

1-3 ドップラ - 効果

◀ この項で学ぶこと ▶

[座標変換, ドップラ - 効果タイプ 1, ドップラ - 効果タイプ 2: 媒質の運動, 光のドップラ - 効果]

座標変換

波を伝える媒質を基準とした座標を K 系とする. K 系に対して $+x$ 軸方向に等速度 V で動く座標を K' 系とする. I-1-1 の例 3 で見たように, K 系の座標 x と, K' 系の座標 x' の間の関係は ($t = 0$ のとき, 両系の原点 O と O' が重なっていたとして),

$$x = x' + Vt \quad (1.1)$$

であった. 波の式としては, 簡単のため, 振動数 f , 位相の速さ c で, $+x$ 軸方向に進行する $x = 0$ の初期位相 $\theta_0 = 0$ のものとする, 媒質の変位は,

$$\psi = A \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

K 系で観測している位相

$$\theta = 2\pi f \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

を, K' 系から見ると,

$$\theta = 2\pi f \left(t - \frac{x' + Vt}{c} \right) = 2\pi f \frac{c - V}{c} \left(t - \frac{x'}{c - V} \right)$$

したがって, K' 系での振動数 f' と位相速度 c' (*sとおくと,

$$f' = f \frac{c - V}{c}, \quad c' = c - V \quad (1.10)$$

すなわち, K' 系では, 媒質の変位は

$$\psi = A \cos 2\pi f' \left(t - \frac{x'}{c'} \right)$$

と見える. (1.8) の第 2 式の関係は, 粒子についての速度変換の関係と同じである.

(*sもちろん, ここでの話は非相対論である.)

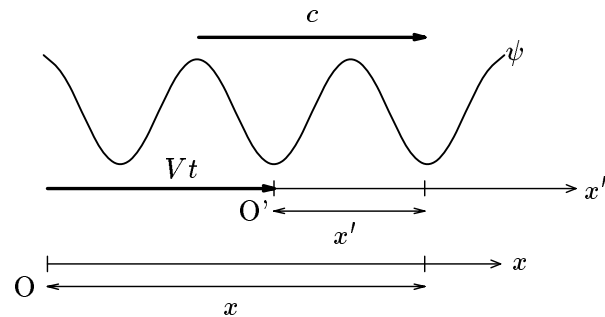


図 1.22: 座標変換

ドップラ - 効果タイプ 1

振動数 f_s の波を発生する波源 S が媒質，すなわち， K 系に対して，速度 v_s で動く場合， K 系に対して静止している観測者（検出器） D が観測する振動数 f_{D1} は f_s と等しくない．この場合をドップラ - 効果タイプ 1 とする．この場合， $V = v_s$ となるような K' 系を選べば，(1.8) 式の $f' = f_s$ であり， K 系で観測する振動数 $f = f_{D1}$ で，位相の速さ c は媒質（ K 系）に対するものであるから，(1.8) 式に適用して，

$$f_s = f_{D1} \frac{c - v_s}{c}$$

観測者（検出器） $D1$ が観測する振動数 f_{D1} は

$$f_{D1} = f_s \frac{c}{c - v_s} \quad (1.11)$$

身近に経験できる例：踏み切りに近づく（ $v_s > 0$ ）電車の発する警笛（ f_s ）は，踏み切り立つ人の耳には高く（ $f_{D1} > f_s$ ）聞こえ，踏み切りから遠ざかる（ $v_s < 0$ ）電車の発する警笛（ f_s ）は，低く $f_{D1} < f_s$ ）聞こえる．このような現象が定式化できた訳である．

例 1 ここで，波源 S の運動によって波面がどのように変化するか考察しよう．式で取り扱った ψ の形は本来，波源から十分離れた所で成り立つ平面波であるが，少なくとも， x 軸に沿った位相変化については，点波源 S から発生する球面波の場合にも成り立つから，ここから波面のできる様子を考えることができる．

波源 S が静止した観測者 D に近づく場合を考えよう．以下では，グラフの方眼紙の 1 目盛りは 2 m とする．

図 1.23 の点 $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ は，それぞれ，時刻 $t = 0s, 4s, 8s, 12s, 16s, 20s$ のときの波源の位置である．点 $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ では，それぞれの時刻に波の山を発生しているとすると， D 点を通る円は波源が S_0 にあったとき発生した波の山が， $t = 20s$ のとき伝わった位置を示している．以下， $t = 20s$ に S_0 から伝わった波の山の内側にできる波の山が図示されている．

- (1) この図から，波の伝わる速さ c ，波源の速さ v_s ，波源の発生する振動数 f_s を求めよ．
- (2) 図から， S_0D 間で観測される波の波長 λ' を読み取り， D 点にいる観測者が測定したときの振動数 f_{D1} を求めよ．また，この関係が (1.9) 式を満たすことを確かめよ．

【解】 (1) S_0 点から発した波面は 20 s かけて D 点に達する． $\overline{S_0D} = 20$ m であるから，

$$c = \frac{20 \text{ m}}{20 \text{ s}} = \underline{\underline{1.0 \text{ m/s}}}$$

また，この間に波源は $\overline{S_0S_5} = 10$ m 進むから，

$$v_s = \frac{10 \text{ m}}{20 \text{ s}} = \underline{\underline{5.0 \times 10^{-1} \text{ m/s}}}$$

さらに， S_0S_5 間に 5 個の山の波面があるから，

$$f_s = \frac{5}{20s} = \underline{\underline{2.5 \times 10^{-1} \text{ Hz}}}$$

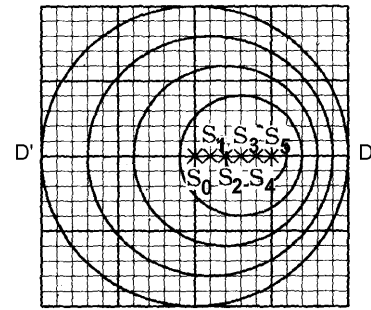


図 1.23: タイプ 1 の波面

(2) S_0S_5 間の波の山と山の間隔を読み取ると,

$$\lambda' = \underline{2.0 \text{ m}}$$

$$f_{D1} = \frac{c}{\lambda'} = \frac{1.0 \text{ m/s}}{2.0 \text{ m}} = \underline{5.0 \times 10^{-1} \text{ Hz}}$$

c 、 v_S 、 f_S の数値を, (1.9) 式に代入すると,

$$f_{D1} = f_S \frac{c}{c - v_S} = 0.25 \text{ Hz} \frac{1.0 \text{ m/s}}{1.0 - 0.50 \text{ m/s}} = \underline{5.0 \times 10^{-1} \text{ Hz}}$$

問 1 図 1.23 から, S_0 の左側の観測者 D' が測定したときの振動数を求めよ. (*t)

ドップラ - 効果タイプ 2

振動数 f_S の波を発生する波源 S が媒質, すなわち, K 系に対して, 静止している. 観測者 (検出器) D が K 系に対して速度 v_D で動く場合, 観測する振動数 f_{D2} は f_S と等しくない. この場合をドップラ - 効果タイプ 2 とする. この場合, $V = v_D$ となるような K' 系を選べば, (1.8) 式の $f' = f_{D2}$ であり, 波源 S での振動数 $f = f_S$ は K 系で観測する値で, 位相の速さ c は媒質 (K 系) に対するものであるから, (1.8) 式に適用する. 観測者 (検出器) D が観測する振動数 f_{D2} は

$$f_{D2} = f_S \frac{c - v_D}{c} \quad (1.12)$$

図 1.24 (a) は, まず, 観測者 D が静止している場合で, この例では時間 t の間に波の山がちょうど 3 つ D を通り過ぎた. すなわち, 振動数 $f_S = \frac{c}{\lambda} = \frac{3}{t}$ である. 一方, (b) では, D の速度 $v_D = \frac{\lambda}{t}$ の場合であり, $f_{D2} = \frac{c - v_D}{\lambda} = \frac{2}{t}$ となる. D を図で 2 つ山が通り過ぎている.

例 2 振動数 f_S の波を発生する波源 S が媒質に対して, 速度 v_S で動き, 観測者 (検出器) D が媒質に対して速度 v_D で動く場合, 観測する振動数 f_{D3} は, どのような式で与えられるだろうか.

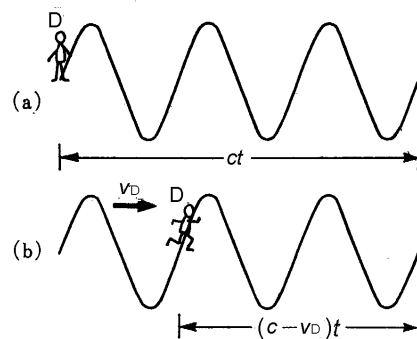


図 1.24: タイプ 2 の波

(*t) **問 1** の答: $1.7 \times 10^{-1} \text{ Hz}$

(1.9) 式と (1.10) 式を次々に適用するばよい．まず，媒質に対して静止して S から振動数 f_{D1} の波を受け取り，そのままの振動数で D に向かって発射する装置を想定する．装置が波を受け取る場合には，タイプ 1 のドップラ - 効果が生じているから，

$$f_{D1} = f_S \frac{c}{c - v_S}$$

装置が波を発射する場合には，タイプ 2 のドップラ - 効果であるが，ただし，(1.10) 式の f_S のところは設定より， f_{D1} と置き換える．

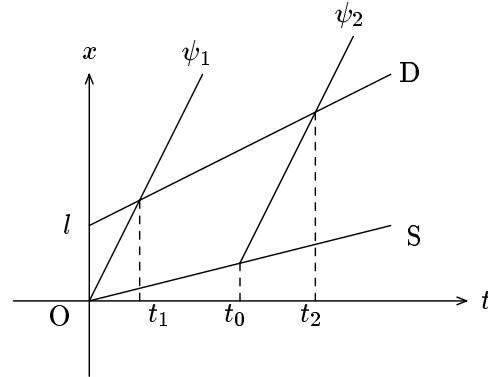
$$f_{D3} = f_{D1} \frac{c}{c - v_D} = f_S \frac{c}{c - v_S} \times \frac{c - v_D}{c}$$

故に，

$$\underline{\underline{f_{D3} = f_S \frac{c - v_D}{c - v_S}}}$$

問 2 x 軸上の原点 O を時刻 $t = 0$ に通過し，速度 v_S で動く音源 S と，

時刻 $t = 0$ のとき $x = l$ を速度 v_D で通過する観測者 D の各時刻 t での位置 x は下のグラフで，それぞれ直線 S と直線 D で表される．



(1) 直線 S と直線 D を式で表せ．

(2) S が時刻 $t = 0$ から $t = t_0$ まで振動数 f_S の音を出したとき，最初の音 ψ_1 と最後の音 ψ_2 が D の方へ伝わる運動も，同じグラフのなかに描いてあるが，音速を c とおき，それらの直線の式を書け．

(3) 音 ψ_1 は時刻 $t = t_1$ に D に到達する．同様に，音 ψ_2 は時刻 $t = t_2$ に D に到達する．それぞれ，2 直線の交点の横軸座標を求めることによって t_1, t_2 を求めよ．

(4) 振動数 f_S とは S が 1 秒間に出す波の (例えば，波の山の) 数だから， S が時間 $0 \sim t_0$ に出す波の数は $f_S t_0$ である．この発生する波の数と D で受け取る波の数は一致することを考えて， D で観測される振動数を f_{D3} を v_S, v_D, c, f_S で表せ．(*u もし，観測者が位相 (波面) と等しい速度で動く場合，すなわち， $v_{D2} = c$ であるときは，(1.10) 式より $f_{D2} = 0$ となる．観測者が波が追いつかないように走る．つまり， $v_{D2} \geq c$ ならば波は観測できないのは当然である．同様に， $v_{D1} \geq c$ の場合にも，図 1.23 のような波面は形成されないから，(1.9) 式も成り立たない．この場合の波を衝撃波という．波面は図 1.25 のようになる．超音速のジェット機が発生する音波がその一例である．

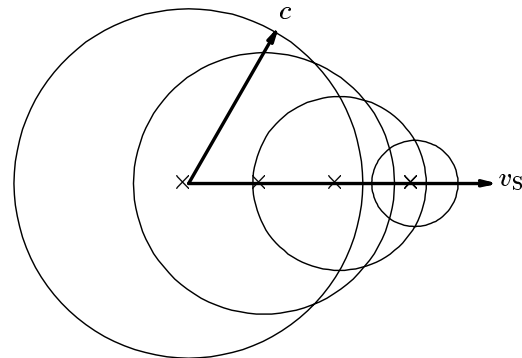


図 1.25: 衝撃波の波面

(*u **問 2** の答: (1) $x = v_S t$ $x = v_{D3} t + l$ (2) $x = ct$ $x = c(t - t_0) + v_S t_0$ (3) $t_1 = \frac{l}{c - v_D}$ $t_2 = \frac{l}{c - v_D} + \frac{c - v_S}{c - v_D}$

(4) $f_{D3} = \frac{c - v_D}{c - v_S} f_S$

[参考 1]

媒質の運動

波面はその波を伝える媒質に乗って進行するので、もし媒質が w の速度で動かならば、基準の K 系に対する位相速度は $c + w$ となる。ただし、ここでは簡単のため w は波の進行方向に動く場合に限って考えよう。 c と同じ向きに進む場合は $w > 0$ 、 c と逆向きに進む場合は $w < 0$ とする。音波は空気を媒質としているので、音源から音が伝わって来るのと同じ向きに風が吹く場合と、逆向きに風が吹く場合で何がかわるかを、例として、考察してみよう。

音源 S も、観測者 D も、 K 系に対して静止している場合、 D に向かって波長

$$\lambda'' = \frac{c + w}{f_S}$$

つまり、 D が風下のある場合には、波長 λ'' は風のない場合より長く、 D が風上にある場合には、波長 λ'' は風のない場合より短くなる。風のない場合の波長は $\lambda = \frac{c}{f_S}$ であった。しかし、波長、音速が変わっても、 D が受け取る振動数は、

$$\frac{c + w}{\lambda''} = \frac{c + w}{\frac{c + w}{f_S}} = f_S$$

と、音源から出た高さと変わりはない。すなわち、波長の変化はドップラ - 効果をもたらす性質のものではない。

このことを理解しておけば、風速 w のある場合のドップラ - 効果の振動数 f_{D4} と音源の発する振動数 f_S の関係は明らかであろう。音源 S が媒質に対して、速度 v_S で動き、観測者 D が媒質に対して速度 v_D で動く場合、

$$f_{D4} = f_S \frac{(c + w) - v_D}{(c + w) - v_S}$$

[参考 2]

1-4 光のドップラ - 効果

光（電磁波）も波であるから、ドップラ - 効果の現象が観測される。ただし、光については、座標変換 (1.1) 式は成り立たないから、相対論的な変換式をその基礎におかなければならない。ここでは、まだ、その準備はできていないので、ドップラ - 効果タイプ 1 について、

「相対論的な式と非相対論的な式は、光速を c 、粒子の速度を v として、前者を $v \ll c$ のもとに近似をすれば後者に式に一致する。」

という法則を適用して正しい式を与えておくことにする。

光源 S が v_S の速度で観測者 D に近づく場合の光のドップラ - 効果の式は、(1.9) 式：

$$f_{D1} = f_S \frac{c}{c - v_S}$$

そのままではなく、 $v_S \ll c$ の近似から、

$$\frac{c}{c - v_S} = \left\{ 1 - \left(\frac{v_S}{c} \right) \right\}^{-1} \approx 1 + \left(\frac{v_S}{c} \right)$$

とし,

$$f_{D1} = f_s \left\{ 1 + \left(\frac{v_s}{c} \right) \right\} \quad (1.13)$$

が, 相対論的な式を近似した式となる.

例 3 おとめ座の銀河団から来る光の波長の分布を, 近くの星から来る光のものと比較すると, 波長 λ のずれを $\Delta\lambda$ として,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 3.9 \times 10^{-3}$$

となるというデータが得られている. これは宇宙が膨張しつつある証拠の一端と考えられていて, 波長が長い方へずれるので赤方偏移と言われている.

おとめ座の銀河団はどの程度の速さでわれわれから遠ざかっているか算出してみよう. この速さを V とおくと, $v_s = -V$ として, ドップラ - 効果の波長 λ' は,

$$\lambda' = \frac{c - v_s}{f_s} = \lambda \frac{c + V}{c}$$

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda \frac{c + V}{c} - \lambda$$

したがって,

$$\frac{V}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

$$V = 3.9 \times 10^{-3} c = 3.9 \times 10^{-3} \cdot 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

故に,

$$V = \underline{\underline{1.2 \times 10^6 \text{ m/s}}}$$

となる.