

## 第2章 波動の原理

### A 波の重ね合せの原理

《この項で学ぶこと》

[重ね合わせの原理，干渉，うなり，定常波]

#### 重ね合わせの原理

前章では，波が何を運び，その運動をどのように記述するか，について習って来た．しかし，一方向に進む単独な波が引き起こす現象は，ごく限られている．波動によって説明される主要な物理現象は複数の波が重なり合って引き起こされるものである．波動の物理学はここから始まる，と言っても過言ではないだろう．

2つの粒子は衝突しても消えてしまうことはないが，2つの波は重なって打消し合うこともある．2つの波は重ね合わせることができて，合成波は「強め合ったり，弱め合ったり」する．重ね合わせは，ある位置で観測すると時間的に現れて来ることもあり，これが後節で説明する「うなり」である．また，同一時刻で空間的に観測される場合もある．これも後節で説明する「干渉」という現象である．

「合成波を伝える媒質の運動は，それぞれの波が単独に存在するときの媒質の運動のベクトル和である．」

このことを「波は重ね合わせの原理に従う」と言う．波が「力」を伝達し，力の合成にはベクトルの加法を使うことを理解していれば，ごく自然に受け入れられる原理であろう．力の考察の場合もそうであったように，複数の波を合成する事ができるということは，逆に，ある波はいくつかの波に分解することもできる，ということでもある．

**例 1** 綱を張って一端を急激に上下すればパルスが発生させることができる．いま，全く同じ形の山が一つだけの2個のパルスが綱を伝わって互いに反対方向に進み，時刻  $t = 0$  のとき，図 2.1 の AB を通過した．AB 間の距離を  $l$ ，パルスの伝わる速さを  $c$  とする．

時刻  $t = \frac{9l}{20c}$  のときの波形を作図しよう。

方眼紙の1目盛は  $\frac{l}{10}$  のながさであり、一つのパルスの幅、高さは図からともに  $\frac{l}{5}$  と読み取れる。

$$ct = c \times \frac{9l}{20c} = 4.5 \frac{l}{10}$$

であるから、左右のパルスは指定の時刻に A, B の位置から、それぞれ中央の方に 4.5 目盛進み、図 2.1 の下の図の点線で描かれている位置に来る。その点線の波形を加え合わせたものが太い線で示された時刻  $t = \frac{9l}{20c}$  のときの波形である。

**問 1** 図 2.1 の 2 個のパルスと全く同じ大きさで、進行の速度も同じであるが、左のパルスが山（上向き）で、右のパルスが谷（下向き）であるとする。

時刻  $t = \frac{l}{2c}$  のときの波形はどうなるか。また、合成波のエネルギーは時刻  $t = 0$  のときと比べてどう変わるか。(\*a)

例えば、上の**例 1** 2 個のパルスの時刻  $t = \frac{l}{c}$  のときの波形は、2 個のパルスが図 2.1 の上の図の A, B の位置にそっくり入れ代わって、見かけは全く同じ図形となる。つまり、各パルスはその位置が重なり合ったときは合成された複雑な波形となるが、互いに影響を受けた訳ではなく、重なり合う場所を通り過ぎれば元の波形はくずされることなく進行する。このような「波は独立に進行する」という性質も「重ね合せの原理」の主張に含まれる重要な内容である。複雑な波形は、独立に進行するふたつの波が作る媒質の変位が、ただ単に合成されて生じているだけである。2 つの粒子が重なって消えてしまうことはないが、2 つの波は打消し合うこともある、というだけでなく、これも粒子と波とが全く性質の異なる点である。衝突した 2 つの粒子は、その後、それぞれが衝突前と全く同じ速さで同じ方向に運動する、というようなことはあり得ない。

音波が「独立進行している」証拠は、にぎやかな所であっても、話している声が周り雑音から聞き分けられることにも現れている。人が発声した音波は、周りから出ているいろいろな音波によってゆがんだ波になるなどということはありません。

次に、直線的に伝わる調和振動波の重ね合わせについて、2 つの側面から考察する。

### 【1】同位相・逆位相

同位相・逆位相の関係が、2 つの波が強め合う・弱め合うことに対応している。2 つの波を

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 \cos \theta_1 \\ \psi_2 = A_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

(\*a) **問 1** の答：2 つのパルスは互いに打ち消し合っで一時的になくなっている。合成波のエネルギーは全体としては  $t = 0$  のときと変わらないが、媒質の振動のポテンシャルは 0 となり、運動エネルギーのみとなっている。

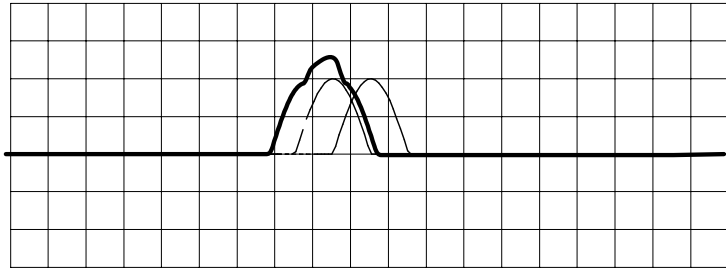
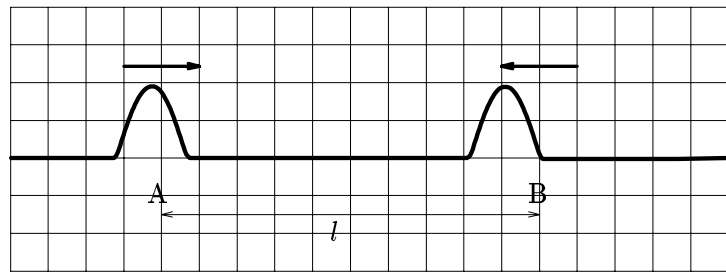


図 2.1: パルスの重ね合わせ

とおくと,

$$\text{同位相} : \theta_2 - \theta_1 = 2n\pi \quad (2.1)$$

$$\text{逆位相} : \theta_2 - \theta_1 = (2n + 1)\pi \quad (2.2)$$

ただし,  $n$  は整数である. 合成波が同位相のときは.

$$\cos \theta_2 = \cos(\theta_1 + 2n\pi) = \cos \theta_1$$

であるから,

$$\psi_1 + \psi_2 = (A_1 + A_2) \cos \theta_1$$

合成波が逆位相のときは.

$$\cos \theta_2 = \cos(\theta_1 + 2n\pi + \pi) = -\cos \theta_1$$

であるから,

$$\psi_1 + \psi_2 = (A_1 - A_2) \cos \theta_1$$

もっと簡単な関係としては, 2つの波の振幅が等しく,  $A_1 = A_2 \equiv A$  の場合,

$$\begin{cases} \text{同位相のとき} : \psi_1 + \psi_2 = 2A \cos \theta_1 = 2\psi_1 \\ \text{逆位相のとき} : \psi_1 + \psi_2 = 0 \end{cases}$$

それぞれの強め合う, 弱め合うの条件が, 振幅が2倍(強度が4倍)となる, 全く打ち消し合う条件となる.

## 【2】合成波の計算

合成波形を見出す計算は, II-1-2 で説明した複素数の波を用いると便利である. 簡単のため, 話を2つの波の振幅が等しい場合に限ろう. 位相が  $\theta_1$   $\theta_2$  の2つの複素数波は,

$$\begin{cases} \Psi_1 = A(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ \Psi_2 = A(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{cases}$$

と表される. 合成波は  $\Psi_1 + \Psi_2$  で, 物理的に意味があるのはその実部であるが, 複素数表示を用いると合成波を作る計算が楽である. まず, 絶対値1で任意の偏角  $\phi$  の複素数  $z$  について,

$$z = \cos \phi + i \sin \phi$$

とおくと,  $z_k$  の共役複素数は,

$$\bar{z} = \cos \phi - i \sin \phi$$

であるから,

$$|z|^2 = z\bar{z} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1, \quad \frac{1}{z} = \bar{z}$$

の関係がある. ここで,  $\phi$  を  $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ , あるいは,  $\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$  とおいて,

$$\begin{cases} z_+ = \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + i \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\ z_- = \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + i \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \end{cases}$$

ととると,

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \theta_1$$

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \theta_2$$

と, 絶対値 1 の複素数の積の偏角は和, 商の偏角は差となることより,

$$\Psi_1 = Az_+z_-, \quad \Psi_2 = A\frac{z_+}{z_-} = Az_+\bar{z}_-$$

と表される. したがって, 合成波は,

$$\Psi_1 + \Psi_2 = Az_+z_- + Az_+\bar{z}_- = A(z_- + \bar{z}_-)z_+$$

$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z = 2\cos\phi$  だから,

$$\Psi_1 + \Psi_2 = 2A\operatorname{Re}z_- \cdot z_+$$

したがって, 実際の波  $\psi_k = \operatorname{Re} \Psi_k$  ( $k = 1, 2$ ) の合成形は,

$$\psi_1 + \psi_2 = 2A\operatorname{Re}z_- \cdot \operatorname{Re}z_+ = 2A\cos\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (2.3)$$

2 つの位相が同位相のときは, (2.1) 式より,

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \theta_1 + n\pi, \quad \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = n\pi$$

だから, これを (2.3) 式に適用すると, 確かに,

$$\psi_1 + \psi_2 = 2A\cos n\pi\cos(\theta_1 + n\pi) = 2(-1)^{2n}\cos\theta_1 = 2\psi_1$$

となる. また, 逆位相のときは, (2.2) 式より,

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \theta_1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

だから, これを (2.3) 式に適用すると,  $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = 0$  だから,

$$\psi_1 + \psi_2 = 0$$

となる. しかし, (2.3) 式は完全に強め合っても, 完全に弱め合ってもいない, それ以外の媒質の変位についても表すことができる.

図 2.2: 水面の波

## 干渉

波の重ね合わせの原理の、空間的現われが干渉である。独立に進行する複数の波の重なった様子を一定時刻に観測すれば、合成波はある位置では強め合い、他の場所では弱め合う結果、目に見える場合には「干渉縞」と呼ばれる模様が見れる。図 2.2 は水面上の 2 点の波源から同時に波を発生させたときの様子を、網目状の線による立体表現によって示したものである。波源が 1 点であった図 1.17 の場合の同様な表現と比べて見よう。

干渉は波の性質であるから、音波の干渉も、光の干渉も観測される。観測しやすいという事情もあって、代表的な干渉装置は可視光線によるものが多い。また、図 2.2 の例のような円形波や球面波の干渉が、より興味深いのであるが、ここでは、単純な話題に限って、まず、平面波の干渉を見て行こう。

**例 1** 図 2.3 のように、距離  $d$  離れた A, B の点から、振幅、振動数、初期位相、偏りがともに等しい電磁波が放射されているとする。図に示すように  $\overline{AB}$  に垂直な方向に対して角  $\theta$  をなす方向の十分遠方の点 P における電磁波の干渉の様子を調べてみよう。P 点は A, B から十分遠いので、AP, BP はほぼ平行であるとみなしてよい。

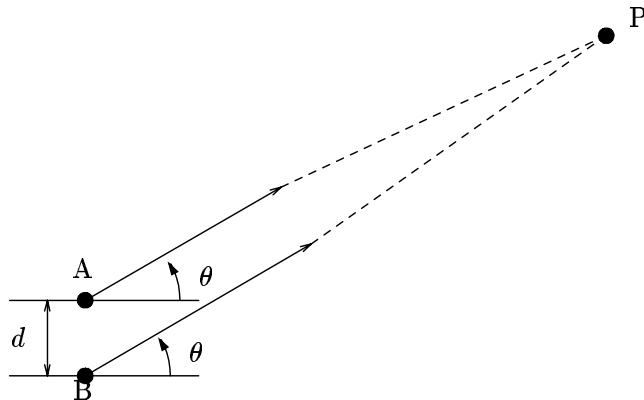


図 2.3: 平面波の干渉

例えば，調和振動波である電波のみを調べるとして，波源 A，B から初期位相 0 で出て，それぞれ，観測点 P に達した 2 つの波  $\psi_1$   $\psi_2$  の振幅  $E_0$ ，振動数  $f$ ，波長  $\lambda$ ，径路  $\overline{AP} = x_1$ ， $\overline{BP} = x_2$  とすると，

$$\begin{cases} \psi_1 = E_0 \cos 2\pi \left( ft - \frac{x_1}{\lambda} \right) \\ \psi_2 = E_0 \cos 2\pi \left( ft - \frac{x_2}{\lambda} \right) \end{cases}$$

となる．

$\psi_2$  に対する  $\psi_1$  の位相差は  $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$  であり，図 2.4 より  $x_2 - x_1 = d \sin \theta$  であることが分かる． $m$  を整数とすると，(2.1)，(2.2) 式より，

$$\begin{cases} \text{同位相となる条件} : \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2m\pi \\ \text{逆位相となる条件} : \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = (2m+1)\pi \end{cases}$$

である．

この関係を P の位置の違いを  $\sin \theta$  で見ることにすると，

$$\text{波が強め合う条件} : \sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad (2.4)$$

$$\text{波が弱め合う条件} : \sin \theta = \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{d} \quad (2.5)$$

となる．

波の重ね合わせの結果が，振幅や強度が，単に，極大と極小になる位置を調べたいのであれば，以上の考察のように，前節【1】でやった位相差の関係のみを見ればよいが，もう少し，詳しく調べるには，前節【2】でやった合成波の計算の結果 (2.3) を利用して，その形を見なければならぬ．

$$\theta_k = 2\pi \left( ft - \frac{x_k}{\lambda} \right), (k = 1, 2)$$

より，

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 2\pi \left( ft - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right), \quad \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \frac{\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$

また， $A = E_0$  だから，合成波 (2.3) は，

$$\psi_1 + \psi_2 = 2E_0 \cos \frac{\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \cos 2\pi \left( ft - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right)$$

したがって，合成波の振幅は，P の位置，すなわち， $\sin \theta$  によっていろいろな値をとることが分かる．

$$2E_0 \cos \frac{\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2E_0 \cos \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)$$

ここで，II-1-2 で習った波の強度を考えると，これも  $\theta$  の関数であるから， $I(\theta)$  と表すことにすると，図 2.5 のようになる．図では，縦軸に線対称な  $\theta < 0$  の部分は描かれていない．

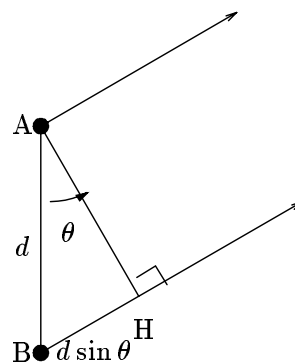


図 2.4: 径路差の計算

$$I(\theta) = \frac{1}{2}(\text{合成振幅})^2$$

$$= 2E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right) \quad (2.5)$$

**問 1** 振幅，振動数が等しく，ともに  $+x$  軸方向に 2 つの調和振動波が下の 2 つの図のように，異なる場所から同時に発生して重なり合う．それぞれの図に，合成波の略図を書き入れよ．<sup>(\*b)</sup>

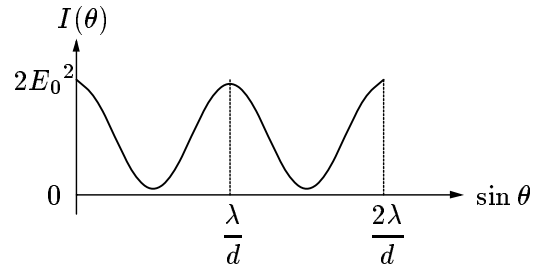
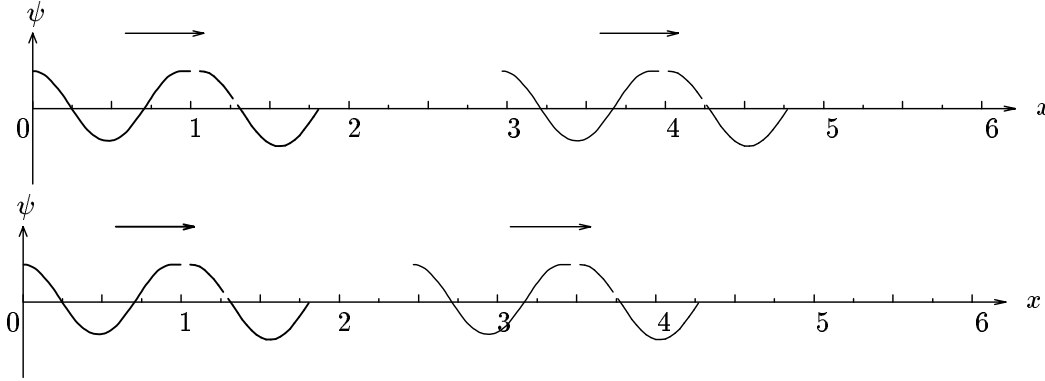


図 2.5: 強度分布



うなり

波の重ね合わせの原理の，時間的現われがうなりである．観測者はある場所 ( $x = 0$ ) で，振動数の近い ( $f_1 \div f_2$ ) 似た音波 (ともに初期位相:  $\theta_0 = 0$  とする) を合成音として聞く．

$$\theta_1 = 2\pi f_1 t, \quad \theta_2 = 2\pi f_2 t$$

2 つの音波は  $t = 0$  のとき， $\theta_2 - \theta_1 = 0$  で同位相．次に， $t = \tau$  のとき， $\theta_2 - \theta_1 = 0, \pm 2\pi$  の同位相とすると (つまり， $t = 0$  の次， $t = \tau$  のときうなりが観測される．)

$$2\pi(f_2 - f_1)\tau = \pm 2\pi$$

$$\text{うなりの周期} : \tau = \frac{1}{|f_2 - f_1|} \quad (2.6)$$

うなりが発生するとき，合成波はどんな波形で観測者のところへやって来るか．これを調べるためには，やはり前節【2】でやった合成波の計算の結果 (2.3) を利用する．

$$\theta_k = 2\pi \left( f_k t - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (k = 1, 2)$$

ただし，2 つの音波の波長:  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2$ ) はほぼ等しいので，ある種の平均的な値  $\bar{\lambda}$  を用いた．これより，

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 2\pi \left( \frac{f_1 + f_2}{2} t - \frac{x}{\bar{\lambda}} \right), \quad \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \pi(f_1 - f_2)t$$

合成波 (2.3) は，

$$\psi_1 + \psi_2 = 2A \cos \pi(f_1 - f_2)t \cos 2\pi \left( \bar{f}t - \frac{x}{\bar{\lambda}} \right)$$

<sup>(\*b)</sup> 問 1 の答: 略．

合成波の位相速度は、個々の波の位相速度に等しく、

$$c = f_1 \lambda_1 = f_2 \lambda_2 = \bar{f} \cdot \bar{\lambda}$$

振動数： $\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ ，波長： $\bar{\lambda}$  で  $+x$  軸向きに進行する．ただし、

$$\frac{1}{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{f}}{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{f_1}{c} + \frac{f_2}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

振幅を  $B$  とおくと、

$$B = 2A |\cos \pi(f_1 - f_2)t|$$

つまり、時刻  $t$  によっていろいろな値となる．ここで注意すべきことは、 $f_1$  と  $f_2$  の値が大きく離れていれば、振幅  $B$  の変化は非常にゆるやかになることである．もし、波が音波であれば、人は振動数  $f_1$  の音と、振動数  $f_2$  の音を別々に聴き取ることもできる．うなりを生じる条件が  $f_1 \div f_2$  となるという意味は、振幅  $B$  が短い時間で変化し、音波であれば、音の大きさが急激に変動し、振動数の違いも聴き取りにくくなるということである．

**例 2** うなりの周期を  $\tau$

として、2つの波：

$$\begin{cases} \psi_1 = A \cos \frac{10\pi}{\tau} t \\ \psi_2 = A \cos \frac{8\pi}{\tau} t \end{cases}$$

を合成したグラフを描け．

2つの波の振動数は  $f_1 = \frac{5}{\tau}$  と  $f_2 = \frac{4}{\tau}$ ，したがって、ちょうど、

$$\frac{1}{|f_2 - f_1|} = \frac{1}{\frac{5}{\tau} - \frac{4}{\tau}} = \tau$$

うなりの周期となっている．図 2.6 で実線の波は  $\psi_1$ ，点線の波は  $\psi_2$  であり、これらを合成した波が、図 2.7 の実線となる．この図の点線は合成波の振幅を表していて、最大振幅と最大振幅の間隔が  $\tau$  となっていることも確かめられる．

**問 2** 振動数  $f_1 = 252.21$  Hz のおんさと振動数  $f_2 = 252.81$  Hz のおんさを同時に鳴らすときのうなりの回数を求めよ．(\*c)

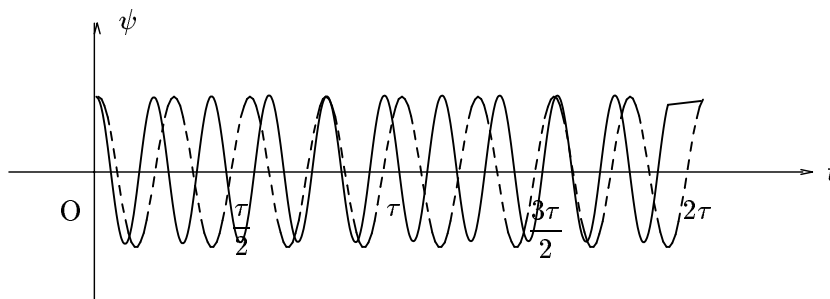


図 2.6: 振動数の近い 2 波

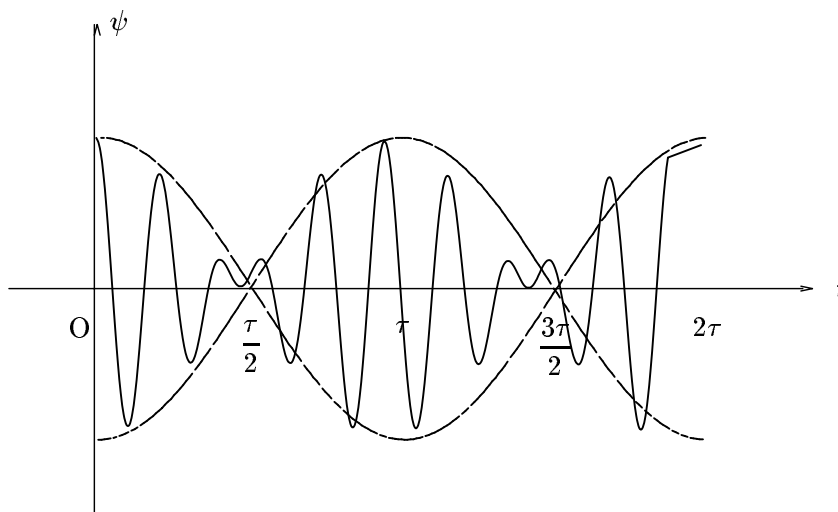


図 2.7: うなりの様子

(\*c) 問 2 の答：0.6 回/s



## 定常波

$+x$  方向に進行する波の位相： $\theta_1$  と， $-x$  方向に進行する波の位相： $\theta_2$  を  $f$ ， $\lambda$  を用いて表すと ( $\theta_0 = 0$  とする.)

$$\begin{cases} \theta_1 = 2\pi \left( ft - \frac{x}{\lambda} \right) \\ \theta_2 = 2\pi \left( ft + \frac{x}{\lambda} \right) \end{cases}$$

とおくと，

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 2\pi ft, \quad \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = -2\pi \frac{x}{\lambda}$$

合成波 (2.3) は，

$$\psi_1 + \psi_2 = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi ft \quad (2.7)$$

この波は，ある位置  $x$  における合成振幅： $B = 2A \left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$  となり，単に振動数  $f$  でその場で振動する．つまり，進まない波であり，このような波を定常波と呼ぶ．

$m$  を整数とすると， $\cos m\pi = \pm 1$ ， $\cos(2m+1)\frac{\pi}{2} = 0$  であることを用いると，定常波 (2.7) においては，時刻  $t$  のどの値についても，

$$\begin{cases} x = m\frac{\lambda}{2} \text{ のとき } , B = 2A \left| \cos m\pi \right| = 2A \\ x = (2m+1)\frac{\lambda}{4} \text{ のとき } , B = 2A \left| \cos(2m+1)\frac{\pi}{2} \right| = 0 \end{cases}$$

この関係を言い換えれば，位相差：

$$\theta_1 - \theta_2 = -4\pi \frac{x}{\lambda} = -2m\pi,$$

つまり，同位相となる位置  $x$  の所で，定常波の振幅  $B$  が最大，位相差：

$$\theta_1 - \theta_2 = -4\pi \frac{x}{\lambda} = -(2m+1)\pi,$$

つまり，逆位相となる位置  $x$  の所で振幅 0，すなわち，振動しなくなる．前者の位置を定常波の腹，後者の位置を定常波の節と呼ぶ．腹の位置では， $-2A \leq \psi_1 + \psi_2 \leq 2A$  の間の振動が生じ，他の節以外の位置では， $B < 2A$  の振動となる．この様子は，図 2.8 のようになる．図の  $\bullet$  印は節の位置を示している．

**例 3** この節のはじめに図 2.2 で示した平面的な干渉に戻ることにする．水面上の 2 点  $S_1, S_2$  を同位相で振動させたとき，直線上の定常波であれば，点として現れる節が， $S_1, S_2$  を波源とする 2 つの円形波の重ね合わせでは，線となって現れる．この節の線がどのような曲線を描くかを求めよう．ここでは，波長を  $\lambda$  として， $\overline{S_1 S_2} = 3\lambda$  の場合とする．

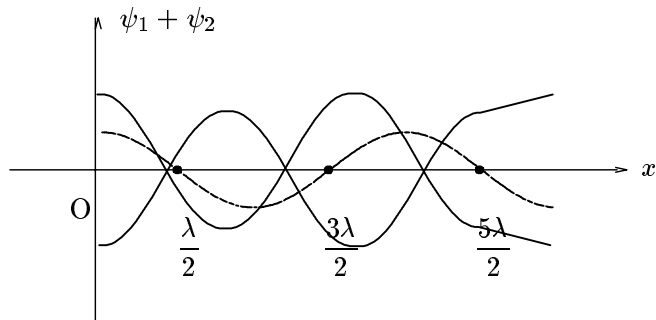


図 2.8: 定常波

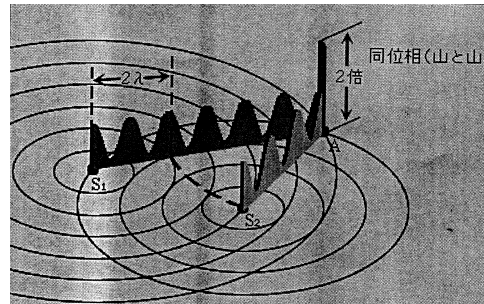


図 2.9:  $\overline{S_1 A} - \overline{S_2 A} = 2\lambda$  の例

$S_1, S_2$  から出た波が，水面上の A 点で重なる場合を考える．**例 1** の場合と違って，2 つの波の進行方向は平行ではないが，同じように径路差  $\overline{S_1A} - \overline{S_2A}$  によって，同位相，逆位相の条件が設定される． $m$  を整数として，

$$\text{同位相となる条件: } \frac{2\pi}{\lambda}(\overline{S_1A} - \overline{S_2A}) = 2m\pi$$

$$\text{逆位相となる条件: } \frac{2\pi}{\lambda}(\overline{S_1A} - \overline{S_2A}) = (2m+1)\pi$$

この関係を径路差で見ると，波が強め合う条件： $\overline{S_1A} - \overline{S_2A} = m\lambda$  (2.8)

$$\text{波が弱め合う条件: } \overline{S_1A} - \overline{S_2A} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (2.9)$$

となる．ただし， $\overline{S_1S_2} = 3\lambda$  であることから， $|\overline{S_1A} - \overline{S_2A}| < 3\lambda$  となるので，この場合には，整数は  $m = 0, \pm 1, \pm 2$  の値しか取れない．

図 2.9 は，波が強め合う条件の  $m = 2$  の場合： $\overline{S_1A} - \overline{S_2A} = 2\lambda$  の例である．また，図 2.10 は，波が弱め合う条件の  $m = 2$  の場合： $\overline{S_1A} - \overline{S_2A} = \frac{3}{2}\lambda$  の例である．

(2.9) 式の条件を満たす A 点の軌跡が節の線となる．すなわち，

$$|\overline{S_1A} - \overline{S_2A}| = \frac{1}{2}\lambda, \quad |\overline{S_1A} - \overline{S_2A}| = \frac{3}{2}\lambda, \quad |\overline{S_1A} - \overline{S_2A}| = \frac{5}{2}\lambda$$

は，3 組の双曲線を示す．図 2.11 のその様子が描かれている．左右の図で，節の線の中の波は，模型的に濃淡で表されているが，振動を繰り返して  $\overline{S_1S_2}$  から，図の上下へ進行して行く．直線上の定常波のときのように，その場で振動する訳ではない．

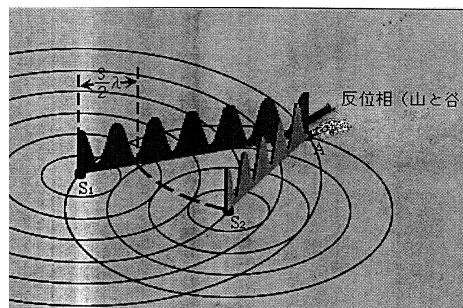


図 2.10:  $\overline{S_1A} - \overline{S_2A} = \frac{3}{2}\lambda$  の例

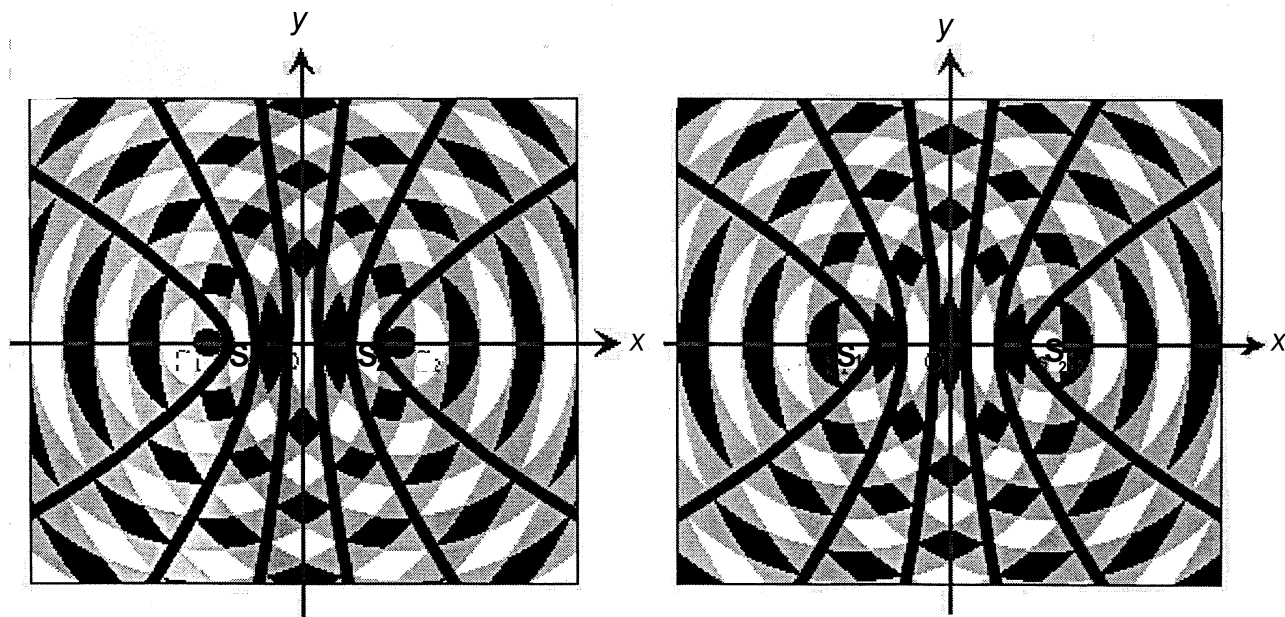


図 2.11: 水面の波の干渉