り扱おう．粒子の速度を v で表そう．

$$v = \frac{dx}{dt}$$

である．

ここで，1 次元の速度と速さとを混同してはならないことを注意しておく．**速さ**とは，速度の大きさのことであり，1 次元の速度 v は x との関係を示す式からも分かるように，

ⓐ $v > 0$ のとき，$\dfrac{dx}{dt} > 0$，つまり，時間が経つと x が増加するから，粒子は x 軸の正の向きに運動する．

ⓑ $v < 0$ のとき，$\dfrac{dx}{dt} < 0$，つまり，時間が経つと x が減少するから，粒子は x 軸の負の向きに運動する．

ⓒ $v = 0$ のときのみ，粒子は速さ 0，つまり，静止の状態となり，このときに限り向きを持たない．

例えば $\boxed{\text{問 2}}$ の計算も，このことが理解できないと正しい答が得られないのである．

ひとつの慣性系を K とする．K 系から見て粒子が自由運動をしているとき，粒子は速度を変えないのであるから，

$$v = \text{const.}$$

となっている．ここで，const. の記号は，英語の constant の略で「一定値」をとること，すなわち，時間が経っても変わらないことを意味する．const. の具体的な値としては，上の ⓐ，ⓑ，ⓒ いずれの場合もあり得る．

一方，この粒子の同じ自由運動を，K 系と $\boxed{\text{例 3}}$ に示す関係にある別の慣性系 K′ から見ると，粒子の速度 $v' = \dfrac{dx'}{dt}$ は別の値となる．K 系から見た K′ 系の速度も V =const. であることに注意して，(1.1) 式の, それぞれの両辺を t で微分すると，

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V, \quad \text{あるいは} \quad \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$$

[10] II 極限の数学のカリキュラム 2 年目に微分法の応用，また,「運動学」の所でも詳しく説明.

つまり，

$$v = \mathrm{const.}, V = \mathrm{const.}\ \text{だから}\ \ v' = v - V = \mathrm{const.}$$

粒子は K′ 系においても等速度，const. ではあるが，値までは一致しない．この表現はまだ,[ガリレイの相対性原理] の自由運動への適用として,「同じ形を持つ」までに至っていない．

★　加速度

ここまでの推論で，粒子の運動を調べるためには速度を示すだけでは不十分で，速度の時間変化をも指定しなければならないという方向付けがなされた．速度の時間変化を**加速度**と呼ぶ．速度 $\boldsymbol{v}$ がベクトルであることから，加速度もベクトルである．すなわち，加速度も大きさと向きを持つ．加速度を $\boldsymbol{a}$ で表すと，

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) \tag{1.4}$$

の関係がある．ここで，演算記号 $\dfrac{d^2}{dt^2}$ は t について 2 度微分するという意味である．[11]

例 4 粒子の自由運動を 1 次元の座標上で取り扱う場合には，1 次元の加速度 a は，

$$v = \mathrm{const.}\ \text{だから}\ \ a = \frac{dv}{dt} = 0$$

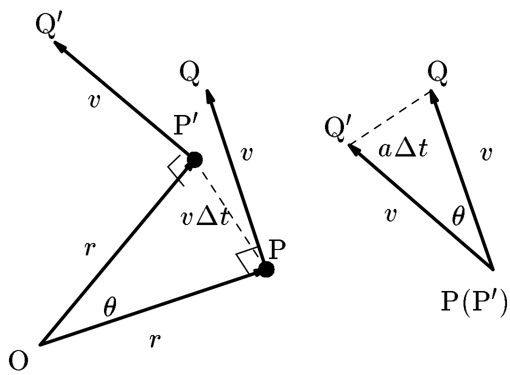

図 1.2: 等速円運動の加速度

例 5 速度, 加速度がベクトルであることから，速さを変えず，速度の向きのみ時間変化する場合の加速度も存在する．この加速度の向きは，速度の向きに垂直である．何故ならば，図 1.2 左のように，もし加速度の向きが速度の向きに垂直でなければ，必ず，速度の向きに沿った加速度成分が現れるから，速さが変わってしまうからである．この加速度によって，粒子は等速円運動をする．図 1.2 右のように，原点 O からある時刻の粒子の位置 P 点までの距離（位置ベクトルの絶対値）を r で表すと，粒子は微小時間 Δt の間に $\mathrm{OP'} = r$ の P′ 点に変位する．

粒子の速さ v とすると，$\mathrm{PP'} \approx v\Delta t$ となり， P,P′ 点に，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$， $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ の速度ベクトルを付すと，これらは $\overline{\mathrm{OP}}$，$\overline{\mathrm{OP'}}$[12] にそれぞれ垂直で，$\mathrm{PQ} = \mathrm{P'Q'} = v$ である．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$， $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ を

[11] 高階微分は，II 極限の数学のカリキュラム 3 年目．

[12] I 集合の数学 B 1-2 ではっきり約束するように，記号 AB は点 A と点 B の間の最短距離を，また，記号 $\overline{\mathrm{AB}}$ は両端が点 A，B でありその間だけの直線（線分）を示す．

平行移動して，図 1.2 右のように P 点と P$'$ 点とを一致させる．速度変化が $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}} - \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であることから，加速度の大きさ a とおくと，$\mathrm{QQ'} = a\Delta t$ となる．

$\triangle$PQQ$'$ は $\triangle$OPP$'$ と相似であり,（頂角が等しく，ともに 2 等辺 3 角形である.）対応する辺の比が等しい．

$$\mathrm{PQ} : \mathrm{QQ'} = \mathrm{OP} : \mathrm{PP'}, \quad v : a\Delta t = r : v\Delta t$$

これより，$v : a = r : v$．したがって，

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{1.5}$$

を得る．加速度の向きは $\overline{\mathrm{QQ'}} \perp \overline{\mathrm{PP'}}$ だから, 絶えず円の中心 O を向き，大きさは $\dfrac{v^2}{r}$ である．これが速さを変えず，速度の向きのみ時間変化する場合の加速度の形である．

粒子の自由運動のときには，$v \neq 0$ であるが，向きを変えないからこれをあえて円軌道であると言うならば，円の半径 $r \to \infty$ の場合である．

$$r \to \infty \ \text{だから} \ a = \frac{v^2}{r} \to 0$$

問 3 回転軸からの長さ 1.0×10^{-1} m の時計の秒針の先端の加速度はどのくらいの大きさか．[13]

ここで，自由運動をガリレイの相対性原理にしたがうように表現すれば，

「**自由運動とは，あらゆる慣性系に対して，$a = 0$ となる運動である．**」

ここまでの議論の展開は，循環論法（どうどうめぐり）ではないかと思うかも知れない．何故ならば，自由運動を定めるのに慣性系を使っているが，慣性系相互の関係もまた自由運動だとしているからである．循環論法は，ただ一つ，独立に慣性系が見つかれば解消する．しかし，私たちの住んでいる世界では，残念ながら宇宙の中の不動点だとか，絶対的な基準は見出すことはできない．自然科学における解決法は，試行錯誤を前提として，とにかくある近似的な慣性系を使ってみることなのである．近似が悪ければ，補正して次へ進むことができる．

例 6 地表が近似的な慣性系であるとして，その精度を計算しよう．ここでは，赤道付近を例として考える．地球の赤道半径は $r \approx 6 \times 10^6$ m．赤道での自転の速さは，

$$1\,\text{日} = 24 \cdot 60^2\mathrm{s} = 8.64 \times 10^4\mathrm{s} \approx 9 \times 10^4\mathrm{s}$$

$$\text{赤道の周} = 2\pi \cdot 6 \times 10^6\mathrm{m} = 3.6 \times 10^7\mathrm{m} \approx 4 \times 10^7\mathrm{m}$$

$$v \approx \frac{4 \times 10^7\mathrm{m}}{9 \times 10^4\mathrm{s}} = 4 \times 10^2\mathrm{m/s}$$

[13] 1.0×10^{-3} m/s^2

したがって，自転の加速度 a は

$$a = \frac{v^2}{r} \approx \frac{(4\times 10^2\mathrm{m/s})^2}{6\times 10^6\mathrm{m}} \approx 3\times 10^{-2}\mathrm{m/s^2}$$

この値は，例えば重力加速度 $g \approx 10\mathrm{m/s^2}$ の

$$\frac{a}{g} \approx \frac{3\times 10^{-2}\mathrm{m/s^2}}{10\mathrm{m/s^2}} \approx 3\times 10^{-3}$$

である．

問 4 緯度 35 度の地点における自転の加速度の大きさを求めよ．ただし，$\cos 35^\circ = 0.8$ として計算せよ．[14]

★　ニュートンの運動の第 1 法則

ニュートンの運動の第 1 法則は，慣性の法則とも言い，その内容は

「力が働かないとき，物体は静止，または，等速直線運動を続ける.」

というものである．静止も等速直線運動も，この章で説明した自由運動のことであった．この法則が成り立つのは慣性系に対してであり,「力」についてはどのようなものかは，これから調べて行くことである．

[14]問 4 の答：$2\times 10^{-2}\mathrm{m/s^2}$