第3章 場

3–1 時間変化をしない場

≪ この項で学ぶこと ≫

[力の場, 力線, ガウスの法則，一様な場，場のポテンシャル，等ポテンシャル面，電場に関する循環の法則]

★ 力の場

これまでの学習で，力は力の源である粒子から発し, 他の粒子が力を受け取るまで空間を順次伝わって行くことが分かった．つまり，力とは，粒子の存在しない空間にも存在し運ばれて行くものである．さらに，波動として運ばれれるような形の時間変化がない場合であっても，力は空間の各点に存在し, 配置されていると考えることができる．例えば, 音波が空気密度の疎密の伝達であることを習ったが, 空気自体も密度の変化を伴わない場合, つまり，空気は流動していようが, 全体として静止していようが，密度変化がある場合に伝達していた音波が生じていないとする．この場合でも，気体の各部分に圧力が存在することは明らかであろう．

一般に，空間の各点に，試験体である粒子を持って行ったとき，この粒子がその点によって定まる力の作用を受けるとき，力がその空間にあらかじめ配備されていると考えることができる．この力全体を総称して 「力の場」と呼ぶ．

図 3.1: 磁気力線

★ 力線

この章の最後に説明するように,「磁気力」の正体はなかなか複雑なものであるが，一方において磁気力は「力線」を視覚化してくれる最も簡単な実験的題材である．つまり，図 3.1 のような模様,「磁気力線」は，磁石を使って公園の砂場などから採取して来た 砂鉄を，下に磁石を置いた紙の上から振り撒けば得られる訳である．砂鉄で

は向きを示す矢印は現れないが，磁石の N 極からから発して S 極に終わる互いに交差することのない何本かの曲線をイメージすることができるであろう．また，力が強い部分は力線の密度が高くなっていることにも観察することができる．

力の場を数学的に取り扱うには，空間のある領域内の点の関数となっている力のベクトルの演算を考える必要がある．演算の理解を助けるためには,（このことは ファラデーが初めに考えてことなのであるが,）磁気力線で見たような，空間に描かれたベクトルの流れを想定して見るのが有効である．図 3.2 はその一例である．ここで注意すべきことは,「流れ」と考えているのは，目下，時間変化しない場を考えていることから分かるように，例えば，関数 $y = f(x)$ が x が増加し行くにしたがって，増加するとか,減少する，という意味と同じように使っているのであって，具体的なものが流動して行くという意味ではない．[*a]

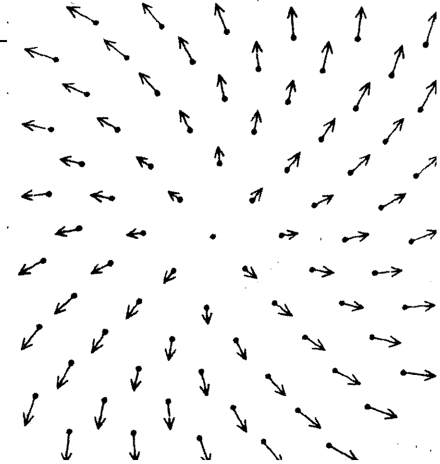


図 3.2: ベクトルの流れ

力線の発生源は，あくまでも粒子である．図 3.3 のように側面が力線でできているような力線の束を，この束に垂直な入り口の断面 S_1 と，出口の断面 S_2 で切り取って考える．もしこの閉曲面内に，新たに力線を発生させる粒子が存在しないとすると，入り口の力線の本数を N とおくと，出口の力線の本数は同じ N でなければならない．一方，力の場の強さは「**切り口の断面積当たりの力線の本数**」と約束する．

図3.3 で，$S_1 < S_2$ ならば，$\dfrac{N}{S_1} > \dfrac{N}{S_2}$，すなわち，この例では，入り口の力の場の方が出口の力の場より強い．

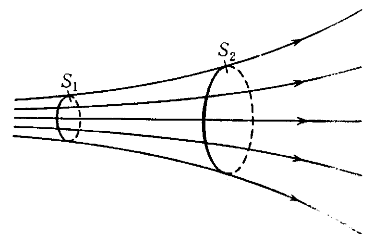


図 3.3: 力線の束

★　ガウスの法則

力線の全本数は，源となる粒子と力の性質によって決められる．粒子の存在がその周りに及ぼす影響は，この粒子が持つ物理量に依存する．ここで問題としている粒子の保有する物理量は，質量と電荷である．質量は運動方程式の粒子項に現れるものと同じ量であるが，ここでは重力の原因となる役割をもっている．[*b]

一方，電荷は，電気力のみならず，次の章で学ぶように，磁気力の原因にもなる．これに対して，最終的な結果としてこれらの力を受ける他の粒子も，質量をもった粒子のみが重力の作用を受け，電荷をもった粒子のみが電磁気力の作用を受けるのであるが，すでに学んで来たように，途中の空間に何の変動も引き起こさずにこの粒子に力が及ぶ訳ではなかった．II–2 で，波の伝わる速さが，媒質の性質から導き出される力の定数に関係することを知ったが，波動が伝わらない場合においても，力の場には固有の定数が存在する．重力場の場合であれば，**重力定数**[*c] G であり，静電場[*d] の場合には，**真空の誘電率** ϵ_0 である．力線の本数は，これら力の場の定数にも依存する．もちろん，ここでは力の場の強さを比較として力線の密度の高低で示しているだけであり，具体的な本数が意味をもつ訳ではない．以下では，力線の本数 N を，I–2–1 の「力の法則」に適合するように定めることにする．

[*a] ベクトル場を，よく水の流れにたとえる説明があるが，静止流体についての圧力の場もある訳であるから，たとえを持ち出すことによってかえって混乱させることは，避けるべきである．

[*b] 慣性質量，重力質量という用語は，混乱を引き起こすだけなのでここでは持ち出さない．当然，一般相対論の等価原理には触れない．

[*c] 万有引力定数という用語は使わない．

[*d] 用語統一のため，クーロン電場は使わない．

初めはまず，1 粒子のみ存在し，その周囲の空間が等方性を持つ（方位によって特異な性質を示すことがない）場合を考察しよう．

例 1 **重力場**

粒子の質量を M，重力定数を G とおく．力線（重力線）の本数 N（前の項の N と異なり，ここでは全本数を示す.）は，本質的には，この M と G で決まる訳であるが，定数に関する習慣的な約束から，

$$N = -4\pi GM$$

と定められる．ここで，マイナス符号が付くのは，重力が引力であって，重力線は全てこの粒子に流れ込んでいるからである．(図 3.4）

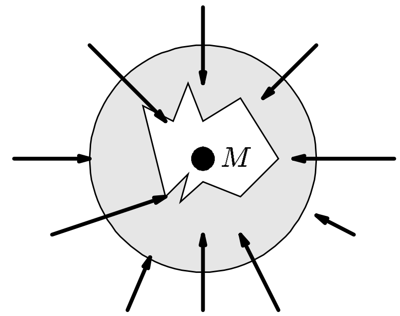


図 3.4: 重力線

この粒子を中心に半径 r の球面を通過する重力場を $g(r)$ とおくと，場の強さの約束より，

$$g(r) = \frac{N}{4\pi r^2} = -G\frac{M}{r^2}$$

ここで，$4\pi r^2$ は半径 r の球の表面積を表す．重力線は球表面を断面積として，そのいずれかの面から等方的に流れ込み，質量 M の粒子に達しているはずである．

重力場の中で，距離 r 離れた位置にある質量 m の他の粒子に働く力は，

$$F = mg(r) = -G\frac{mM}{r^2} \tag{3.1}$$

これは，I–2–2 で習った重力に他ならない．**重力場 $g(r)$ とは，単位質量（ $m = 1$ kg ）当たりの重力のことである．**

例 2 **静電場**

粒子の電荷を Q，真空の誘電率 ϵ_0 とおく．力線（**電気力線**）の本数 N は，

$$N = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

と定められる．ここで，正電荷 $Q > 0$ の場合には，電気力線はこの荷電粒子から流れ出で行き，負電荷 $Q < 0$ の場合には，電気力線はこの荷電粒子に流れ込んで来る．(図 3.5）目下は $Q > 0$ の場合を考えよう．

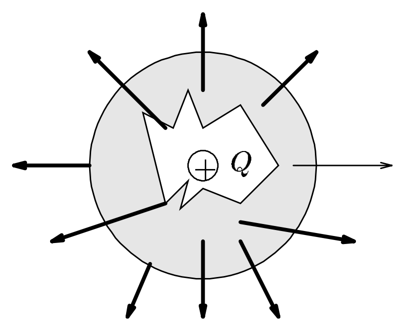


図 3.5: 電気力線

この粒子を中心に半径 r の球面を通過する静電場を $E(r)$ とおくと，場の強さの約束より，

$$E(r) = \frac{N}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

電気力線は電荷 Q の荷電粒子から始まって，球表面を断面積として，そのいずれかの面から等方的に流れ出いるはずである．

静電場の中で，距離 r 離れた位置にある電荷 q の他の荷電粒子に働く力は，

$$F = qE(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2} \tag{3.2}$$

これは，I–2–2 で習った静電気力に関するクーロンの法則に他ならない．2 つの電荷が互いに同符号 $qQ > 0$ のときは電荷 q の他の荷電粒子に働く力は斥力であり，2 つの電荷が互いに異符号

$qQ < 0$ のときは引力となる． **電場 $E(r)$ とは，単位電荷（ $q = 1$ C ）当たりの静電気力のことである．**

1 粒子の場合の $\boxed{\textbf{例 1}}$ と $\boxed{\textbf{例 2}}$ の構造上の共通点は，次の通りである．まず，粒子の持つ物理量と力の性質とから決まる力線の本数 N を定めた上で，この総本数は，力線を作るこの粒子を囲む閉曲面上,今の場合には，粒子を中心とした半径 r の球面上，で出入りを集めれば一致していると考える．後者は「力の場」を用いて計算する．すなわち，

$$4\pi r^2 \times (\text{力の場}) = N$$

が成り立つ．

この考え方を， 2 個以上の粒子の作り出す力線の流れについて拡張してみよう．波動のところで導入した**重ね合わせの原理**は，時間変化のない場についても，当然成り立つ．任意の閉曲面を通る力線の流れは，この曲面の内部にある個々の粒子から出る，あるいは，入る力線の総和 $\sum_i N_i$（N_i には正負がある．） である．今，簡単に計算できる場合は，力線が曲面を垂直かつ，一様に貫く場合（力線が全く存在しない面があってもよい．）である．

$$\text{「}\textbf{（力線の貫く断面積）}\times\textbf{（力の場）} = \sum_i N_i\text{」} \tag{3.3}$$

この原理を**場に関するガウスの法則**と呼ぶ．特に「電場についてのガウスの法則」は，ここではそこまで展開しないが，もっと完全な一般化によって，電磁場についての 4 つの基礎方程式の 1 式となる内容を持っているものである．(*e

閉曲面で囲まれなかった外側の粒子が作る力線の影響が気になるかも知れない．そかし，前項の図 3.3 のような場合を考えれば明らかなように，この閉曲面に対して，そのすべてが，各部分の断面積 S_1 から入り，断面積 S_2 から通り抜けて行くので，

$$S_2 \times N - S_1 \times N = 0$$

で，その総和も 0 となって，全く寄与しないことになるので，心配はない．

$\boxed{\textbf{例 3}}$ 地球を全質量 M， 半径 R のの一様な密度を持つ球とみなしたとき，地球の中心（質量中心）O から距離 r の位置の重力場 $g(r)$ を求めよう．ただし，地球の自転の影響は無視する．

【1】 $r > R$ のとき．ガウスの法則より，

$$4\pi g(r) = -4\pi GM$$

したがって，

$$g(r) = \underline{\underline{-G\frac{M}{r^2}}}$$

【2】 $r \leqq R$ のとき．図 3.6 のように，O 点を中心とする半径 r の地球内部の球の部分の質量 M' は，(密度)= $\dfrac{(\text{質量})}{(\text{体積})}$ が一定だから，

$$\frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} = \frac{M'}{\frac{4\pi}{3}r^3}$$

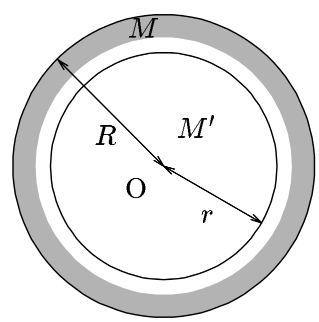


図 3.6: 地球内部の球

(*e 高校数学では，面積分はやらない．しかし，場合によっては，$E_x\Delta y\Delta z + E_y\Delta z\Delta x + E_z\Delta x\Delta y = \dfrac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$ まで与えても良い．

$$M' = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

と表される．ガウスの法則より，

$$4\pi g(r) = -4\pi G M'$$

したがって，

$$g(r) = -G\frac{M'}{r^2} = \underline{\underline{-G\frac{M}{R^3}r}}$$

ここで，$g = -g(R) = G\dfrac{M}{R^2}$ とおく．この力に関する定数 g は，単元 I–2 で，最もしばしば用いられた，**重力加速度**である．地球の作る重力場 $g(r)$ を g を使って表すと，

$$g(r) = \begin{cases} -g\dfrac{r}{R} & \cdots (r \leqq R) \\ -g\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 & \cdots (r > R) \end{cases}$$

となる．r と $g(r)$ の関係をグラフに表すと，図 3.7 のようになる．

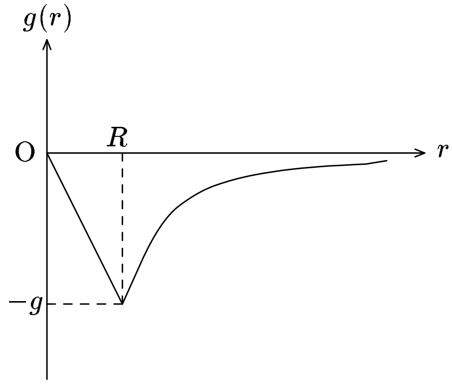


図 3.7: $g(r)$ の変化

以上の関係は，$r \gg R$ の場合であれば，地球は粒子をみなせることになり，**例 1**の場合と同じとなる．

問 1 全電荷 Q の電荷が，半径 R の十分薄い球面に一様に分布する場合，球の中心 O から距離 r の位置の静電場を求めよ．[*f]

問 1(2) のような場合，球内部は**シールド されている**と言う．

例 4 図 3.8 のように，全電荷 Q の電荷が長さ l の棒に一様に分布する場合，この荷電棒が作り出す静電場を求めよ．ただし，簡単に計算できる，l は十分長くて，両端の影響は無視できる場合とする．

閉曲面として，棒に平行な軸を持つ半径 r，長さ l の円柱を選ぶ．空間の等方性から，電気力線はこの棒から対称性を保った形で出て来る．例えば，棒に平行に上向きの力線などは上下の対称性からあり得ない．力線は円柱の側面のみを，垂直かつ，一様に通過する．ガウスの法則より，

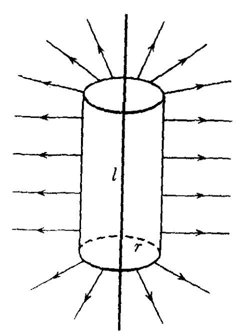
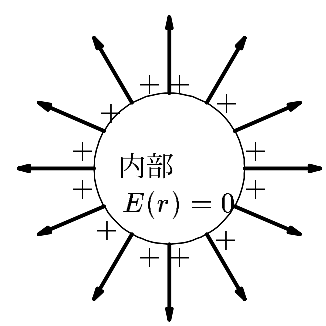


図 3.8: 電荷を帯びた棒の場合

$$2\pi l r \times E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\sigma}{r}}} \qquad (3.4)$$

ただし，σ は電荷の線密度で，$\sigma = \dfrac{Q}{l}$ である．



[*f] 問 1の答：(1) $E(r) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$，(2) $E(r) = 0$