

## II. 波動・場（物理カリキュラム3年目）

## 3-3 電磁場

◀ この項で学ぶこと ▶

[「磁荷」は存在しないこと，アンペールの法則，ロレンツ力，ファラデーの法則，アンペールの法則の拡張，電磁波]

### 「磁荷」は存在しないこと

磁石から他の磁石や鉄族に働く引力，ないし，斥力は，いわゆる「磁力」として，非常に良く知られている．その説明によれば，静電気力が働く場合における正負の「電荷」に対応した正の（あるいは  $N$  で表される）磁荷と負の（あるいは  $S$  で表される）磁荷があって，これまた，静電気力と同様に，同符号の磁荷間には斥力が，異符号の磁荷間には引力が働く，というものである．しかし，電荷を帯びた物体と磁荷を帯びた物体の間には，決定的な違いがある．前者の場合であれば，何らかの方法である数の電子を取り去れば正電荷を帯びた物体をつくることができ，反対に，何らかの方法である数の電子を付け加えれば負電荷を帯びた物体をつくることのできる．後者，磁気を帯びた物体というものは正の磁荷のみを帯びさせることも，負の磁荷のみを帯びさせることもできない．磁荷を考えるモデルでは，一つの物体の両端に必ず等量異符号の磁荷が現れる場合しかあり得ないのである．はじめ磁石になっていなかった鉄族の場合でも，磁力が働いている状態では同じような磁荷の分布となる．

そして，荷電物体とのこのような違いは，静電気力といわゆる磁力との作用の違いにも現れて来る．前者の力と違って，一つの物体に単独の引力のみとか，単独の斥力のみが働くことは決してあり得ない訳で，物体の一方の端が引力を受けるとすれば，他方の端は斥力を受ける．磁力はこのように必ず「偶力のモーメント」の形で一つの物体に作用するのである．偶力のモーメントについては，単元 I-4 の内部構造のある物体で習った．

このように考えて行くと，磁荷を考えるモデルのままでは，前の章で静電場の法則を組み立てて行った場合の出発点で採用した方針，まず，粒子の作る場を考察するということが不可能となる．何故ならば，粒子とは大きさが無視できる物体であり，粒子内の2点に等量異符号の磁荷が存在するという考え方も，腕の長さが無視できる偶力のモーメントという考え方も，共にできないからである．

ここで「電場に関するガウスの法則」に対応する磁気についての法則を調べてみよう．電場  $E$  に「力の場」という意味で対応的な量を磁束密度と呼び， $(^*p B$  と表す．また「電気力線」に対応する磁束密度の力線は「磁束線」と呼ぶことにする． $(^*q$  「磁束密度に関するガウスの法則」は，

$$\text{「磁束線の貫く断面積} \times \text{磁束密度} = 0 \text{」}$$

$(^*p$  磁場  $H$  は，主に単元 III-2 で取り扱われる．

$(^*q$  「磁気力線」はほとんど使わない．

となる．この法則を大きさの無視できない物体を閉曲面で囲んだ場合に適用した場合には，正（N）の磁荷から出る力線と，負（S）の磁荷に入る力線の数と同数なので，右辺が 0 となっていると解釈できる．しかし，磁束線の源を粒子に限った場合，あるいは「電場に関するガウスの法則」のところで説明したのと同様に，この法則を，力線が曲面を垂直かつ，一様に貫く簡単な場合から，もっと一般化して，微小の閉曲面で囲んだ場合を計算の出発点とした場合，上に述べた理由から「磁荷」は意味を失うから，逆に「磁束密度に関するガウスの法則は，磁荷という量が存在しないことを意味する関係」と考えることができる．

### アンペ - ルの法則

前項で見たように「磁束密度に関するガウスの法則」からは，磁束線の発生源を調べ，磁束密度を求めることはできない．そこで，静電場に関するもう一つの法則である「電場に関する循環の法則」に対応する磁気側の法則を考えてみよう．その手がかりとなる実験は，図 3.31 のようなエ - ルステッドが（1820 年に）おこなった実験で，電流を流すとその付近の方位磁石の磁針が動く．磁石を動かすことで周辺の磁束線の形を知ることができる．

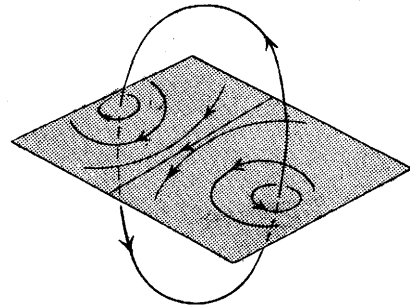


図 3.31: エ - ルステッドの実験

磁束線が存在する場所では，磁石だけでなく電流が流れている別の導線を置いて力を受ける．電流とは荷電粒子（電子）の流れである．また，磁石の内部においても電子の運動が存在している．単に，荷電粒子を置いただけでは，電場による力以外の力を受けない．このことから，静電気場を作るのも電荷であり，静電場から力を受けるのも電荷であったように，磁束密度を作るのもやはり電荷であり，磁束密度から力を受けるのもやはり電荷である．ただし，単に電荷を置いただけでは，磁束密度を作りもしなければ，そこから力も受けない．当面作る方を問題とするなら，電流が端的に示すように「速度を持った荷電粒子の存在が，磁束密度の発生源である．」

荷電粒子の動きを単純化するため，十分細い導線を定常な電流  $I$  が循環して流れ続けているものに置き換えて考えることにする．広がりが無視できる荷電粒子の代わりであるから，導線は「十分細く」なければならない．一方，まず初めに，時間変化しない場を考えるとすれば，1 個の荷電粒子が固定点からは去ってしまう訳であるから，同じ電荷と同じ速度を持った他の粒子に，十分短い時間内に次々と置き換わっていなければならない．「定常な」という条件は，このことを意味している．

一方，静電場の発生には，粒子側からは電荷  $Q$ ，周囲の空間側からは真空の誘電率  $\epsilon_0$  が関係し，力線が  $\frac{Q}{\epsilon_0}$  によって定まったのに対応して，磁束密度の発生周囲の磁気的な環境を示すものとして真空の透磁率と呼ばれる定数を導入する必要がある．これを  $\mu_0$  と表す．

磁束線が導線から出て行くとか，導線に入るということを仮定した矛盾のない理論を作ることはできない．図 1 から予想できるように，磁束線は導線の周りにル - プ状に巻きつくよう発生する．簡単に計算できる場合としては，径路長  $l$  の閉曲線内部を貫く電流を  $I$  とすると，磁束密度の径路に沿った成分を  $B_l$  が一様に作られるとして，

$$l \times B_l = \mu_0 I \quad (3.11)$$

の関係を通して、磁束密度を定めることができる。この式の左辺をもう少し一般化するには、「電場に関する循環の法則」の左辺が  $\oint E_i dl$  の積分形式で与えられていたことを参考にする。また、場について重ね合わせの原理が成り立つことを考えれば、一般に、径路  $l$  の閉曲線内部を貫く電流の和を  $\sum_i I_i$  とすると、

$$\oint B_i dl = \mu_0 \sum_i I_i \quad (3.12)$$

と表される。ただし、径路、および、 $B_i$  の正の向きを約束して、この向きを右ねじを回す向きとしたとき、右ねじの進む方向に貫く電流は正、逆向きの電流は負とする。(図 3.32 参照。図のように右手を回しても良い。)「磁束密度に関する循環」は、「電場に関する循環」のように決して 0 にはならないばかりか、適当なル - プに沿った磁束密度成分は、このル - プ内の電流の総計  $\sum_i I_i$  と、その周囲の磁気的な環境を示す真空の透磁率  $\mu_0$  の積によって決定される。この関係を「アンペ - ルの法則」と呼ぶ。

#### 例 1 直線電流の作る磁束密度<sup>(\*)</sup>

荷電粒子が直進する場合に対応して、非常に長い直線状の導線に電流  $I$  を流す場合を最も基本的な場合として最初に取り扱う。ただし、導線は十分遠方ではル - プをなしてつながっていないければ、一様な磁束密度は生じない。

閉曲線を導線を中心とする半径  $r$  の円とする。導線から距離  $r$  離れた点に電流が作る磁束密度  $B(r)$  は、アンペ - ルの法則を適用する。径路の正の向きは、1 電流だから、これが正の値となるような回り方を選ぶ。左辺は

$$\oint B(r) dr = 2\pi r \times B(r)$$

これは、もちろん、半径  $r$  の円の円周が  $2\pi r$  であることから、積分形式でない方の式で  $l = 2\pi r$  とおけば得られる。

$$2\pi r \times B(r) = \mu_0 I$$

結論として、十分長い直線電流の作る磁束密度は、導線からの距離  $r$  のみの関数で、

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3.13)$$

となることが分かる。

アンペ - ルの法則の閉曲線は、必ずしも力線に沿ってとる必要はないが、ここでは、磁束密度は円の接線方向以外の成分を持たないから、この円が磁束線だと分かる。したがって、図 3.33 のように、 $r$  のいろいろな値に対して同心円状の磁束線が描ける。

このような力線(磁束線)には、前章で見た力線ときわだって異なる特徴があることに注意しよう。磁束線は一周していて、この線上では磁束密度の大きさはどこも同じ値を持ち、正電荷から出発して負電荷に終わる静電場の電気力線と違い、出発点も終点もない。しかし、このことを電気力線と磁束線の違いだとは思いつまみないように。やがて、この磁束線に似た電気力線も習うようになるのだから。

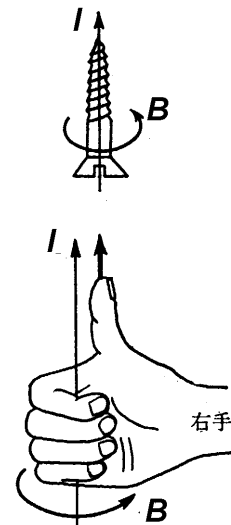


図 3.32: 右ねじによる向きの指定

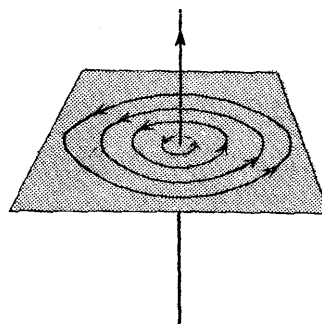


図 3.33: 直線電流の作る磁束密度

(\*) 円電流はこの法則から簡単には求まらないので、取り上げない。

**問 1** 図 3.34 のような同軸ケ - ブルの中央の半径  $r_0$  の部分に、紙面の裏から表に向けて電流  $I$  を流し、半径  $r_1$  から半径  $r_2$  の部分に、紙面の表から裏に向けて電流  $I$  を流したとき、(a) 中空部分、および、(b) 外部空間の磁束密度を求めよ。<sup>(\*)s</sup>

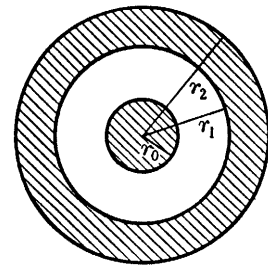


図 3.34: 同軸ケ - ブル

**例 2** ソレノイド・コイルの作る磁束密度

円筒に導線をらせん状に巻いたものをソレノイド・コイルと呼ぶ。円筒は十分長いとし、導線の単位の長さ当たりの巻き数を  $n$  とする。コイルに定常電流  $I$  を流したとき、コイル内に作られる磁束密度について考えてみる。コイルの外側の磁束線はコイルの端が十分遠いので、円筒から十分遠くへ広がってしまっている。このような場合、コイルの外の磁束密度は無視できる。

図 3.35 のように、円筒の軸に平行な 2 辺が長さ  $l$  で、そのうちの 1 辺が円筒内を通る長方形を選び、図の向きを径路の正の向きとする。図で長方形が切る円筒の断面は  $\odot$  で示すように紙面の裏から表へ電流が貫くとする。反対側の  $\otimes$  は紙面の表から裏に電流が貫くことを表しているが、径路の外側であるから関係して来ない。

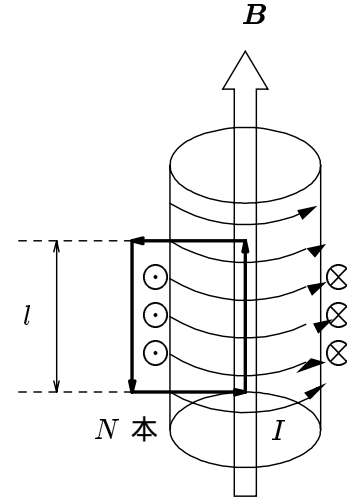


図 3.35: コイルの作る磁束密度

径路の内部を横切る導線の本数は長さ  $l$  に対して、 $N$  本とする。電流の和は  $NI$  である。ここにアンペールの法則を適用しよう。長方形の円筒の軸に垂直な辺は磁束密度と垂直なので、その部分の径路に沿った成分は 0 である。

$$l \times B_{in} + l \times B_{out} = \mu_0 NI$$

問題の仮定より、 $B_{out} = 0$  だから、

$$B_{in} = \mu_0 \frac{N}{l} I = \underline{\underline{\mu_0 n I}} \tag{3.14}$$

ここで、単位の長さ当たりの巻き数は  $n = \frac{N}{l}$  であることを使った。

結果は、コイル内の径路の軸に平行な辺をコイル内で平行移動させてもかわらないから、コイル内の磁束密度は一様であることが分かる。 $B_{in}$  の向きは、図 3.35 のように、指定径路の向きに一

致したが、結論として、ここでも「右ねじの法則」<sup>(\*)t</sup> が使えて、コイルを流れる電流の向きを右ねじを回す向きとすると、コイル内の磁束密度の方向はねじの進む方向に作られる。

**問 2** 図 3.36 のような、ド - ナツ型の筒に導線を  $N$  回巻き、定常電流  $I$  を流した。内径  $r_1$ 、外径  $r_2$  として、中心  $O$  からの距離  $r$  が (a)  $r < r_1$ 、(b)  $r_1 < r < r_2$ 、(c)  $r > r_2$  の各部分の磁束密度を求めよ。<sup>(\*)u</sup>

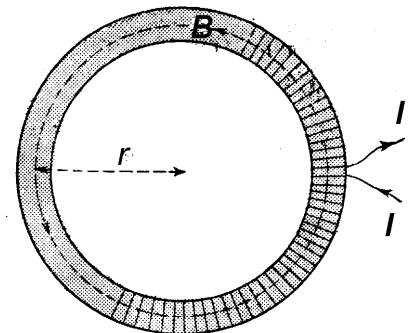


図 3.36: ド - ナツ型コイルの作る磁束密度

<sup>(\*)s</sup> 問 1 の答: (a)  $r_0 < r < r_1$  のとき、 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  . (b)  $r > r_2$  のとき、 $B = 0$  .

<sup>(\*)t</sup> 代数構造のベクトル積の所でも、この用語を導入する。

<sup>(\*)u</sup> 問 2 の答: (a)  $B = 0$  , (b)  $B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$  , (c)  $B = 0$

## ロ - レンツ力

2本の導線に定常電流を流したとき，導線間に働く力をアンペ - ル力と呼ぶ．導線がたがいに平行で共に十分長い直線となっているとする．電流の大きさを  $i, I$ ，導線の間隔を  $r$ ，真空の透磁率を  $\mu_0$  とおくと，導線の単位長さあたりに働くアンペ - ル力の大きさ  $F/l$  は，

$$F/l = \frac{\mu_0 i I}{2\pi r} \quad (3.15)$$

となり，図 3.37 のように，電流  $i, I$  が同じ向きに流れているときは，引力，たがいに逆向きに流れているときは斥力となる．電流が定常でなかった

り，導線が傾いたり曲がっていたりすれば，上式のような簡単な関係は破れる．見かけは，磁石が鉄を引きつけるような力とかなり異なり，また，偶力のモ - メントにもなっていないが，これまでの説明から，アンペ - ル力のこの形が最も単純な磁気的な力を表していることが分かるであろう．

**問 3** 十分長い直線状の導線 2 本を，距離  $2r$  離して並べ，それぞれに  $I_1$  と  $I_2$  の大きさの電流を同じ向きに流す．これらの電流により，導線間の中央の点につくられる磁束密度を求めよ．また，この点を通りこれらの導線に平行で十分長い導線に，大きさ  $i$  の電流を逆向きに流したとき，この導線の単位長さあたりに働く力を求めよ．(\*v)

一方，**例 1** で見たように，それぞれの電流はその周りに同心円状の磁束線を作っている．静電気力は電気力線に沿って，すなわち，電場に平行な方向に作用したのだが，アンペ - ル力は磁束線に沿って作用しないことは，図 3.33 と 図 3.37 を重ねてみれば明らかである．この場合の力と場の関係を調べるために，電流  $I$  の作った磁束密度  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  によって，電流  $i$  が力を受ける方のみに着目して考えて行く．

図 3.39 の電流  $I, i$  の向きの記号は， $\odot$  は紙面の裏から表， $\otimes$  は紙面の表から裏向きと約束する．図の (a) 引力，(b) 斥力の 2 つの図で，電流ベクトル  $i$  を通る磁束線は半径  $r$  の円で電流  $I$  に対して右ねじを回す向きであるから，電流  $i$  の所の磁束密度ベクトル  $B$  の向きは円の接線で，図の上向きである．それに対する (a) においても，(b) においても成り立つアンペ - ル力ベクトル  $F$  の関係は，ベクトル積の演算記号  $\times$  を用いて，

$$F/l = i \times B, \text{ または } F = i \times Bl \quad (3.16)$$

ただし，この例では  $i \perp B$  であるから，力の大きさ  $F$  は，

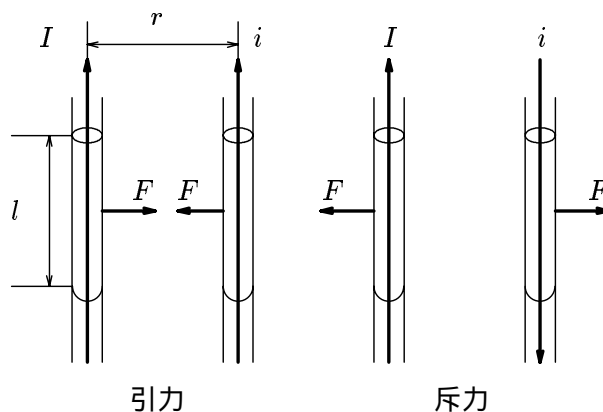


図 3.37: 2 直線電流間の力

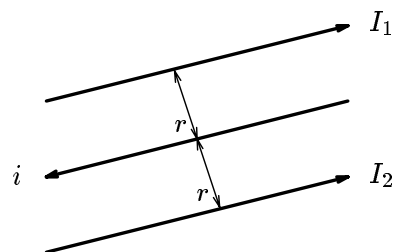


図 3.38: 問 3 の図

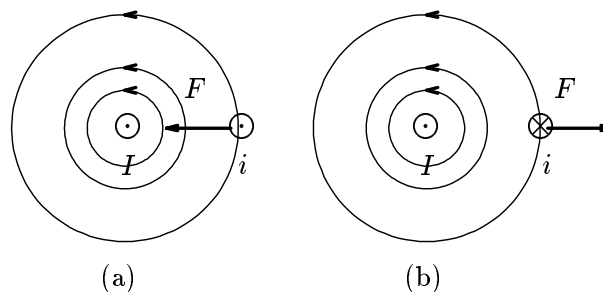


図 3.39: 磁束密度と力

(\*v) **問 3** の答:  $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 - I_2}{r}$ ,  $F/l = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{I_1 - I_2}{r}$

$$F/l = iB = i \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 iI}{2\pi r}$$

で、その向きは図 3.40 のようにベクトル積の約束にしたがい、 $F$  は  $i$  にも  $B$  にも垂直である。

さらに、電流  $i$  を傾けて行く実験をすれば、 $i \parallel B$  とき  $F = 0$  となるし、ベクトル積の関係が一般に成り立つことが判明する。

ここで、電流から、もっと基本的な電荷  $q$  の荷電粒子に置き換えて、この力を書き換えてみよう。電流  $i$  は電荷の時間変化のことであるから、導線中の長さ  $l$  の部分の電荷  $q$  が時間  $\Delta t = \frac{l}{v}$  かけて入れ替わると考えることができる(図 3.41)

$$i = \frac{q}{\Delta t} = \frac{qv}{l} \quad (3.17)$$

ベクトルの関係としては、 $i \propto v$  だから、

$$i = \frac{qv}{l}$$

(2.16) 式に代入すれば、

$$F = qv \times B \quad (3.18)$$

前章で取り扱った電場  $E$  による力と合わせて、

$$F = q(E + v \times B) \quad (3.19)$$

この力をロ・レンツ力と呼ぶ。

**例 3** 磁束密度  $B$  の一様な場の中に、質量  $m$ 、電荷  $q$  の粒子が磁束密度に垂直に速さ  $v$  で入って来た。このときの荷電粒子の運動を調べてみよう。

$B$  によるロ・レンツ力は、絶えず粒子の運動方向に垂直に働くから、粒子は等速円運動をする。円の半径を  $r$  とおくと、運動方程式の円の中心向き成分は、

$$m \frac{v^2}{r} = qvB$$

となるから、円の半径は、

$$r = \frac{mv}{qB}$$

また、円運動の周期  $T$  は、

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{m}{qB}$$

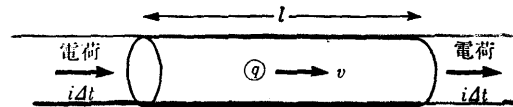


図 3.41: 電流と荷電粒子の運動

**問 4** 導線の単位の長さ当たりの巻き数  $n$  の十分長いコイルに定常電流  $I$  を流した。コイル中に、質量  $m$ 、電荷  $q$  の粒子がコイルの軸に垂直に速さ  $v$  で入って来た。粒子の等速円運動の半径と周期を求めよ。ただし、コイルの半径は粒子の運動が妨げられない程長いとする。(\*w)

[参考]

II-3-1 の **例 4** で、十分長い荷電棒が、棒から距離  $r$  離れた点につくる電場を求めた。

棒に垂直に  $xy$  軸をとり、棒に沿って  $z$  軸をとる。この座標を慣性系  $K$  とする。電場を観測する点  $P$  を  $(x, y, z) = (r, 0, z)$  とすると、**例 4** から  $E_x = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r}$ ,  $E_y = 0$ ,  $E_z = 0$  となる。ただし、 $\sigma$  は電荷の線密度であった。

(\*w) **問 4** の答:  $r = \frac{mv}{q\mu_0 n I}$ ,  $2\pi \frac{m}{q\mu_0 n I}$

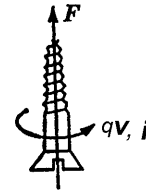
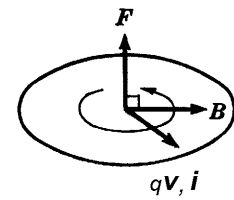


図 3.40: ロ・レンツ力の向き

棒の中の荷電粒子が  $+z$  軸向きに速さ  $v$  で動いているとする。(3.17) 式を参考にすると、棒には電流  $I = \frac{Qv}{l} = \sigma v$  が流れていることになる。P 点につくられる磁束密度は [例 1] より、 $B_x = 0$ 、 $B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \sigma v}{2\pi r}$ 、 $B_z = 0$  となる。

P 点に置いた電荷  $q$  の粒子を同じ速さ  $v$  で、同じ向き ( $+z$  軸向き) に走らせたとき、粒子にはロ - レンツ力

$$qE_x - qvB_y = q \left( \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r} - v \frac{\mu_0 \sigma v}{2\pi r} \right)$$

が働く。

この力を、別の慣性系  $K'$  ( $x', y', z'$ ) = ( $x, y, z - Vt$ ) から観測する。ガリレイの相対性原理によれば、力は同じ値となるはずである。今、 $V = v$  となる場合とすると、棒の中の荷電粒子は止まって見えるから、磁束密度は発生しないと考えられる。K 系における電場  $E$  と磁束密度  $B$  は、K' 系では電場  $E'$  のみに変換されている。これがもし、 $E'_x = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r}$  のままであれば、矛盾が起こることは明らかである。

実際には、どのようなことが起こっているのか。K 系と K' 系では電荷や電荷の線密度が同じ値をとらないのである。K' 系では電荷と電荷の線密度が、それぞれ、別の値  $q'$ 、 $\sigma'$  となるとすると、両系でロ - レンツ力が同じ値となるためには、

$$q'E'_x = q(E_x - vB_y)$$

$$q' \frac{\sigma'}{2\pi\epsilon_0 r} = q \left( \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r} - v \frac{\mu_0 \sigma v}{2\pi r} \right)$$

したがって、

$$q'\sigma' = q\sigma(1 - \epsilon_0\mu_0 v^2)$$

の関係がなければならない。もちろん、このような変換を取り扱うことは、ニュ - トンの運動法則を越えている。

(3.19) 式のロ - レンツ力は、I-1-1 で習ったガリレイの相対性原理は満たしていない。ロ - レンツ力を不変に保つような座標変換が特殊相対性理論のロ - レンツ変換なのであるが、このことについては、高校ではまだやらない。

### アンペ - ルの法則の拡張

[例 1] でやったような十分長い直線電流を考えるが、図 3.42 のように、導線の途中に平行板コンデンサ - を入れた場合を考えよう。前と同様に、考える径路は半径  $r$  の円として、アンペ - ルの法則を適用するのであるが、円がちょうどコンデンサ - の極板間を切るとき、この断面には導線はなく電流は流れていないから、磁束密度はこの付近だけ消えてしまうのであろうか。

実験によれば、そんなことは起こらずに、導線がある部分と同じ強さの磁束密度がつくられるから、アンペ - ルの法則の不備がここに現われて来る。

まず、電流  $I$  がコンデンサ - の  $+Q$  に帯電した極板に入りこみ、 $-Q$  に帯電した極板から出ていっている。 $\pm Q$  の電荷は、ここでは時間変化している。 $I$  と  $Q$  の関係は  $I = \frac{dQ}{dt}$  で与えられる。一方、前章の [例 5] で見たように、極板間の電場は、 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$  である ( $S$  は極板の面積。) したがって、電荷  $Q = \epsilon_0 S E$  より、

$$I = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} \quad (3.20)$$

導線の中では自由電子が流れているが、極板間は真空でいかなる荷電粒子も流れていない。しかし、上の関係は極板外の電流  $I$  と極板内電場  $E$  の時間変化が比例することを示している。

もし、電流がどの部分でも途切れることはない(電流保存則)とするならば、極板間には、導線を通るのと別の種類の電流が流れていると考えるべきである。 $\epsilon_0 S \frac{dE}{dt}$  を電束電流(\*\*と呼ぶ。径路の断面がコンデンサの極板間を切るとき、アンペールの法則は

$$\oint B_l dl = \mu_0 \epsilon_0 S \frac{dE}{dt}$$

電束電流はコンデンサのような一様電場以外にも、もちろん適用できる。一般に、

$$\text{電束: } \Phi_e = \epsilon_0 E \times (\text{力線の貫く断面積})$$

を計算して、

$$\text{電束電流: } \frac{d\Phi_e}{dt}$$

これを用いて、アンペールの法則の拡張であるアンペール・マックスウェルの法則は、

$$\oint B_l dl = \mu_0 \left( \sum_i I_i + \frac{d\Phi_e}{dt} \right) \quad (3.21)$$

とまとめられる。

### ファラデ - の法則

真空であり、目には見えない物理空間を媒質とした電磁気力の場合、電磁場の運動を理論的に調べるためには、目に見える図形の幾何学的対称性や代数式の対称性を手がかりとして考えると良い。電磁場の対称性は、これまで見て来たところからも分かるようにそれほど単純ではないが、この方法で進むことにしよう。

前項でまとめたアンペール・マックスウェルの法則 (3.21) :

$$\oint B_l dl = \mu_0 \left( \sum_i I_i + \frac{d\Phi_e}{dt} \right)$$

の形をしていたが、一方、II-3-1 の最後にまとめた静電場に関する循環の法則 (3.9) :

$$\oint E_l dl = 0$$

(\*\*変位電流と言う用語を使わないのは、磁気との対応のためである。

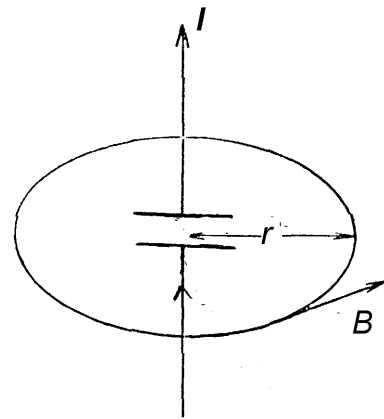


図 3.42: 極板間の電流

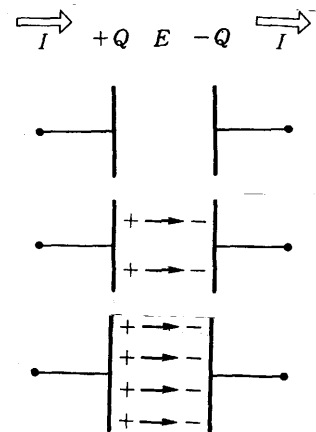


図 3.43: 電束電流



は、左辺こそ対応的な形をしているものの、右辺は 0 である。ただし、静電場という条件を取り外すと、右辺は 0 でなくなると言う示唆はしておいた。

静電場に関する循環の法則を、時間的な変化がある場合も含む電場の法則に拡張することを試みよう。それには、アンペール・マックスウエルの法則を少し書き換えることから始める。この式の右辺は、電気的な量の時間変化であり、左辺はこれに誘導されて磁気力の場が発生することを意味している。逆に、磁気的な量の時間変化が原因となり、これに誘導されて電気力の場が発生することも、十分起こり得るだろうと予想する。19 世紀の科学者たちも、そのように考えたのである。しかし、磁荷という量は存在しないのであるから、電流に対応する磁気的な量はあり得ない。そこで、式中の  $I_i = 0$  において、真空中のアンペール・マックスウエルの法則とする。ここで、電場  $E$  とより対称性を持つ量として、磁場  $H$  を導入する。これまでは、より直接測定できる場の量として、磁束密度  $B$  を用いて来たのである。例えば、例 3 で、粒子の比電荷（電荷と質量の比） $\frac{q}{m}$  と円運動の周期  $T$  をすれば、 $B = \frac{2\pi m}{qT}$  として  $B$  が得られる。

$$\text{磁場: } H = \frac{B}{\mu_0} \quad (3.22)$$

と定義される。これを用いると、真空中のアンペール・マックスウエルの法則は、

$$\oint H_l dl = + \frac{d\Phi_e}{dt}$$

と表される。

誘導電場の法則をつくるために、前項で導入した電束  $\Phi_e$  に対応して、磁束  $\Phi_m$  を、

$$\text{磁束: } \Phi_m = \mu_0 H \times (\text{力線の貫く断面積}) = B \times (\text{力線の貫く断面積})$$

を考える。今までの磁束密度 という量の由来は、単位断面積当たりを貫く磁束ということであった。法則は、 $H_l$  を  $E_l$  に置き換え、 $\Phi_e$  を  $\Phi_m$  に置き換えればすむ、という訳には行かない。関係の成立には、やはり、実験的な保証が必要である。レンツは「磁束変化を妨げる向きに誘導電場が生じる。」ことを見出した。<sup>(\*)</sup>誘導電場については、

$$\oint E_l dl = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (3.23)$$

の関係が成り立つ。これをファラデーの法則と呼ぶ。

上式の左辺は、既に見たように、起電力と呼ばれる。この法則に従う現象を電磁誘導と言い、左辺を誘導起電力と呼ぶ。以下、簡単な表現にするため、誘導起電力を  $V$ 、磁束を  $\Phi$  とおく。ファラデーの電磁誘導の法則として、

$$V = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.24)$$

と、まとめておけば良いだろう。

以上見て来たように、電磁誘導は物体の存在とは無関係に生じる現象であるが、この法則を例えば発電機等に利用するためには、導線と、外力に仕事をされる装置が必要である。このような場合も含めて、誘導起電力を求める手順を示しておこう。ただし、外力による仕事の部分は、力

<sup>(\*)</sup>「レンツの法則」は、考察にアンペールの法則を使う等、法則としての独立性は弱いので、法則としては採用しない。また「フレミングの右手の法則」も物体が存在する場合に限ったものなので、場の法則としては採用できない。既に、ロレンツ力についての「フレミングの左手の法則」も、「右ねじの法則」の方がより広く応用できるので、採用しなかった。

学の問題であり，取り出された誘導起電力を抵抗体等で消費する部分は，電気回路の問題であるから，ここでは立ち入らない．

一般に，誘導起電力  $V$  を求めるには，次の 3 段階の手順に従う．

【1】閉じた径路（ル-プ） $C$  とその正の向きを約束する．これにしたがって  $C$  を境界線とする面の法線ベクトル  $n$  が決まる．すなわち， $C$  の正の向きに右ねじを回すとき，ねじの進む向きが  $n$  の向きである．（ただし，曲面をなす面を選んだ場合には， $n$  の向きは一樣ではなくなるが，それでも構わない．）

$C$  は，調べたい部分を含むことは当然であるが，導線が閉回路をなしている部分を選んで，閉じていない回路であっても，導線が全くなくてもよい． $n$  によって， $C$  で囲まれた面を貫くベクトル流である磁束密度  $B$  の効果を計るのである．何となれば， $B$  のうち，真に面を貫くのはその法線成分  $B_n$  であって，これと垂直な面の接線成分，つまり，面に平行な成分のみであったならば，図 3.44 (a) のように全く貫いてはいないからである．また，今までも径路に矢印を付けて見て来たが，直線座標に付した矢印で  $x$  の正方向を約束するように，ここでは起電力の向きを定めるためのものである．計算によって  $V > 0$  となれば，矢印の向きに起電力が生じたのだし， $V < 0$  となれば，矢印と逆向きに起電力が生じたのである．

【2】磁束  $\Phi$  を計算する．（あるいは，磁束の変化： $\Delta\Phi$  のみを計算しても良い．）

簡単に計算できるのは， $B_n$  が一樣な場合であって， $C$  で囲まれた面積を  $S$  とおくと，

$$\Phi = B_n S = BS \cos \theta$$

最右辺の式では， $B$  は磁束密度の大きさ， $\theta$  は  $B$  と  $n$  のなす角である．

$B_n$  が一樣でない場合であれば，調べたい部分を含む微小の面積  $\Delta S$  内では， $B_n$  はほぼ同じ値と考えられるから，

$$\Delta\Phi = B_n \Delta S$$

次に，時間変化をとるのであるから，これをもとに積分したりして， $\Phi$  の値まで求めておく必要はない．

【3】ファラデーの法則を適用する．

$V = -\frac{d\Phi}{dt}$  の計算をすることによって，向きまで含めた誘導起電力の値が求まる． $B_n$  が一樣な場合として，

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(B_n S)}{dt} = B_n \frac{dS}{dt} + \frac{dB_n}{dt} S$$

となるから，磁束の時間変化は  $B_n = \text{const.}$  であるが，回路の一部が動き面積  $S$  が変化する場合と，回路の面積  $S = \text{const.}$  であるが， $B_n$  が時間変化する場合に分けて考えることができる．

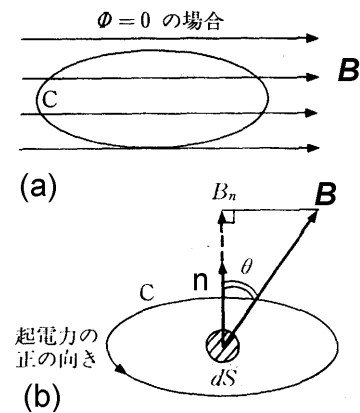


図 3.44: ル-プと法線ベクトル

**例 4** (1) 図 3.45 のように，紙面の裏から表向きで大きさ  $B$  の一様な磁束密度の領域に導線 AB と DC が間隔  $l$  で平行に張られ，これらと垂直を保ちながら金属棒 PQ が速さ  $v$  で動く場合に，BC 間の電圧計に現われる誘導起電力を調べて見よう．

【1】ル・ブの正の向きを  $P \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow Q \rightarrow P$  とする．

これより  $n$  の向きは，磁束密度の向きと同じ向きとなる．

【2】したがって， $B_n = +B$ ．ここで，PQ が  $t = 0$  に  $B$  の領域の左端を通り過ぎるとする．この位置を原点  $O$  として， $B \rightarrow A$  ( $C \rightarrow D$ ) 向きを正とする  $x$  軸をとると，

$$\Phi = B_n S = Blx$$

【3】 $\Phi$  の中で，時間変化するのは  $x$  のみで， $B$  の領域内では  $x = vt$  であるから，誘導起電力は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = \underline{\underline{-Blv}}$$

大きさは， $Blv$ ．向きは指定の逆向き， $P \rightarrow Q \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow P$  である．

BC 間は導線はつながっていないから， $B \rightarrow C$  向きの電位差が，端子 C が高電位，端子 B が低電位となって現われる．

(2) 正方形の辺  $l$  の固定された回路の中で，図 3.46(a) のように一様な磁束密度  $B$  が時間変化をする場合の誘導起電力を求めてみよう．

【1】回路の向きを，反時計回りにしておく．

【2】 $0 \leq t \leq T$  のとき，グラフの傾きより，

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B_0}{T}, \quad \Delta B = \frac{B_0}{T} \Delta t$$

で，他の時間帯では傾き 0 である．時間  $\Delta t$  間の磁束密度の変化  $\Delta B$  が与えられているから，その間の磁束の変化  $\Delta \Phi$  は． $0 \leq t \leq T$  のとき，

$$\Delta \Phi = \Delta BS = \frac{B_0}{T} l^2$$

で，他の時間帯では傾き 0 である．

【3】したがって，誘導起電力は，

$$V = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \begin{cases} 0 & (t < 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{B_0}{T} l^2 & (0 \leq t \leq T \text{ のとき}) \\ 0 & (t > T \text{ のとき}) \end{cases}$$

図 3.47(b) に起電力の時間変化を示す．

もし，(1) の  $B$  と (2) の  $B_0$  の値が， $Blv = \frac{B_0}{T} l^2$  の関係を満たすよに選ばれていたとすれば，両者の電磁効果には何の差もない．しかしここで注目すべきことは，(2) では，回路は切れていない．どこが高電位でどこが低電位だということはできないということである．もし，回路に静電場ができたとすれば，一周して電位差 0 となるのであるが，正方形の周  $4l$  の回路に

$$E = \frac{V}{4l}$$

の誘導電場ができています．この場合は電位は定義できない．譬え話であるが，図 3.47 のエツシャ-

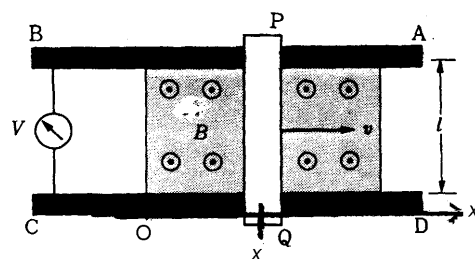


図 3.45: 一様な磁束密度の場合

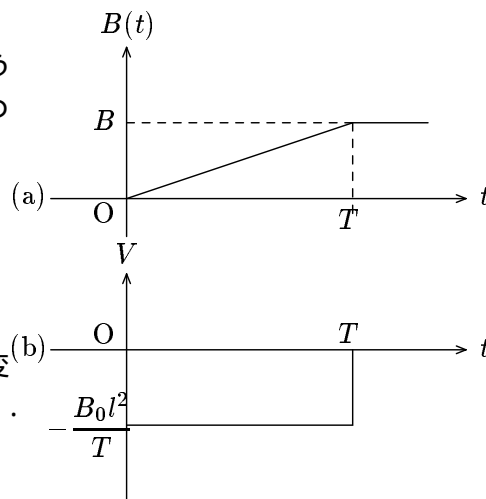


図 3.46: 磁束密度が時間変化する場合

のたまし絵で、屋上の一方の列の僧侶たちは降りても降りてもたどりつく場所がない．他方の列の僧侶たちは登っても登っても頂上はない．(2) の回路に正電荷の粒子と、負電荷の粒子が含まれているとしたら、正電荷の方は電気力線に沿って「下がり」続ける．負電荷の方は電気力線の逆向きに「上り」続ける．電磁場の世界では、このことに矛盾はない．

**問 5** 図 3.45 (a) の場合で、(1)  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  の発生する誘導起電力を求めよ．(2) 端子 A, D 間の電位差を求めよ<sup>(\*)</sup>

**例 5** 図 3.48 のように、一様な磁束密度  $B$  の中で、1 巻きの閉じた長方形コイル ABCD を一定な角速度  $\omega$  で図の向きに回転させる．コイルの大きさは  $AB = a$ 、 $BC = b$  で、回転軸は AD および BC それぞれの中点を通り、磁束密度の方向に垂直になっている．ABCD 面が磁束密度に垂直なときを時刻  $t = 0$  とする．コイルに発生する誘導起電力について調べてみよう．

交流発電機を単純化した問題である．このような場合も、誘導起電力を求める手順【1】～【3】にしたがって考えれば良い．

**【1】**  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  向きに回路の正の向きを定める．法線ベクトル  $n$  は  $t = 0$  のとき、磁束密度と同じ向きで、時刻  $t$  のとき、 $n$  は  $B$  と角  $\omega t$  をなす．すなわち、コイルとともに角速度  $\omega$  で空間に対して回転している．それに対して  $B$  は向きまで含めて一様なのであるが、手順にしたがって、コイルとともに回転する座標から見て、固定された法線ベクトルから見て逆に回転する磁束密度の法線成分  $B_n$  の時間変化を見て行くのである．

**【2】**  $B$  と  $n$  のなす角  $\omega t$  より、 $B_n = B \cos \omega t$  となる．したがって、

$$\Phi = B_n ab = Bab \cos \omega t$$

**【3】** これだけ準備しておいてから、ファラデ - の法則に適用する．

<sup>(\*)</sup> **問 5** の答：(1) 0, (2) 例えば、 $A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow D \rightarrow A$  について  $V = +Blv$

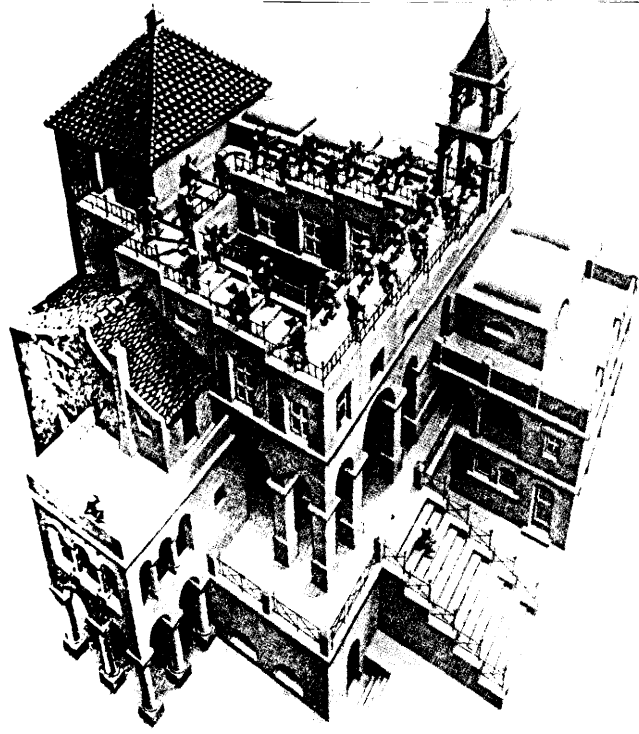


図 3.47: エッシャ - のたまし絵

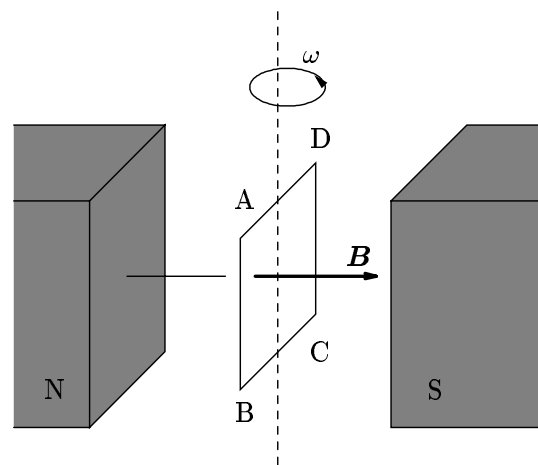


図 3.48: 交流発電機の模型

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bab\frac{d}{dt}\cos\omega t = \underline{\underline{+\omega Babs\sin\omega t}}$$

**問 6** 図 3.49 のような座標  $O-xyz$  に対して，点  $(x, y, z)$  における大きさが， $y, z$  によらず  $x$  に比例して  $Kx$  ( $K$ は正の定数) で表され， $+z$  方向を向いた磁束密度がある．この中に，長方形コイル ABCD を辺 AB を  $x$  軸に平行に，辺 BC を  $y$  軸に平行に置き， $+x$  方向に一定速度  $v$  で動かす．

コイルの大きさは  $AB = a$ ， $BC = b$  である．このコイルに誘導される起電力を求めよ．<sup>(\*)</sup>

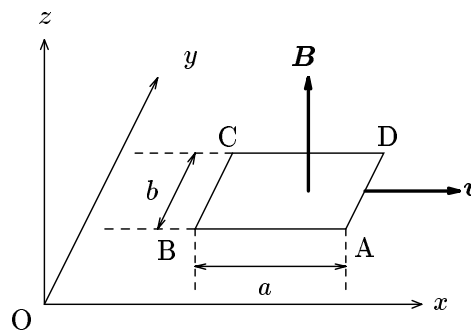


図 3.49: 問 6 の図

## 電磁波

今まで構築して来た電磁場の基本法則は，まず，II-3-1 で，

【1】電場に関するガウスの法則：

$$(\text{電気力線の貫く断面積}) \times (\text{電場}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i$$

この法則を，時間変化しない電場（静電場）について考えていたが，一般的にも成り立つ．

また，電場については，もうひとつ，II-3-2 のこの前の項で，

【2】ファラデーの法則 (3.23)：

$$\oint E_l dl = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

左辺の電場に静電場を含んでいても，その分は右辺では 0 となるから，この式も一般的なものである．

同様に，磁束密度についても 2 つの基本法則があり，

【3】磁束密度に関するガウスの法則：

$$(\text{磁束線の貫く断面積}) \times (\text{磁束密度}) = 0$$

【4】アンペール・マックスウエルの法則 (3.21)：

$$\oint B_l dl = \mu_0 \left( \sum_i I_i + \frac{d\Phi_e}{dt} \right)$$

そして，荷電粒子の存在が電場をつくり，荷電粒子の運動が磁束密度をつくるとした【1】～【4】が電磁場の基本法則であることは間違いないことなのであるが，荷電粒子，あるいは，物体がなくても電磁場はつくられているのだ，ということを以下明らかにしたい．

結論から言うと，真空中を伝わる電磁波が自らこれらを作っているのであるが，この周囲から何の影響も受けない自由空間における波動が満たすべき方程式はまだ知らない．そこで，話をやや限定して，電磁波が II-1 で取り扱った正弦波となっている場合について考えて行くことにする．波の進行方向を  $+x$  軸向きとし，電場  $E$  は  $y$  成分のみを持ち，磁束密度  $B$  は  $z$  成分のみを持つ場合とする．いわゆる，直線偏光の場合である．振幅を  $E_0, B_0$  とおくと，波の式は

<sup>(\*)</sup> 問 6 の答：  $V = +Kabv$

$$E_y(t, x) = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad B_z(t, x) = B_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

ただし,  $c$  は光速,  $\omega$  は角振動数である.

【1】各辺が  $xyz$  軸に平行で長さが, それぞれ,  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  微小の直方体を閉曲面として, ここに電場に関するガウスの法則を適用して見よう. 図 3.50 に示すように,  $y$  軸に平行などの面からも電気力線は出入りしない.  $y$  軸に垂直な斜線部の左の面から入る本数と, 右から出る本数は等しいから, ガウスの法則の左辺は, (電気力線の貫く断面積)  $\times$  (電場) = 0 である. したがって, 右辺

$$\frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i = 0$$

でなければならない. 微小の直方体を数多くつなげて, 同じことが言える. これは,  $E_y(t, x)$  が波の形を変えずに進む限りは, その領域には, 電荷は存在しないことを示している.

【2】図 3.51 のように,  $xy$  平面上で, 原点から出発して原点に戻る微小の径路  $O(0,0,0) \rightarrow A(\Delta x, 0, 0) \rightarrow B(\Delta x, \Delta y, 0) \rightarrow C(0, \Delta y, 0) \rightarrow O(0,0,0)$  について【2】のファラデー - の法則を適用してみよう. 径路  $O \rightarrow A$  と径路  $B \rightarrow C$  では, 電場は垂直に通っているので, その仕事は 0 である. 径路  $A \rightarrow B$  では, 電場も径路もともに  $+y$  軸向きなので, 仕事は正となる. この径路上の電場の値は  $E_y(t, \Delta x)$  である. 一方, 径路  $C \rightarrow O$  は  $-y$  軸向きで, これと逆向きの電場は負の仕事をする. この径路上の電場の値は  $E_y(t, 0)$  である. したがって, 1 周する仕事は,

$$E_y(t, \Delta x) \Delta y - E_y(t, 0) \Delta y = E_0 \left\{ \cos \omega \left( t - \frac{\Delta x}{c} \right) - \cos \omega t \right\} \Delta y$$

ここで, 左辺に加法定理を適用し微小角  $\theta \ll 1$  のとき成り立つ 3 角関数の近似式:

$$\cos \theta \approx 1, \quad \sin \theta \approx \theta$$

を用いると,

$$\cos \omega \left( t - \frac{\Delta x}{c} \right) = \cos \omega t \cos \frac{\omega \Delta x}{c} + \sin \omega t \sin \frac{\omega \Delta x}{c}$$

$$\approx \cos \omega t + \sin \omega t \frac{\omega \Delta x}{c}$$

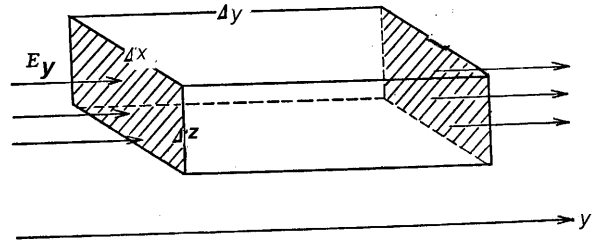


図 3.50: 電気力線の保存

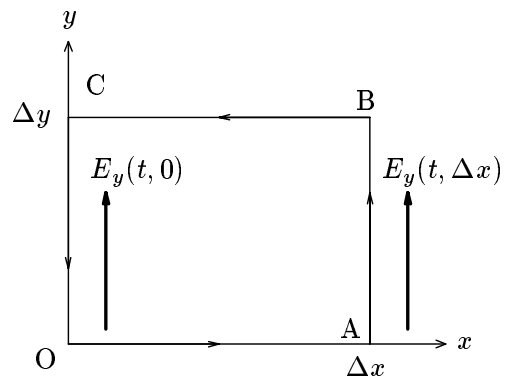


図 3.51:

仮定より,  $\frac{\omega \Delta x}{c} \ll 1$  だからである. 故に,

$$E_y(t, \Delta x) \Delta y - E_y(t, 0) \Delta y \approx \frac{\omega}{c} E_0 \sin \omega t \Delta x \Delta y$$

一方, ファラデー - の法則の右辺の磁束は, 図 3.52 の  $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$  のループについて,

$$\Phi_m = \Delta y \int_0^{\Delta x} B_z(t, x) dx$$

$$= \Delta y B_0 \int_0^{\Delta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) dx$$

$$= -\frac{c}{\omega} \Delta y B_0 \left[ \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right]_0^{\Delta x}$$

$$\left[ \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right]_0^{\Delta x} = \sin \omega \left( t - \frac{\Delta x}{c} \right) - \sin \omega t$$

ふたたび, 加法定理と 3 角関数の近似式を適用すると,

$$= \sin \omega t \cos \frac{\omega \Delta x}{c} - \cos \omega t \sin \frac{\omega \Delta x}{c} - \sin \omega t \approx \frac{\omega \Delta x}{c} \cos \omega t$$

したがって,

$$\Phi_m \approx B_0 \cos \omega t \Delta x \Delta y$$

故に, ファラデー - の法則の右辺は,

$$-\frac{d\Phi_m}{dt} \approx \omega B_0 \sin \omega t \Delta x \Delta y$$

左辺と右辺を等置すると,

$$\frac{\omega}{c} E_0 \sin \omega t \Delta x \Delta y = \omega B_0 \sin \omega t$$

$$\frac{E_0}{c} = B_0 \tag{3.25}$$

の関係が得られる.

【3】磁束密度に関するガウスの法則は, ただ満たしているというだけで何も情報は得られない.

【4】今度は図 3.53 のように,  $xz$  平面上で, 原点から出発して原点に戻る微小の径路  $O(0,0,0) \rightarrow A(\Delta x, 0, 0) \rightarrow B'(\Delta x, 0, \Delta z) \rightarrow C'(0, 0, \Delta z) \rightarrow O(0,0,0)$  について【3】のアンペール・マクスウエルの法則を適用してみよう. 径路  $O \rightarrow A$  と径路  $B' \rightarrow C'$  では, 磁束密度は垂直に通っているため, スカラ・積として 0 となる. 径路  $A \rightarrow B'$  では, 磁束密度も径路もともに  $+z$  軸向きなので, スカラ・積は正となる. この径路上の磁束密度の値は  $B_z(t, \Delta x)$  である. 一方, 径路  $C' \rightarrow O$  は  $-z$  軸向きで, 磁束密度はこれと逆向きなので, スカラ・積は負となる. この径路上の磁束密度の値は  $B_z(t, 0)$  である. したがって, アンペール・マクスウエルの法則の左辺は,

$$B_z(t, \Delta x) \Delta z - B_z(t, 0) \Delta z = B_0 \left\{ \cos \omega \left( t - \frac{\Delta x}{c} \right) - \cos \omega t \right\} \Delta z$$

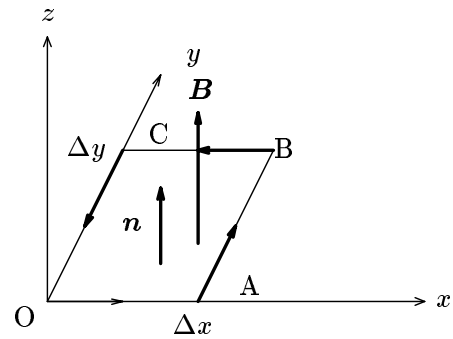


図 3.52:

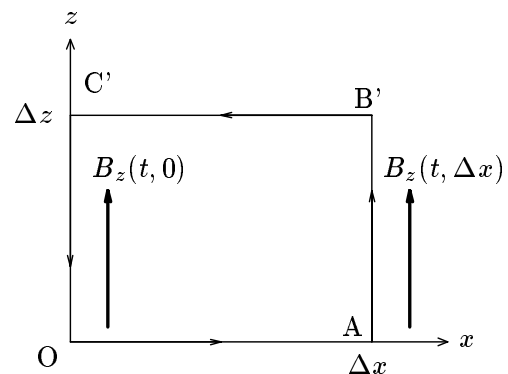


図 3.53:

以下の近似計算は【2】の対応する計算と全く同じだから，

$$B_z(t, \Delta x) \Delta y - B_z(t, 0) \Delta z \approx \frac{\omega}{c} B_0 \sin \omega t \Delta x \Delta z$$

一方，図 3.54 のような  $O \rightarrow A \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow O$  のループについての電束  $\Phi_e$  の計算も，主要な部分是对应的である．この面の法線成分は  $-y$  軸向きであることに注意して，

$$\begin{aligned} \Phi_e &= -\epsilon_0 \Delta z \int_0^{\Delta x} E_y(t, x) dx \\ &= -\epsilon_0 \Delta z E_0 \int_0^{\Delta x} \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) dx \\ &\approx -E_0 \cos \omega t \Delta x \Delta z \end{aligned}$$

アンペール・マックスウエルの法則の右辺は，

$$\mu_0 \left( \sum_i I_i + \frac{d\Phi_e}{dt} \right) \approx \mu_0 \left( \sum_i I_i + \omega \epsilon_0 E_0 \sin \omega t \Delta x \Delta z \right)$$

左辺と右辺を等置すると

$$\frac{\omega}{c} B_0 \sin \omega t \Delta x \Delta z = \mu_0 \left( \sum_i I_i + \omega \epsilon_0 E_0 \sin \omega t \Delta x \Delta z \right)$$

ここで，電流を含む項を，式を簡単にするため，

$$\sum_i I_i = \omega \epsilon_0 J \sin \omega t \Delta x \Delta z$$

と，ある値  $J$  を使って表しておこう．これを用いると，

$$\frac{B_0}{\epsilon_0 \mu_0 c} = J + E_0 \quad (3.26)$$

の関係が得られる．

【5】(3.25)，(3.26) 式から， $B_0$  を消去すると，

$$\frac{E_0}{\epsilon_0 \mu_0 c^2} = J + E_0$$

となる．ここで，もし，

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

が成り立てば， $J = 0$ ．したがって，この空間には，電流も流れていない．

実際に，真空中の光速は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

で与えられる． $c$  の測定は，17 世紀の後半以来いろいろな方法による測定がなされている．一方，真空の誘電率  $\epsilon_0$ ，および，真空の透磁率  $\mu_0$  の値は，現在では，

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 1.2566370614 \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

と詳しく測定されている．これを用いて，光速を計算すると，

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F/m} \cdot 1.2566370614 \times 10^{-6} \text{ H/m}}}$$

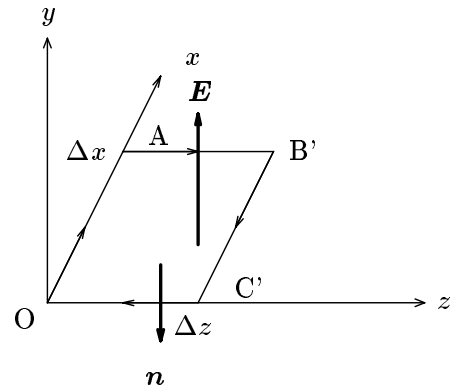


図 3.54:



$$= 2.997924580148 \times 10^8 \text{ m/s}$$

真空中の光速の定義値  $c = 2.997924580148 \times 10^8 \text{ m/s}$  ほぼ完全に等しいと言って良い。

これに対して，既に II-1-3 で見たように，物質中の光速は，

$$c < \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

であって， $J \neq 0$  . したがって，電流の効果も現われて来るのである .