II.波動・場による構造(物理カリキュラム2年目）– –前期第4週目頃から

1–2　波の位相

≪ この項で学ぶこと ≫
[**位相，振動数・波長，球面波と平面波，位相の速さ，位相のガウス平面表示，波の強度**]

★　位相

粒子 A から発信された力という“ 信号 ”が，媒質を次々と変位させせることによって伝わり，粒子 B で受信される．物理の世界では，この現象を総称して「波動」と呼ぶ．“ 信号 ”にたとえたのではあるが，この場合，伝達される力自体は見ることはできない．伝達の途中の様子は媒質の変位によって知ることができるが，この媒質の運動も目に見える場合と，見えない場合とがある．しかし，目に見えない場合でも，何らかの方法で観測することができるから，波動の物理学が成り立つのである．

媒質の変位を表す式については，前節では，縦波の場合，

$$X(t,x) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

横波の場合，

$$Y(t,x) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

と記していたが，この節では総合的に議論するため媒質の変位を， X や Y ではなく，ψ であらわすことにし，3 角関数 cos の変数（3 角比なら，角度の部分）を θ とおいておき，

$$\psi(t,x) = A\cos\theta$$

の形とする．θ を**位相**と呼ぶ．位相は

$$\theta = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \theta_0$$

の形が考えられる．今までは，特に $\theta_0 = 0$ の場合のみを見ていたが，$x = 0$ の位置での媒質の変位が時刻 $t = 0$ のとき，いつも $\psi(0,0) = A$ から始まるとは限らない．やや一般性を持たせ，「 $x = 0$ の位置での**初期位相**を θ_0」とおいて，

$$\psi(0,0) = A\cos\theta_0$$

から始まるとする．

問 1 媒質の変位が $\psi(t,x) = A\sin\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$ で表されている波は，コサインの表示に直すと．$x = 0$ の位置での初期位相がどんな値の波か．(*o

同じ波の 2 つの異なる時刻 $t = t_1, t_2$ ときの位相，2 つの異なる位置 $x = x_1, x_2$ における位相，あるいは，2 つの異なる波の位相を比べることを考える．これらのどれかの場合の，それぞれの媒質の変位を ψ_1,ψ_2 とおいて，

$$\begin{cases} \psi_1 = A\cos\theta_1 \\ \psi_2 = A\cos\theta_2 \end{cases}$$

と表す．波が異なる場合には一般に振幅も異なるが，ここでは簡単な場合とし同じ A とした．2 つの位相 θ_1,θ_2 について，n を整数として，

【1】$\theta_2 - \theta_1 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots = 2n\pi$

の関係があるとき，2 つの位相は bf 同位相であると呼ぶ．また，

【2】$\theta_2 - \theta_1 = \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots = (2n+1)\pi$

の関係があるとき，2 つの位相は bf 反位相であると呼ぶ.

同位相のとき，$\theta_2 = \theta_1 + 2n\pi$ であるから，3 角関数の周期の関係から，

$$\psi_2 = A\cos\theta_2 = A\cos(\theta_1 + 2n\pi) = A\cos\theta_1$$

振幅が等しい場合には，$\psi_2 = \psi_1$，すなわち，2 つの変位は等しい．反位相のとき，$\theta_2 = \theta_1 + (2n+1)\pi$ であるから，

$$\psi_2 = A\cos\theta_2 = A\cos\{\theta_1 + (2n+1)\pi\} = -A\cos\theta_1$$

振幅が等しい場合には，$\psi_2 = -\psi_1$，すなわち，2 つの変位は大きさは同じで互いに逆向きである．

★　振動数・波長

$\psi(t,x)$ は，時刻 t と位置 x についての 2 変数関数であり，くわえて，t に関しても，x に関しても周期性持っている．図 1.15 は $\theta_0 = 0$ の場合に，それぞれの軸についての媒質の変動を示している．

【1】周期と振動数

周期 T とは，ある位置における調和振動の周期のことである．簡単にするため位置 $x = 0$ の点の時刻 $t = 0$ と $t = T$ の波の位相差が 2π に等しいとすると，

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 &= \{\omega T + \theta_0\} - \theta_0 \\ 2\pi &= \omega T \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned} \tag{1.5}$$

これが周期と角振動数との関係である．

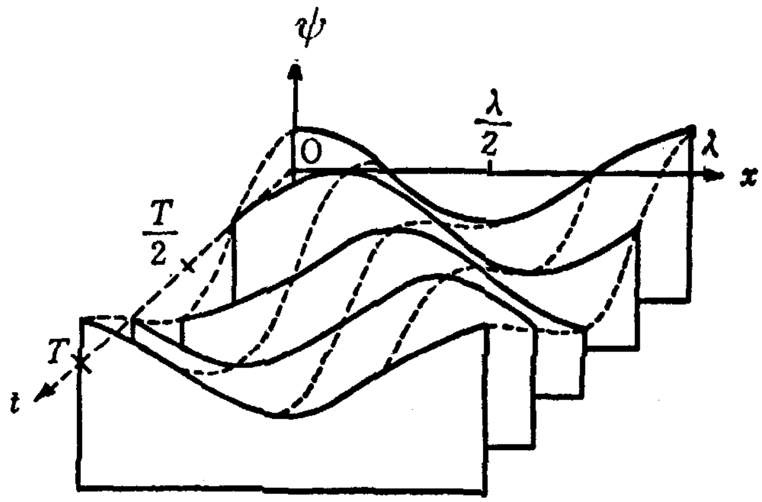


図 1.15: 波の時間的・空間的変動

一方,「ある位置を単位時間に波の同位相の部分（例えば，山に相当する位相）が通過する回数が**振動数** f」であるが， 位置 $x = 0$ の点時刻 $t = 0$ と $t = 1$ の波の位相差が $2f\pi$ に等しいとすると，

(*o **問 1** の答：$\theta_0 = -\dfrac{\pi}{2}$

$$2f\pi = \omega \times 1$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \tag{1.6}$$

振動数 f と周期 T の関係は，例えば，$T = \frac{1}{3}$ 秒とすれば，$f = 3$ Hz．ある位置での変位のグラフを横軸 t について描けば，図 1.16 のように 1 秒間に山が 3 つ数えられる．

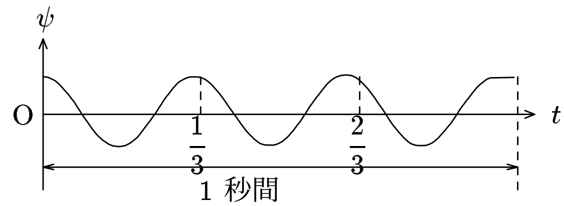


図 1.16: 振動数と周期の関係

【2】波長

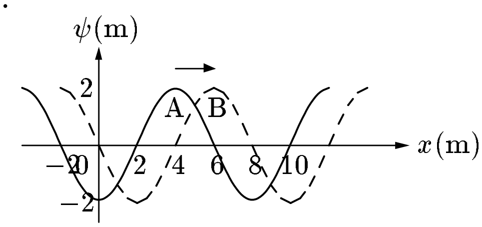
「**波長** λ は，ある時刻における同位相の部分（例えば，山に相当する位相）の並ぶ距離」であり，空間的な周期性を表す．時刻 $t = 0$ のとき，位置 $x = 0$ の点 と $x = \lambda$ の波の位相差が -2π に等しいとすると，

$$2\pi = \omega\frac{\lambda}{c} = 2\pi f\frac{\lambda}{c}$$

$$c = f\lambda \tag{1.7}$$

これが，振動数，波長と波の伝わる速さの関係である．

問 2 時刻 $t = 0$ s と $t = 0.1$ s の調和振動波が実線と破線で図に示されてる．縦軸は棋質の変位 phi を，横軸は位置を示す座標 x を表す．実線の山 A は 0.1 s 後に破線の山 B に移った．



(1) この波について，次の量を求めよ．

(a) 振幅　(b) 波長　(c) 伝わる速さ

(d) 振動数　(e) 周期

(2) 位置 $x = 0$ m の点の棋質の振動を，縦軸は棋質の変位 ψ ，横軸は時刻 t をとってグラフに描け．(*p

★　球面波と平面波

粒子 A から波が発生しているとき， A を**波源**という．媒質が均質な場合には，波は A 点を中心として球対称に伝わって行く．同じ半径 r の球面は同じ変位であるばかりでなく，同じ値の位相となっている．そして，同じ変位の同位相の球面が等間隔 λ で連なり広がって行く.「同じ値の位相の部分をつなげた面を**波面**と呼び．波面が球面のときの波を**球面波**と言う.」球面波は 3 次元空間を伝わる波であり，それほど簡単に目にすることは少ないが，これと同じ機構で発生する 2 次元空間を伝わる波である図 1.17 のような円形波は，例えば，静かな池の水面上の 1 点に石を投げ込んだりして容易に見ることができる．この波の進行方向は放射状であり，振幅は一定ではなく，波源から離れるにしたがって小さくなっているというような特徴は，球面波についても見られる特徴となる．

ここで，問題の関心を波源近くの波から，波源から十分離れた限られた領域の波に移す．波源から遠ければ遠いほど，また，考察する波面の領域が狭ければ狭いほど，その部分の波面は球面

(*p **問 2** の答：(1)(a) 2 m，(b) 8 m，(c) 20 m/s，(d) 2.5 Hz，(e) 0.4 s，(2) $\psi = -2\cos 5\pi t$ のグラフ

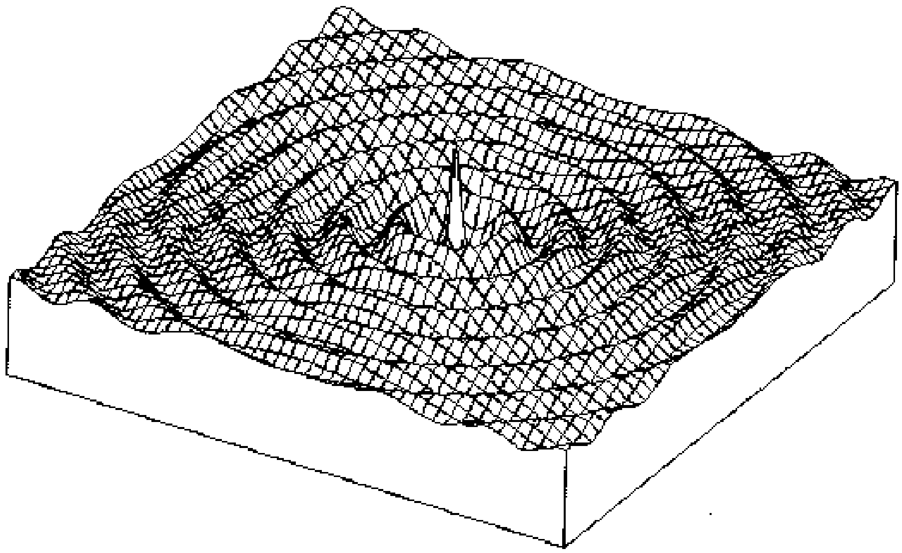


図 1.17: 水面の波

であっても，極く平面に近い（図 1.18）.「波面が平面と考えられ，波の進行方向がこの波面に垂直に設定された x 軸方向のみとみなすことのできる波を**平面波**と呼ぶ.」これ以降，波のふるまいの考察は主に平面波を使ってなされる.

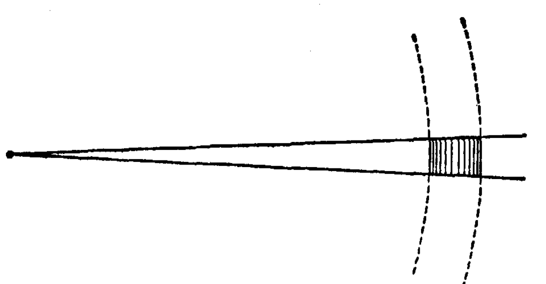


図 1.18: 平面波近似

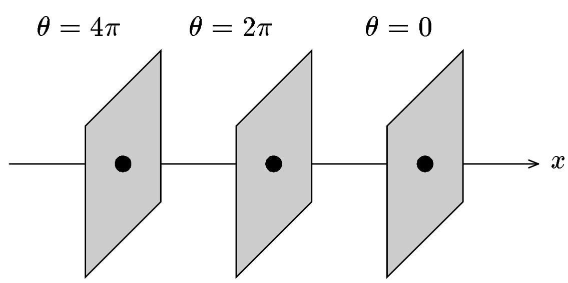


図 1.19: 平面波の波面

★　位相の速さ

図 1.19 では，媒質の変位が最大，波の山に対応する波面を示す．各波面は，それぞれ，位相の値，$\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \cdots$ 等で指定される．今，$\theta = \theta_1$ で定まるある波面に着目して，その動きを調べることにする.

$$\theta_1 = \text{const.} = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \theta_0$$

この式を x について解くと，

$$x = ct + \frac{c}{\omega}(\theta_0 - \theta_1)$$

この波面は，時刻 $t = 0$ のとき，位置 $x = \frac{c}{\omega}(\theta_0 - \theta_1)$ で示されるある位置から出発し，速さ c で $+x$ 軸方向に進む．ここで今まで，力の伝達の速さ，波の伝わる速さと呼んでいたものが，式の上では，**位相の速さ** であることが明らかになった．

位相の運動が，$-x$ 軸向きである場合には，

$$x = -ct + \text{const.}$$

の形の式となる．この場合の位相は

$$\theta = \omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + \theta_0$$

と表されるのである．

波は媒質の変位によって伝わるので，位相速度は媒質によって異なる．ただし，その具体的な関係式は，物質（光の場合であれば真空も含めて）の構造を理解した後で導かれるものであり，詳しくは媒質以外の要素もあるが，ここではまだ論じない．媒質 I と媒質 II の位相速度を，それぞれ，$c_{\mathrm{I}}, c_{\mathrm{II}}$ とおく．光の場合ならば真空中の光速というように，何か基準となる媒質中の位相速度を c_0 として，これに対して，

$$c_{\mathrm{I}} = \frac{c_0}{n_{\mathrm{I}}}, \qquad c_{\mathrm{II}} = \frac{c_0}{n_{\mathrm{II}}} \tag{1.8}$$

とおき，n_{I}， n_{II} を媒質 I，II の**屈折率**と言う．何故，屈折率と呼ぶかは，2-2 で屈折の法則を習って初めて分かることである．

★ 位相のガウス平面表示

位相の時間変化と媒質の変位の関係を図にして見るためには，代数構造 I-A-2-3 で習った複素数を平面上の点に対応させてみるガウス平面表示を用いる．ここでは，前項のように特定の波面（位相 θ_1）の運動を見るのではなく，特定の位置における位相 θ の時間変化と媒質のその点のおける単振動を見て行くのである．式を簡単にするため， $x = 0$ の場合を考えると，

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

となるから，位相の時間に関する変化率は角振動数ω である．ここで混乱しないように注意すると，$\cos\theta$ が 3 角比であり，θ が実在のある角度を表している場合であれば，ω はその角度の時間変化であるから，角速度 と呼ばれる量となるのであるが，位相は実空間上のどの角にも対応していないのである．

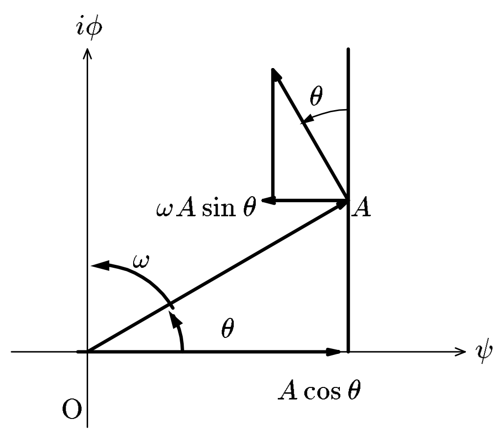


図 1.20: 波動の複素数表示

図 1.20 のように，ガウス平面の横軸に媒質の変位 ψ をとり，縦軸に補助的な量 ϕ を導入する．位相 θ は複素数 $\psi + i\phi$ の偏角，振幅 A は複素数 $\psi + i\phi$ の絶対値となるように，波を表示することができる．

$$\theta = \arg(\psi + i\phi), \qquad A = |\psi + i\phi| = \psi^2 + \phi^2$$

このように表示すると，時刻 $t=0$ のときの複素数表示の波[*q]は，ガウス平面上の

$$\psi = A\cos\theta_0, \qquad \phi = A\sin\theta_0$$

の点にあり，その点から「ガウス平面上の角速度」ω で原点 O を中心，半径 A の円運動をする．ただし，実際の媒質の変位は，つねに実軸上の射影 $\psi = A\cos\theta$ として現われる．

一方,位相 θ がガウス平面上で“ 角速度 ”ω の回転をするとき，この平面上の点 $\psi + i\phi$ は原点を中心で半径 A の円周上を速さ ωA で動く．この“ 円運動の速さ ”ωA は前項で見た「位相の速さ」とは意味の異なるものであり,「点 $\psi + i\phi$ の速度ベクトルの実軸上の射影が媒質の変位の単振動の速度 v を表している.」この値は，図 1.20 より，

$$v = \omega A\sin\theta = \omega\phi$$

となる．すなわち,「複素数表示の波の虚数部分は，媒質の変位の速度を v として，$\dfrac{v}{\omega}$ を表している．波についての考察において，単に媒質の変位のみでなく，このような内容の虚数部分を絶えず伴った量を取り扱って行く方が有利な例が，以降しばしば現われる．

★　波の強度

II-1-1 で，いろいろな波の例を見たのであるが，その際，いわゆる弾性波については，媒質の変位，および，振幅は確かに長さ（例えば，メートル） 単位で表せたのであるが，光波の例のように，一般にはこれらは長さの単位とはなっていないことが分かった．波動の伝播によって，力が伝えられるとともに，力に付随してエネルギーも伝播する．この項では，このことについて考えるのであるが，まず，**波の強度** I を次のように定義する．

$$I = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}(\psi^2 + \phi^2)$$

媒質の変位 ψ の一周期当たりの平均は $<\psi>=0$ であるが，I は ψ の一周期当たりの 2 乗平均を $\langle\psi^2\rangle$ を意味している．すなわち，

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T \psi^2 dt$$

この計算は ψ が周期関数であるから，$t' = t - c$,　(c：定数) として，

$$\int_0^T \psi^2 dt = \int_c^{T+c} \psi^2 dt = \int_0^T \psi^2 dt'$$

であるから

$$\psi = A\cos\left\{\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \theta_0\right\} = A\cos\omega t'$$

とおいて，

$$I = \frac{A^2}{T}\int_0^T \cos^2\omega t' dt', \quad (T = \frac{2\pi}{\omega})$$

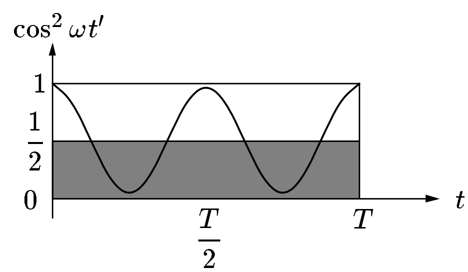


図 1.21: 強度の計算

この定積分は，図 1.21 から，

$$\int_0^T \cos^2\omega t' dt' = \frac{1}{2}T$$

となるから，

[*q] $\psi + i\phi = Ae^{i\theta}$ と表すのは，高 3 でこの関数を習ってから，同時期に，物質の構造 III-3-4 の交流回路ではどんどん使う．

$$I = \frac{1}{2}A^2$$

であることが示される．

$\boxed{\textbf{例 1}}$ 線密度 ρ の弦の変位を $\psi = A\cos\theta$ とおくと，弦のエネルギー密度（単位の長さ当たりのエネルギー）W について考察する．II-1-1 の調和振動の項で，弾性定数 $k = m\omega^2$ であったことを参考にすると， 弦の単位の長さの部分のポテンシャル・エネルギー U は,

$$U = \frac{1}{2}\rho\omega^2\psi^2$$

弦の単位の長さの部分の運動エネルギー K は,

$$K = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2\phi^2$$

これより,

$$W = K + U = \frac{1}{2}\rho\omega^2(\phi^2 + \psi^2) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

であるから，エネルギー密度と強度の関係は，ここでは,

$$W = \rho\omega^2 I$$

となっている．

また，このエネルギーが速さ c で流れて行くので，単位時間当たり，単位断面積を通過するエネルギー J は,

$$J = Wc = \rho\omega^2 cI = \frac{1}{2}\rho\omega^2 cA^2 \tag{1.9}$$

と表される．波は力の伝達であるが，量として具体的に運ばれるものはエネルギーなのである．

$\boxed{\textbf{問 3}}$ 原点 O を波源として均一に伝わる球面波は，例えば C =const. として,

$$\psi(t, r) = \frac{C}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

のような形となる．振幅 A が調和振動波のように定数ではなく， O 点からの距離 r に反比例する理由を，波の強度から説明せよ． (*r

[参考]

$\boxed{\textbf{例 2}}$ 電磁波の媒質は，真空であって空間のどの部分も質量 0 であり運動エネルギーに相当するものもないが，それでも波のエネルギー密度 （単位の体積当たりのエネルギー）W は存在する．I-1-1 で概略的に述べ，詳しい議論は II-3-2 で展開されるが，電場の時間変化が磁束密度を誘導し，磁束密度の時間変化が電場を誘導するので，x 軸方向に進行する電場 $(0, E_y, E_z)$, （大きさ $E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2}$）と磁束密度 $(0, B_y, B_z)$, （大きさ $B = \sqrt{B_y^2 + B_z^2}$）との間には,

$$E_y = A\cos\theta = cB_z, \qquad E_z = A\sin\theta = -cB_y$$

の関係がある．光速 c，真空の誘電率を ϵ_0 とおくと,

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0\{E^2 + (cB)^2\} = \epsilon_0 A^2$$

と与えられる．詳しい証明は II-3-2 で行う．ここでは,

$$W = 2\epsilon_0 I$$

となっている．

(*r $\boxed{\text{問 3}}$ の答：各波面当たりの強度が等しいから， $A \times \pi r^2$ =const. でなければならない．