日本留学生のための数学

数学（基礎）

—数学 I，数学 A，数学 II，数学 B—

クラス		番号		氏名	

目次

第1章　数と式の計算

1–1　整数と整式

≪ この節で学ぶこと ≫
[**整数，整式，整式の加法・減法，指数法則，整式の乗法，展開公式**]

★　整数

整数=**自然数 1，2，3，$\cdots$，ゼロ 0，および，**$-1, -2, -3, \cdots,$ **の集合の要素**

★　整数と整式

1 年を日になおした整数と，3，6，5 のような**係数**と 10 のところを文字 x とおきかえた x の **整式**：

$$365 = 3\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 5 \implies 3x^2 + 6x + 5$$

ただし，整式の場合の係数は 10 以上の自然数ばかりでなく，もっといろいろな数，a, b など数と同じように考えている文字とすることもできる．

27 日 7 時間 43 分 15 秒（月の自転周期）を秒になおした整数と，24 のところを x，60 のところを y とおきかえた x, y の整式：

$$27\cdot 24\cdot 60^2 + 7\cdot 60^2 + 43\cdot 60 + 15 \implies 27xy^2 + 7y^2 + 43y + 15$$

★　整式の加法・減法

例 1　2 つの整式

$$A = 4x^2 + 3x + 6, \qquad B = 2x^2 + 1$$

について，$A + B$，$A - B$ を求めよ．

【解】

$$\begin{array}{r} 436 \\ +)\underline{201} \\ 637 \end{array} \implies \begin{array}{rr} & 4x^2 + 3x + 6 \\ +) & \underline{2x^2 \qquad\quad + 1} \\ & 6x^2 + 3x + 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 436 \\ -)\underline{201} \\ 235 \end{array} \implies \begin{array}{rr} & 4x^2 + 3x + 6 \\ -) & \underline{2x^2 \qquad\quad + 1} \\ & 2x^2 + 3x + 5 \end{array}$$

ただし，各桁の数とこれに対応する定数の間の足し算，引き算に（例えば $6 + 5 = 11$ のような）繰り上がり（例えば $11 - 5 = 6$ のような）繰り下がりが起こる場合には対応がなくなる．

次のように計算してもよい．

$$\begin{aligned} A + B &= (4x^2 + 3x + 6) + (2x^2 + 1) \\ &= (4 + 2)x^2 + 3x + (6 + 1) \\ &= 6x^2 + 3x + 7 \\ A - B &= (4x^2 + 3x + 6) - (2x^2 + 1) \\ &= (4 - 2)x^2 + 3x + (6 - 1) \\ &= 2x^2 + 3x + 5 \end{aligned}$$

問 1　次の整式にについて $A + B$，$A - B$ を求めよ．

(1)　$A = 4x^2 - 2x + 4 \qquad B = 7x^2 - 4x - 8$

(2)　$A = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{2} \qquad B = \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}$

★　指数法則

【1】$a^m a^n = a^{m+n}$,【2】$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(m > n)$,【3】$(a^m)^n = a^{mn}$,【4】$(ab)^m = a^m b^m$

★　整式の乗法

例 2　2 つの整式

$$A = 2x^2 + x + 2, \qquad B = x + 3$$

について，$A \cdot B$ を求めよ．

【解】

$$\begin{array}{rcl}
212 & & 2x^2 + \quad x + \quad 2 \\
\times)\ \ 13 & \Longrightarrow & \times)\ \ x\ +\ \ 3 \qquad\quad \\
\hline
636 & & 2x^3 + \quad x + 2x \\
212\ & & 6x^2 + 3x + \ 6 \\
\hline
2756 & & 2x^3 + 7x^2 + 5x + \ 6
\end{array}$$

★　展開公式

展開（てんかい）する：整式の積を単項式の和になおすこと．

【1】$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

【2】$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

【3】$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

【4】$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

【5】$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

【6】$(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

問 2　つぎの各式 P を，指定された順序で展開せよ．
各問題文中の $\boxed{\text{(a)}}$ ～ $\boxed{\text{(f)}}$ 適する整式を入れよ．

(1)　$P = (x-2)^3(x^2-3x+1)$

(i)　展開公式【6】を用いて，

$$(x-2)^3 = \boxed{\text{(a)}}$$

(ii)　$\boxed{\boxed{\text{例 2}}}$ に習って，

$$P = \left(\boxed{\text{(a)}}\right)(x^2-3x+1)$$

を計算すると，

$$P = \boxed{\text{(b)}}$$ 【答】

(2)　$P = (x+a)^3(x-a)^3$

(i)　$(x+a)^3(x-a)^3 = \{(x+a)(x-a)\}^3$ となるから，
展開公式【3】を用いて，

$$(x+a)(x-a) = \boxed{\text{(c)}}$$

(ii)　展開公式【6】を用いて，

$$P = \left(\boxed{\text{(c)}}\right)^3 = \boxed{\text{(d)}}$$ 【答】

(3)　$P = (x+y-z)(x-y+z)$

(i)　$(x+y-z)(x-y+z) = \{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$ と変形して，
展開公式【3】を用いる．

$$P = x^2 - \left(\boxed{\text{(e)}}\right)^2$$

(ii)　展開公式【2】を用いて，

$$P = x^2 - \left(\boxed{\text{(f)}}\right) = \boxed{\text{(g)}}$$ 【答】

1–2　有理数・無理数と有理式・無理式

≪ この節で学ぶこと ≫

[**整式の除法，有理数，剰余の定理，因数定理，無理数，実数，絶対値，分母の有理化，因数分解**]

★　整数の除法

> **例 3**　$A = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 9,\quad B = x^2 + 2$ のとき，A を B で割った商と余りを求めよ.

【解】

$$
\begin{array}{r}
24 \\
102\overline{)2479} \\
\underline{204} \\
439 \\
\underline{408} \\
31
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{array}{rr}
 & 2x+\quad 4 \\
x^2+2\big) & \overline{2x^3+4x^2+7x+9} \\
 & \underline{2x^3 \qquad\quad +4x \qquad} \\
 & 4x^2+3x+9 \\
 & \underline{4x^2 \qquad\quad +8} \\
 & 3x+1
\end{array}
$$

これを等式で表せば,

$$2x^3 + 4x^2 + 7x + 9 = (x^2 + 2)(2x + 4) + 3x + 1$$

A, B を用いれば,

$$A = B(2x + 4) + 3x + 1$$

となる．このとき，$2x + 4$ が**商**(しょう)，$3x + 1$ が**余り**(あまり)である.

整数 $a, b, (b > 0)$ に対し，a を b で割った商が q，余りが r であるとき,

$$a = bq + r, \quad 0 \leqq r < b$$

が成り立つ.

同様に，x についての整式 A, B に対し，A を B で割った商が Q，余りが R であるということは，

$$A = BQ + R, \quad [R \text{ の次数}] < [B \text{ の次数}]$$

が成り立つ．特に，$R = 0$ となるとき，つまり，A が B で割り切れるとき，B を A の**因数**(いんすう)という．

問 3　つぎの計算をせよ．また，その結果を $A = BQ + R$ の形に書け．

(1)　$(3x^2 + 2x + 1) \div (3x - 4)$

(2)　$(2x\ 3 + 5x^2 - 1) \div (x^2 + 2x - 1)$

(3)　$(4x - 5) \div (x + 2)$

★　有理数

有理数(ゆうりすう)= たがいに**素**(そ)である 2 つの整数 p, q $(p > 0)$ を用いて $\dfrac{q}{p}$ と表せる数．

★　有理式

例 3 の計算の答は，

$$\frac{2479}{102} = 24\frac{31}{102} \Longrightarrow \frac{2x^3 + 4x^2 + 7x + 9}{x^2 + 2} = 2x + 4 + \frac{3x + 1}{x^2 + 2}$$

分数式(ぶんすうしき)= A を整式，B を 1 次以上の整式とするとき，$\dfrac{A}{B}$ の形の式．
有理式(ゆうりしき)= 整式 or 分数式．
分数式の注意：

$$\frac{2(x-4)}{(x+1)(x-4)} \neq \frac{2}{x+1}$$

分数式の計算は，分数の計算に対応して考えることができる．

問 4　つぎの計算をせよ．

(1)　$\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{x+1}$　　(2)　$\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2-1}$

(3)　$\dfrac{x-4}{x+4}\times(x^2+x)$　　(4)　$\dfrac{x^2-49}{x^2+2x}\div\dfrac{x-7}{x+2}$

★　剰余の定理・因数定理

剰余(じょうよ)の定理(ていり)：整式 $f(x)$ を $x-a$ で割った余りは $f(a)$．
因数定理(いんすうていり)：$f(x)$ が $x-a$ で割り切れる $\Longleftrightarrow$ $f(a)=0$

例 4　x の整式 $f(x)$ を $x-2$，$x-3$ で割ったときの余りがそれぞれ，3, 6 であったとき，$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．
(摂南大学)

【解】　$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすれば，

$$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+(ax+b)$$

問題の条件：$f(2)=2a+b=3$ ＆ $f(3)=3a+b=6$

$$\Longleftrightarrow\ a=3\ \ \&\ \ b=-3$$

$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りは $\underline{\underline{3x-3}}$

問 5　つぎの余りだけを求めよ．

(1)　$(3x^2+2x+1)\div(3x-4)$

(2)　$(4x-5)\div(x+2)$

★　無理式と無理数

無理数(むりすう)＝循環しない無限小数，$\sqrt{3}$，π など．
実数(じっすう)＝有理数と無理数の集合の要素．

絶対値(ぜったいち)を使った表現：

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

例 5

(1)　次各問題文中の **A** ～ **C** には，それぞれ –（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

$\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分は $\boxed{\mathbf{A}}$ である．

また，$\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ の小数部分を a とするとき，$a - \dfrac{2}{a} = \boxed{\mathbf{BC}}$ である．

(2)　次の問題文中の **D** に対して，それぞれの選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい．

関数

$$f(x) = |2-x| - 2|2+x|$$

は $x \leqq -2$ のとき $\boxed{\mathbf{D}}$ に一致する．

① $-3x-2$　② $-x-6$　③ $x+6$　④ $3x+2$

(日留試)

【解】　(1)(i) **分母**(ぶんぼ)**の有理化**(ゆうりか)をする．

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1} \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3} \end{aligned}$$

$3 < 2+\sqrt{3} < 4$,　$\therefore$ 整数部分は $\underline{3}$　　　（A の【答】3）

(ii) $a = (2+\sqrt{3}) - 3 = \sqrt{3} - 1$ だから，

$$\begin{aligned}\frac{2}{a} &= \frac{2}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1\end{aligned}$$

$$\therefore\ a - \frac{2}{a} = (\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+1) = \underline{\underline{-2}}$$

（BC の【答】-2）

(2) $x \leqq -2 \iff x+2 \leqq -2+2$

$x \leqq -2 \iff 2 \leqq -x \iff 2+2 \leqq 2-x$

$$f(x) = |2-x| - 2|2+x| \quad \& \quad 2-x \geqq 4 > 0 \quad \& \quad x+2 \leqq 0$$

$$\iff f(x) = 2 - x - 2\{-(2+x)\} = \underline{\underline{x+6}}$$

（D の【答】 ③）

【検算】$x \leqq -2$ を満たす x，例えば $x = -3$ を代入してみる．

$$f(-3) = |2-(-3)| - 2|2+(-3)| = |5| - 2|-1| = 3$$

【答】の式：$x + 6 = (-3) + 6 = 3$

問 6　つぎの計算をせよ．

(1)　$\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{15}+\sqrt{5}}$　(関東学院)

(2)　$x = 6+2\sqrt{5},\ y = 6-2\sqrt{5}$ のとき，$\sqrt{x}-\sqrt{y}$，$\sqrt{x^2+y^2}$　(摂南大学)

★　因数分解

整式の因数分解（いんすうぶんかい）：

(i) 展開公式【1】～【6】を逆に使う.

(ii) それ以外の**因数分解の公式**：

【1】$acx^2+(ad+bd)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

【2】$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

【3】$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

(iii) 因数定理を使う.

例 6

(1)　$a^3-ab^2-b^2c+a^2c$ を因数分解せよ.

(2)　$f(x)=x^4-5x^2-10x-6$ を実数係数の範囲で因数分解せよ.

(3)　整式（polynominal）

$$P=x^4-7x^2+12$$

を因数分解すると

$$P=\left(x-\boxed{\mathbf{A}}\right)\left(x+\boxed{\mathbf{B}}\right)\left(x-\sqrt{\boxed{\mathbf{C}}}\right)\left(x+\sqrt{\boxed{\mathbf{D}}}\right)$$

(日留試)

【解】 (1) $a^3-ab^2-b^2c+a^2c$ は a についていは 3 次式，b 二ついては 2 次式，c については 1 次式である．このようなとき，もっとも低い次数 c について整理する.

$$\begin{aligned}a^3-ab^2-b^2c+a^2c &= c(a^2-b^2)+a(a^2-b^2)\\ &= (a^2-b^2)(c+a)\\ &= \underline{\underline{(a+b)(a-b)(a+c)}}\end{aligned}$$

(2) 高次式の場合は，因数定理を使うことが多い．定数 -6 から値が 0 になる可能性として，$f(1)$，$f(-1)$，$f(2)$，$f(-2)$，$f(3)$，$f(-3)$，$f(6)$，$f(-6)$ を調べてみると，

$$f(-1)=(-1)^4-5\cdot(-1)^2-10\cdot(-1)-6=0,\ f(3)=3^4-5\cdot 3^2-10\cdot 3-6=0$$

$f(x)$ は $(x+1)$ と $(x-3)$ の因数をもつ.

筆算で $f(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割り算すると,

$$\frac{x^4-5x^2-10x-6}{(x+1)(x-3)} = \frac{x^4-5x^2-10x-6}{x^2-2x-3} = x^2+2x+2$$

$$f(x) = \underline{\underline{(x+1)(x-3)(x^2+2x+2)}}$$

$$x^2 2x+2 = (x+1)^2+1 > 0$$

だから，実数係数の範囲では，もうこれ以上，因数分解できない.

(3) $x^2 = X$ とおき，因数分解の公式【1】を使えば,

$$P = X^2-7X+12 = (X-4)(X-3)$$

つぎに，展開公式【3】を使えば,,

$$\begin{aligned} P &= (x^2-4)(x^2-3) \\ &= (x^2-2^2)\left\{x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right\} \\ &= (x-\underline{\underline{2}})(x+\underline{\underline{2}})\left(x-\sqrt{\underline{\underline{3}}}\right)\left(x+\sqrt{\underline{\underline{3}}}\right) \end{aligned}$$

（A の【答】2，B の【答】2，C の【答】3，D の【答】3）

問 7　つぎの各式を有理数係数の範囲で因数分解せよ.

(1)	$a^2-c^2-ab-bc$	(2)	$a^2b^2-2ab+1$	(3)	$x^2-\dfrac{1}{9}$
(4)	$6x^2-13x-15$	(5)	x^3-27	(6)	x^3-7x-6

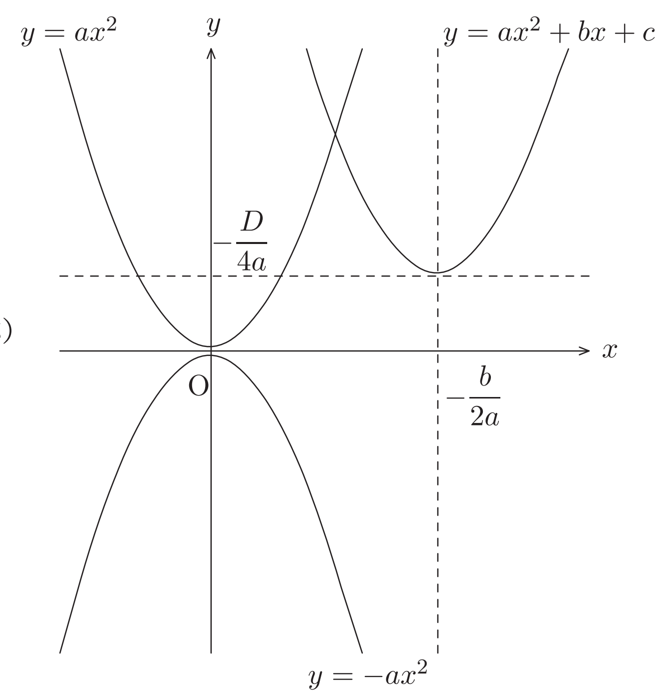
第2章　方程式とグラフ

2–1　2 次関数のグラフ

≪ この節で学ぶこと ≫

[**放物線，放物線の頂点，放物線の軸，線対称移動，平行移動，判別式，関数定義域と値域，最大値・最小値**]

★　2 次関数のグラフ



基本型：　$y = ax^2, \quad (a > 0)$

下に凸(とつ)**の放物線**(ほうぶつせん)
放物線の頂点(ちょうてん)：原点 O,
放物線の軸(じく)：$x = 0$（y 軸に関して線対称）

【1】x 軸（$y = 0$）に関して線対称移動
$y = ax^2$ の x, y を,

$$\begin{cases} x \to x \\ y \to -y \end{cases}$$

とおきかえると，$-y = ax^2$

$$\boxed{\textbf{線対称型：} \quad y = -ax^2, \quad (a > 0)}$$

上に凸の放物線．頂点，軸は基本型と同じ．

【2】$\underline{x \text{ 軸方向に} -\dfrac{b}{2a},\ y \text{ 軸方向に} -\dfrac{D}{4a},\ (D = b^2 - 4ac) \text{ だけ平行移動}}$

$y = ax^2$ の x, y を，

$$\begin{cases} x \to x + \dfrac{b}{2a} \\ \\ y \to y + \dfrac{D}{4a} \end{cases}$$

とおきかえと，

$$y + \frac{D}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\begin{aligned} y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a\left\{x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - -\frac{b^2}{4a} + c \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{一般型：} \quad y = -ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}, \quad (a \neq 0)}$$

$a > 0$ のとき下に凸，$a < 0$ のとき上に凸の放物線.
頂点：$\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{D}{4a}\right)$，軸：$x = -\dfrac{b}{2a}$.

例 7　それぞれの選択肢の中から最も適するものを選びなさい.

放物線 $y = x^2 + 2x + 4$ と点 A(1, 1) に関して対称な放物線の方程式は $\boxed{\mathbf{A}}$ である.

① $y = x^2 - 2x + 4$　② $y = x^2 - 2x - 10$　③ $y = x^2 - 6x + 8$
④ $y = -x^2 + 6x - 10$　⑤ $y = -x^2 - 6x - 8$

（日留試）

【解】 点対称移動の問題.
$y = x^2 + 2x + 4$ の x, y を,

$$\begin{cases} x \to 2 \cdot 1 - x \\ y \to 2 \cdot 1 - y \end{cases}$$

とおきかえて，式を $y =$ の形にするのが，機械的な方法であるが,

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x + 4 \\ &= (x^2 2x + 1) + 3 \\ &= (x + 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

と**基本変形**（きほんへんけい）して，頂点が $(-1,\ 3)$ で下に凸の放物線であることを知り，点対称移動した放物線の頂点を $(p,\ q)$ とおくと,

$$\frac{p-1}{2} = 1, \quad \frac{q+3)(2}{=}1 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 3, \quad q = -1$$

点対称のグラフは上に凸の放物線になるから,

$$\begin{aligned} y &= -(x - p)^2 + q \\ &= -(x - 3)^2 - 1 \\ &= -(x^2 - 6x + 9) - 1 \\ &= \underline{\underline{-x^2 + 6x - 10}} \end{aligned}$$

（A の【答】④）

問 8　次の問題文中の **A** ～ **I** には，それぞれ –（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

(1)　2 次関数（quadratic function）

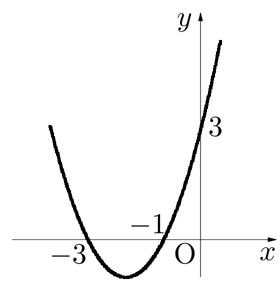
$$y = -x^2 - 2x + 3$$

のグラフは $\left(\boxed{\mathbf{AB}}, \boxed{\mathbf{C}}\right)$ を頂点とし，x 軸と $x = \boxed{\mathbf{DE}}$ と $x = \boxed{\mathbf{F}}$ で交わる．

(2)　関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

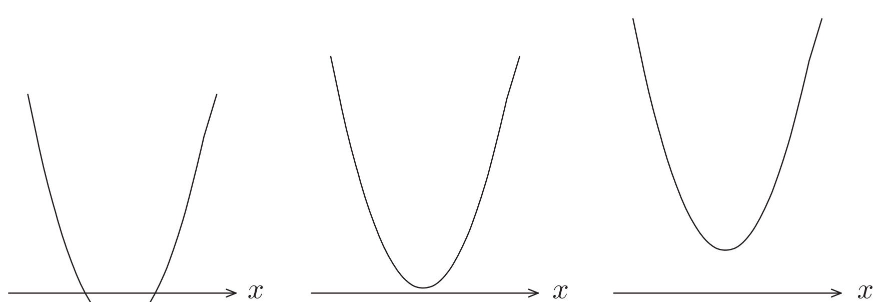
のグラフが右図のような曲線であれば，
$a = \boxed{\mathbf{G}}$, $b = \boxed{\mathbf{H}}$, $c = \boxed{\mathbf{I}}$ である．



(日留試)

★　判別式

$f(x) = ax^2 + bx + c$ の**判別式**（はんべつしき）：$D = b^2 - 4ac$



$D > 0$　　　$D = 0$　　　$D < 0$

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ と x 軸との共有点

(1) $D > 0$ のとき，共有点 2 個
(2) $D = 0$ のとき，共有点 1 個
(3) $D < 0$ のとき，共有点なし

例 8　2 次関数

$$y = x^2 + -2x + k$$

のグラフと x 軸との共有点の個数は，k の値によってどのようにかわるか.

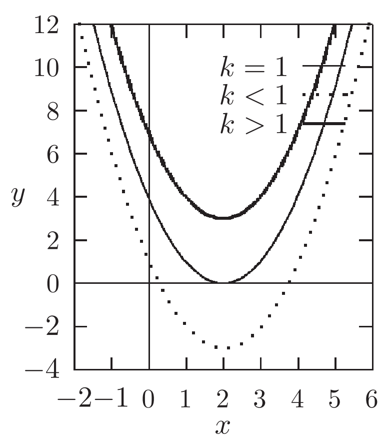
【解】 判別式：

$$D = (-2)^2 - 4k = 4(1 - k)$$

$$\begin{cases} k < 1 \text{ のとき,} & D > 0 \\ k = 1 \text{ のとき,} & D = 0 \\ k > 1 \text{ のとき,} & D < 0 \end{cases}$$

共有点の個数は,

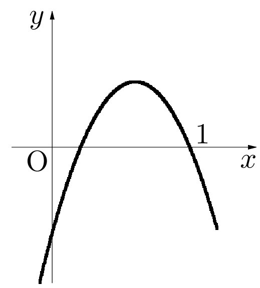
$$\begin{cases} \underline{\underline{k < 1 \text{ のとき,}}} & \underline{\underline{2 \text{ 個}}} \\ \underline{\underline{k = 1 \text{ のとき,}}} & \underline{\underline{1 \text{ 個}}} \\ \underline{\underline{k > 1 \text{ のとき,}}} & \underline{\underline{\text{なし}}} \end{cases}$$



問 9 選択肢の中から最も適するもの一つを選びなさい.

2 次関数（quadratic function）

$$y = ax^2 + bx + c$$



のグラフが右図のようになっているとする.
このとき，a の値（value）は $\boxed{\mathbf{A}}$,
b の値は $\boxed{\mathbf{B}}$, $b^2 - 4ac$ の値は $\boxed{\mathbf{C}}$,
$a + b + c$ の値は $\boxed{\mathbf{D}}$ である.

① 正　② 負（negative）　③ 0　④ 確定できない

(日留試試行)

★ 関数

y は x の**関数**（かんすう）：$y = f(x) \cdots x$ の値を定めるとそれに応じて y の値がただ 1 つだけ定まる.

【例】円の面積 y，円の半径 x とするとき，$y = \pi x^2$

$$f(x) = \pi x^2 \text{ とすると，} f(2) = 4\pi,\quad f(\sqrt{2}) = 2\pi,\quad f(a) = \pi a^2$$

★ 最大値・最小値

最大値（さいだいち）・最小値（さいしょうち）問題

関数 $f(x)$ の**値域**（ちいき）: $\min \leqq f(x) \leqq \max$
変数 x の**定義域**（ていぎいき）: $p \leqq x \leqq q$

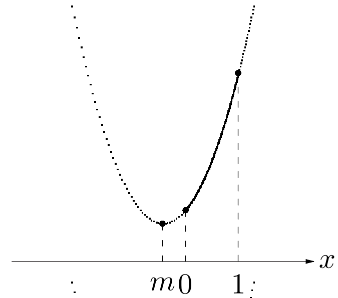
$p < x < q$ などの定義域によって，min または max が存在しないときがある.

例 9 関数 $f(x) = x^2 - 2mx + 2m$ の区間 $0 \leq x \leq 1$ での最小値 $g(m)$ を求め，m の関数 $g(m)$ のグラフを描け. (高知大学)

【解】 $f(x)=(x-m)^2-m^2+2m$

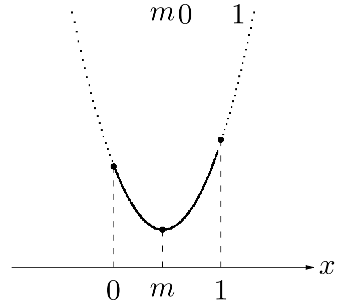
(i) $m<0$ のとき；$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲は右図のようになるから，

$$g(m)=f(0)=\underline{\underline{2m}}$$



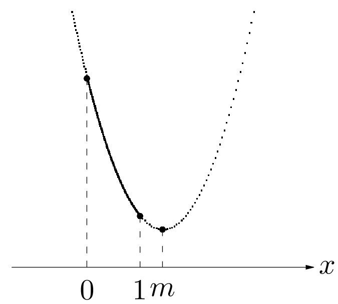
(ii) $0 \leqq m \leqq 1$ のとき；$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲は右図のようになるから，

$$g(m)=f(m)=\underline{\underline{-m^2+2m}}$$

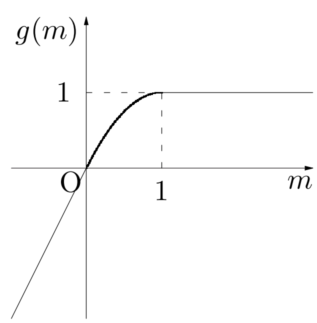


(iii) $m>1$ のとき；$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲は右図のようになるから，

$$g(m)=f(1)=\underline{\underline{1}}$$



$$g(m)=\begin{cases} 2m & (m<0 \text{ のとき}) \\ -m^2+2m & (0 \leqq m \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (m>1 \text{ のとき}) \end{cases}$$



問 10　x の範囲を $-1 \leqq x \leqq 4$ としたとき，関数

$$f(x) = x^2 - 2x - 2$$

の最大値と最小値と，そのときの x の値を求めよ．

2–2　2 次方程式の解

≪ この節で学ぶこと ≫

[**恒等式と方程式，解の公式，重解，虚数，複素数，共役な複素数，複素数の絶対値 解と係数の関係**]

★　恒等式と方程式

恒等式(こうとうしき)= 文字

【例】$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

方程式(ほうていしき)= 文字

【例】$2x - 1 = -x + 5 \cdots$ **方程式の解**：$x = 2$

★　解の公式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ の解の求め方.

(i) 因数分解を使う.

(ii) 解の公式を使う.

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ or } \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

ただし，$D = b^2 - 4ac$

例 10　2 次方程式

$$x^2 + 2kx + 4 = 0$$

が重解をもつような定数 k の値を定めよ．またそのときの解を求めよ.

【解】 2 次方程式が 1 つしか解をもたないとき，2 つの解が重なったと考えて，その解を**重解**（じゅうかい）という．

(i) このとき，判別式：$D=0$ となるから，

$$D=(2k)^2-4\cdot 4=0$$

$$\iff k^2-2^2=0$$

$$\iff (k+2)(k-2)=0$$

$$\iff \underline{\underline{k=-2 \ \text{ or } \ 2}}$$

(ii) 解の公式より，

$$x=\frac{-2k\pm 0}{2}=-k$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{k=-2 \text{ のとき}}} & \underline{\underline{x=2}} \\ \underline{\underline{k=2 \text{ のとき}}} & \underline{\underline{x=-2}} \end{cases}$$

* 解の公式によらずとも，方程式は，

$$k=-2 \text{ のとき}, \ x^2-4x+4=(x-2)^2=0$$

$$k=2 \text{ のとき}, \ x^2+4x+4=(x+2)^2=0$$

というように，**完全平方**（かんぜんへいほう）の形になっているので，解はすぐに求められる．

問 11　選択肢の中から最も適するもの一つを選びなさい．

2 次方程式

$$2x^2+6x-3=0$$

の 2 つの解のうち，小さい方の解は $\boxed{\mathbf{A}}$ である．

① $\dfrac{-3-\sqrt{15}}{2}$　② $\dfrac{-3-\sqrt{3}}{2}$　③ $\dfrac{3-\sqrt{15}}{2}$　④ $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

(日留試)

★　虚数

虚数単位（きょうすうたんい）：$i \mid i^2 = -1$
虚数$= a,\ b\ (b \neq 0)$ を実数として，$a + bi$ の形の数．
複素数（ふくそすう）$=$ 実数と虚数の集合の要素．$z = a + bi$
共役（きょうやく）な複素数：$\overline{z} = a - bi$（$z = a + bi$ に対して）
絶対値：$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$a > 0 \text{ のとき，} \sqrt{-a} = \sqrt{a}i$$

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解

(1) $D > 0$ のとき $\Longleftrightarrow$ 相異なる 2 つの実数解をもつ
(2) $D = 0$ のとき $\Longleftrightarrow$ 実数の重解をもつ
(3) $D < 0$ のとき $\Longleftrightarrow$ 相異なる 2 つの虚数解をもつ

例 11　方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の解 $p + qi$ で $q > 0$ となるものを α とするとき，$\alpha + \overline{\alpha},\ \alpha - \overline{\alpha},\ \alpha\overline{\alpha},\ \dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha}$ の値を求めよ．ただし $p,\ q$ は実数とする．
（法政大学改）

【解】(i) 判別式 D に $a = 1,\ b = -4,\ c = 5$ を代入して，

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$$

これらを解の公式の第 2 式に代入して，

$$\alpha = \frac{-(-4) + \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

α と共役な複素数：$\overline{\alpha} = 2 - i$
(ii) $\alpha + \overline{\alpha} = (2 + i) + (2 - i) = \underline{\underline{4}}$
(iii) $\alpha - \overline{\alpha} = (2 + i) - (2 - i) = \underline{\underline{2i}}$
(iv) $\alpha\overline{\alpha} = (2 + i)(2 - i) = 2^2 - i^2 = 4 - (-1) = \underline{\underline{5}}$

(v) 割り算のときは分母を実数化する.

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{\alpha}}{\alpha} &= \frac{\overline{\alpha}^2}{\alpha\overline{\alpha}} \\
&= \frac{(2-i)^2}{5} \\
&= \frac{2^2 - 2\cdot 2i + i^2}{5} \\
&= \frac{4-4i+(-1)}{5} \;=\; \underline{\underline{\frac{1}{5}(3-4i)}}
\end{aligned}
$$

* $\alpha + \overline{\alpha} = -\dfrac{b}{a}$, $\alpha\overline{\alpha} = \dfrac{c}{a}$ の関係があることは，つぎに習う.

問 12 2 次方程式 $x^2 - 3x + 4 = 0$ を解け.

★ 解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 を α, β とおくと，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) = a\{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}$$

例 11　次の問題文中の **A** ～ **L** には，それぞれ −（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

2 次方程式

$$6x^2 + 3x + 4 = 0$$

の二つの解を α，β とするとき，

$$\alpha + \beta = \frac{\boxed{\mathbf{AB}}}{\boxed{\mathbf{C}}}, \quad \alpha\beta = \frac{\boxed{\mathbf{D}}}{\boxed{\mathbf{E}}}$$

である．
　また

$$(\alpha - \beta)^2 = \frac{\boxed{\mathbf{FGH}}}{\boxed{\mathbf{IJ}}}, \quad \alpha^3 + \beta^3 = \frac{\boxed{\mathbf{K}}}{\boxed{\mathbf{L}}}$$

となる．ただし，$\dfrac{\boxed{\mathbf{AB}}}{\boxed{\mathbf{C}}}$，$\dfrac{\boxed{\mathbf{D}}}{\boxed{\mathbf{E}}}$，$\dfrac{\boxed{\mathbf{FGH}}}{\boxed{\mathbf{IJ}}}$，$\dfrac{\boxed{\mathbf{K}}}{\boxed{\mathbf{L}}}$ は既約分数（reduced fraction）とする．（日留試）

【解】 (i) 解と係数の関係の式に $a = 6 <\ b = 3,\ c = 4$ を代入して，

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{-1}{2}}}, \quad \alpha\beta = \frac{4}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

（AB の【答】−1，C の【答】2，D の【答】2，E の【答】3）

(ii) α, β の対称式は $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ で表せる．

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2 &= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \\ &= (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-4\alpha\beta \\ &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}-\frac{8}{3} \\ &= \frac{3-4\cdot 8}{12} = \underline{\underline{\frac{-29}{12}}}\end{aligned}$$

あるいは，$D=\{a(\alpha-\beta)\}^2$ の関係を用いてもよい．

（FGH の【答】-29, IJ の【答】12）

(iii) 因数分解の公式【2】を使う．

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) \\ &= (\alpha+\beta)\{(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-3\alpha\beta\} \\ &= (\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{2}{3}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-2\right) = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}\end{aligned}$$

（K の【答】7, L の【答】8）

問 13 $2x^2+3x-7=0$ の解を α, β とするとき，$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ を求めよ．また 2 つの解の符号を調べよ．

第3章　不等式と証明

3–1　不等式

≪ この節で学ぶこと ≫

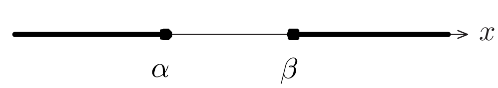
[2 次不等式，分数不等式，無理不等式，絶対不等式，相加平均・相乗平均]

★　2 次不等式

$a = 1$ とおく.

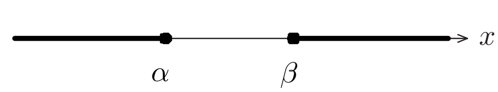
> **2 次方程式** $ax^2 + bx + c = 0$ **の実数解 を** $\alpha,\ \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ **とおくと，**
>
> $$x^2 + bx + c \geqq 0 \iff x \leqq \alpha \ \text{ or } \ x \geqq \beta$$

この区間を数直線上に表せば,
次のようになる.



> **2 次方程式** $ax^2 + bx + c = 0$ **の実数解 を** $\alpha,\ \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ **とおくと，**
>
> $$x^2 + bx + c \leqq 0 \iff \alpha \leqq x \leqq \beta$$

この区間を数直線上に表せば,
次のようになる.



★ 分数不等式

(1) $\dfrac{A}{B} > 0 \iff AB > 0$

(2) $\dfrac{A}{B} \geqq 0 \iff AB \geqq 0 \ \ \& \ \ B \neq 0$

★ 無理不等式

$A \geqq 0 \ \ \& \ \ B \geqq 0$ のときは，$A > B \iff A^2 > B^2$

例 13

(1) 次の問題文中の **A** ～ **C** には，それぞれ –（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

分数不等式（fractional inequality）

$$\frac{3x}{x+2} \leqq 1$$

の解は $\boxed{\mathbf{AB}} < x \leqq \boxed{\mathbf{C}}$ である．

(2) それぞれの選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい．

無理不等式（irrational inequality）

$$2\sqrt{2x-1} \geqq x-1$$

の解は $\boxed{\mathbf{D}} \leqq x \leqq \boxed{\mathbf{E}}$ である．

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $5-2\sqrt{5}$ ④ 2 ⑤ $5+2\sqrt{5}$

（日留試）

【解】(1) 分数不等式の解き方には，決まった《手順》がある。

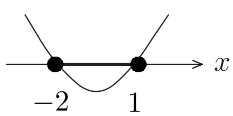
$$\frac{3x}{x+2} \leqq 1 \iff \frac{3x}{x+2} - 1 \leqq 0$$

$$\iff \frac{2(x-1)}{x+2} \leqq 0$$

$$\iff (x+2)(x-1) \leqq 0 \ \&\ x \neq -2$$

$$\iff \underline{\underline{-2 < x \leqq 1}}$$

最後の範囲を求める手段はグラフを使う。
$y=(x+2)(x-1)$



左のグラフより

$$(x+2)(x-1) \leqq 0 \iff -2 \leqq x \leqq 1$$

もちろん，この結果に $x \neq -2$ の条件を付け加える。

（AB の【答】-2，C の【答】1）

(2) 無理不等式はグラフを使って解いた方がよい．$y=x-1$ のグラフは直線.
$y=2\sqrt{2x-1}$ のグラフは，$y \geqq 0$ のとき，両辺を 2 乗して，

$$y^2 = 4(2x-1) \iff y^2 = 8x-4 \iff y^2+4 = 8x \iff \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2} = x$$

$$y = 2\sqrt{2x-1} \iff x = \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2} \ \ \&\ \ y \geqq 0$$

このグラフは，頂点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，軸の方程式：$y=0$ の放物線．ただし，x 軸の上半分である.
2 つのグラフの交点は

$$y = x-1 \ \ \&\ \ x = \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2} \ \ \&\ \ y \geqq 0$$

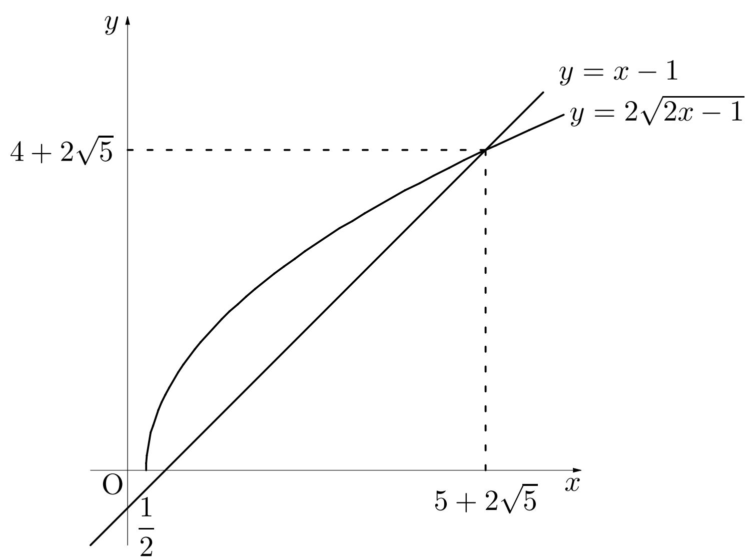
$$\iff y = x-1 \geqq 0 \ \ \&\ \ x = \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\iff y = x-1 \geqq 0 \ \ \&\ \ 8x = (x^2-2x+1)+4$$

$$\iff y = x - 1 \geqq 0 \ \ \& \ \ x^2 - 10x + 5 = 0$$

$$\iff y = x - 1 \geqq 0 \ \ \& \ \ (x = 5 + 2\sqrt{5} \ \text{ or } \ 5 - 2\sqrt{5})$$

$$\iff x = 5 + 2\sqrt{5} \ \ \& \ \ y = 4 + 2\sqrt{5}$$



上のグラフより，

$$2\sqrt{2x-1} \geqq x - 1 \iff \underline{\underline{\frac{1}{2} \leqq x \leqq 5 + 2\sqrt{5}}}$$

(D の【答】②，E の【答】⑤)

問 14 つぎの不等式を解け．

(1) $x^2 - x - 6 < 0$ (2) $x^2 - x - 6 \geqq 0$

（静岡県立大学改）

★　絶対不等式

相加平均・相乗平均（そうかへいきん・そうじょうへいきん）：$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab},\ (a>0,\ b>0)$

例 14　$a > b > 0,\quad a+b=1$ とするとき，次の 5 つの数の大小を比較（compare）せよ．

$$\frac{1}{2},\quad a,\quad b,\quad 2ab,\quad a^2+b^2$$

（千葉大学）

【解】

$$\left.\begin{array}{l} a>b \\ a+b=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow\quad a>1-a \quad\Longrightarrow\quad a>\dfrac{1}{2} \\ \Longrightarrow\quad 1-b>b \quad\Longrightarrow\quad b<\dfrac{1}{2} \end{array}\Bigg\}$$

$$2ab-b=2b\left(a-\frac{1}{2}\right)>0 \Longrightarrow 2ab>b$$

$$2ab-\frac{1}{2}=2a(1-a)-\frac{1}{2}=-2a^2+2a-\frac{1}{2}$$

$$=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<0 \Longrightarrow 2ab<\frac{1}{2}$$

$$a^2+b^2-a=(1-b)^2+b^2-(1-b)=2b^2-b$$

$$=2b\left(b-\frac{1}{2}\right)<0 \Longrightarrow a^2+b^2<a$$

$$a^2+b^2-\frac{1}{2}=a^2+(1-a)^2=2a^2-2a+\frac{1}{2}$$

$$=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2>0 \Longrightarrow a^2+b^2>\frac{1}{2}$$

以上より，

$$\underline{\underline{b<2ab<\frac{1}{2}<a^2+b^2<a}}$$

問 15　$a>0,\ b>0$ のとき，(1) $a^3-b^3 \leqq 3(a-b)a^2$ となることを示せ．

（高知大学）

3–2 証明

≪ この節で学ぶこと ≫

[**命題，必要条件・十分条件，逆，対偶，裏，ドゥ・モルガンの法則**]

★ 必要条件・十分条件

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{命題}\quad p & \Longrightarrow & q \\ \textbf{十分条件}\ (\text{じゅうぶんじょうけん}) & & \textbf{必要条件}\ (\text{ひつようじょうけん}) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{命題}\quad p & \Longleftrightarrow & q \\ & \textbf{必要十分条件} & \end{array}}$$

必要十分条件は**同値**(どうち)ともいう.

★ 命題の逆・対偶

条件 p の**否定**(ひてい)：$\overline{p}$

$$\left(\begin{array}{ccccc} \boxed{p \Longrightarrow q} & \cdots & \textbf{逆}\ (\text{ぎゃく}) & \cdots & \boxed{q \Longrightarrow p} \\ \vdots & \ddots & & & \\ \textbf{裏}\ (\text{うら}) & & \textbf{対偶}\ (\text{たいぐう}) & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \boxed{\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}} & & & & \boxed{\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}} \end{array}\right)$$

★　ドゥ・モルガンの法則

(1) $\overline{r \ \& \ s} \iff \overline{r} \text{ or } \overline{s}$　　(2) $\overline{r \text{ or } s} \iff \overline{r} \ \& \ \overline{s}$

例 15　それぞれの選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい．

2 つの実数 a, b についての命題（proposition）
『$a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ であれば $a + b \geqq 0$ である』

を命題 P とする．

(1)　命題 P についての次の記述の中で，正しくないのは $\boxed{\textbf{A}}$ である．

①　命題 P で，$a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ は $a + b \geqq 0$ であるための必要条件（necessary condition）である．
②　命題 P で，$a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ は $a + b \geqq 0$ であるための十分条件（sufficient condition）である．
③　命題 P で，$a + b \geqq 0$ は $a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ であるための必要条件である．
④　『$a + b \geqq 0$ であれば $a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ である』は命題 P の逆（converse）命題である．

(2)　命題 P の対偶（contrapositive）命題は $\boxed{\textbf{B}}$ である．

①　$a + b \geqq 0$ ならば $a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$
②　$a + b \geqq 0$ ならば $a \geqq 0$ または $b \geqq 0$
③　$a + b < 0$ ならば $a < 0$ かつ $b < 0$
④　$a + b < 0$ ならば $a < 0$ または $b < 0$

【解】 (1)　命題 $p \Longrightarrow q$ 「p であれば q である」が成り立つとき，

q は p の**必要条件**

p は q の**十分条件**

$$\text{命題 P では}\begin{cases} p \text{ は} \quad a \geqq 0 \text{ かつ } b \geqq 0 \\ q \text{ は} \quad a+b \geqq 0 \end{cases}$$

であるから，① は誤り，②, ③ は正しい．

また，$q \Longrightarrow p$ を命題 $p \Longrightarrow q$ の**逆命題**という．④ がこれに当たる。逆命題はつねに真とは限らない．命題 P の逆命題も成り立たないが，ここでは真偽を問題にしているのでないから，記述としては正しい. 以上より，（A の【答】①）

(2) 命題 $p \Longrightarrow q$ に対して，$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ ($\overline{p}$ は p の**否定**) 「q でなければ p でない.」を**対偶**という.

$a+b \geqq 0$ の否定は $a+b < 0$ となることは明らかであろう.

一方，実数 a, b の取り得る値の組合せは，次のページの表の通りである．(& は「かつ」(and)，or は「または」を表す．)

	$a \geqq 0$	$a < 0$
$b \geqq 0$	C $a \geqq 0$ & $b \geqq 0$	A $a < 0$ & $b \geqq 0$
$b < 0$	B $a \geqq 0$ & $b < 0$	D $a < 0$ & $b < 0$

ここで，条件 p「$a \geqq 0$ & $b \geqq 0$」は表の C である．したがって，$\overline{p}$「($a \geqq 0$ & $b \geqq 0$) でない」は，A, B, D を合わせたものであり，条件文で表せば「$a < 0$ or $b < 0$」である.（この記述は D も含むことに注意.）

この関係を**ドゥ・モルガンの法則**という．これを記号で表せば，命題 r, s について，

$\overline{r \ \& \ s} \iff \overline{r}$ or $\overline{s}$（$\iff$ は同値を表す.）

（他に $\overline{r \text{ or } s} \iff \overline{r}$ & $\overline{s}$ の関係もある.）

以上より

$$a+b<0 \implies a<0 \text{ or } b<0$$

（B の【答】④)

命題 $p \Longrightarrow q$ が成り立つとき，対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ はつねに成り立つ．
この例を使って，ドゥ・モルガンの法則を記号で表してみる．

$$\begin{cases} \text{条件 } r \text{ を} & a \geqq 0 \\ \text{条件 } s \text{ を} & b \geqq 0 \end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{cases} r \ \& \ s \text{ は} & a \geqq 0 \ \& \ b \geqq 0 & (\text{表の } C) \\ \overline{r \ \& \ s} \text{ は} & (a \geqq 0 \ \& \ b \geqq 0) \text{ でない} & (\text{表の } A,\ B.\ D) \\ \overline{r} \ \text{or} \ \overline{s} \text{ は} & a < 0 \ \text{or} \ b < 0 & (\text{表の } A,\ B.\ D) \end{cases}$$

これより

$$(1) \quad \overline{r \ \& \ s} \iff \overline{r} \ \text{or} \ \overline{s}$$

が確かめられた．つぎに，

$$\begin{cases} r \ \text{or} \ s \text{ は} & a \geqq 0 \ \text{or} \ b \geqq 0 & (\text{表の } A,\ B,\ C) \\ \overline{r \ \text{or} \ s} \text{ は} & (a \geqq 0 \ \text{or} \ b \geqq 0) \text{ でない} & (\text{表の } D) \\ \overline{r} \ \& \ \overline{s} \text{ は} & a < 0 \ \& \ b < 0 & (\text{表の } D) \end{cases}$$

これより

$$(2) \quad \overline{r \ \text{or} \ s} \iff \overline{r} \ \& \ \overline{s}$$

が確かめられた．

問 16　それぞれの選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい．

実数（real number）$x,\ y,\ a,\ b,\ c$ に関する命題について考える．

(1)　$x = y = 1$ は $x^2 + y^2 = 2$ であるための $\boxed{\textbf{A}}$ ．
(2)　$x = y = 1$ は $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$ であるための $\boxed{\textbf{B}}$ ．
(3)　$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ とする。$a + b > c$ であることは，$a,\ b,\ c$ が三角形の3辺の長さであることの $\boxed{\textbf{C}}$ ．

① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

（日留試）

第4章　数列

4–1　数列

≪ この節で学ぶこと ≫

[数列，初項，第 n 項，有限数列・無限数列，等差数列，公差，等比数列，公比，漸化式]

★　いろいろな数列

数列（すうれつ）= 数を順に並べたもの.

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **1**. 自然数（正の整数）を大きさの順に並べたものは，それ自体が数列である.

$$1, 2, 3, 4, \cdots$$

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**.(a) 碁盤の隅に石を 1 つ置き，
これを囲むように石を並べたもの.

$$1, 3, 5, 7, 9, \cdots$$

これはつまり，奇数の数列である.
(b) 同じ並べ方であるが，白石の個数を正の数，
黒石の個数を負の数を表すと約束すると，

$$1, -3, 5, -7, 9, \cdots$$

(c) 各段階での全体の石の数.

$$1, 4, 9, 16, 25, \cdots$$

奇数の数列の和の規則をも示している.

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **3**. ある月の日曜日となる日は,

$$5, 12, 19, 26$$

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **4**.(a) 紙を重ねては半分に切っていったときの枚数.

$$1, 2, 4, 8, 16, \cdots$$

(b) このとき，各場合での 1 枚の紙の面積．ただし，最初の紙の面積は 256 平方センチメートルとする.

$$256, 128, 64, 32, 16, \cdots$$

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **5**. 100 kgの砂糖を 2 人, 3 人, 4 人, $\cdots$ で分けたときの 1 人当たりの kg数.

$$\frac{100}{2}, \frac{100}{3}, \frac{100}{4}, \frac{100}{5}, \frac{100}{6}, \cdots$$

★　初項，第 n 項

数列を一般的に

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \cdots,\quad a_n,\quad \cdots \qquad \text{または} \qquad \{a_n\}$$

と表す．a_1 を**初項**(しょこう)，a_2 を**第 2 項**，以下同様で，n は正の整数をとるという約束の下に，a_n を**第 n 項**と呼ぶ.

例 16	$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**(b)，$\boxed{\textbf{Ex}}$ **3**，$\boxed{\textbf{Ex}}$ **4**(b) の数列の第 n 項を示せ.

【解】 (i)$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**(b)：

奇数の数列：$\{2n-1\} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\}$

絶対値 1 の交代数列：$\{(-1)^{n-1}\} = \{1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\}$

の組合せである.（$a^0 = 1$ とする.）

$$\{1,\ -3,\ 5,\ -7,\ 9,\ \cdots\} = \{(-1)^{n-1}(2n-1)\} = \{a_n\}$$

$$a_n = \underline{\underline{(-1)^{n-1}(2n-1)}}$$

(ii)$\boxed{\textbf{Ex}}$ **3**：

$$\{7n\} = \{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ \cdots\}$$

$a_1 = 5$ より，

$$\{7n-2\} = \{7-2,\ 14-2,\ 21-2,\ 28-2,\ 35-2,\ \cdots\} = \{5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33,\ \cdots\}$$

ただし，33 日以上はないから，$n \leqq 4$ の条件をつける．　　$a_n = \underline{\underline{7n-2,\ (n \leqq 4)}}$

(iii) $\boxed{\textbf{Ex}}$ **4**(b)：

$$\{256,\ 128,\ 64,\ 32,\ 16,\ \cdots\} = \left\{\frac{256}{1},\ \frac{256}{2},\ \frac{256}{4},\ \frac{256}{8},\ \frac{256}{16},\ \cdots\right\} = \left\{\frac{256}{2^{n-1}}\right\} = \{a_n\}$$

$$a_n = \underline{\underline{\frac{256}{2^{n-1}}}}$$

$\boxed{\textbf{問 17}}$　$\boxed{\textbf{Ex}}$ **1**，$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**(a)，(c)，$\boxed{\textbf{Ex}}$ **4**(a)，$\boxed{\textbf{Ex}}$ **5** の数列の第 n 項を示せ．

★　有限数列・無限数列

有限数列（ゆうげんすうれつ）$\cdots$ $\boxed{\textbf{Ex}}$ **3**

無限数列（むげんすうれつ）$\cdots$ それ以外．

★　等差数列

等差数列（とうさすうれつ）$=$ 1 つ前の項に一定の数 d を次々と加えて得られる数列．

公差（こうさ）：d

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **3** では，$5,\ 5+7=12,\ 12+7=19,\ 19+7=26\ \cdots\ d=7$

$\boxed{\textbf{問 18}}$　$\boxed{\textbf{Ex}}$ **1**，$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**(a) は等差数列である．これらの数列の初項と公差をいえ．

初項 a_1，公差 d の等差数列の第 n 項

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **3** では，$5 = 5 + 0 \cdot 7,\ 12 = 5 + 1 \cdot 7,\ 19 = 5 + 2 \cdot 7,\ 26 = 5 + 3,\ \cdots$

例 17　第 5 項が 25 であり，第 8 項が 4 であるような等差数列がある．この数列の第 n 項を求めよ．

（神戸商科大学）

【解】　初項を a，公差を d とおくと，問題の条件は，

$$a_5 = a + 4d = 25 \quad \& \quad a_8 = a + 7d = 4$$

$$\Longrightarrow \ a_8 - a_5 = 3d = -21 \ \Longrightarrow \ d = -7$$

$$a = 4 - 7d = 4 - 7(-7) = 53$$

$$a_n = a + (n-1)d = 53 + (n-1)(-7) = \underline{\underline{60 - 7n}}$$

★　等比数列

等比数列（とうひすうれつ）$= 1$ つ前の項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列．
公比（こうひ）：r

Ex **4**(a) では，$1,\ 1 \cdot 2 = 2,\ 2 \cdot 2 = 4,\ 4 \cdot 2 = 8,\ 8 \cdot 2 = 16\ \cdots \quad r = 2$

問 19　**Ex** **4**(b) は等比数列である．これらの数列の初項と公比をいえ．

初項 a_1，公比 r の等比数列の第 n 項

$$a_n = a_1 r^(n-1)$$

Ex **4**(a) では，$1 = 1 \cdot 2^0,\ 2 = 1 \cdot 2^1,\ 4 = 1 \cdot 2^2,\ 8 = 1 \cdot 2^3,\ 16 = 1 \cdots 2^4,\ \cdots$

例 18　等比数列 $\{a_n\}$ がある．$a_1 + a_3 = 40,\ a_2 + a_4 = 120$ のとき，a_5 を求めよ．

（中京大学）

【解】 $a_1 = a$ とおくと，$a_2 = ar,\ a_3 = ar^2,\ a_4 = ar^3$．問題の条件は，

$$a_1 + a_3 = a(1 + r^2) = 40 \quad \& \quad a_2 + a_4 = ar(1 + r^2) = 120$$

$$\Longrightarrow \ r = \frac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3} = \frac{120}{40} = 3$$

$$a = \frac{a_1 + a_3}{1 + r^2} = \frac{40}{1 + 3^2} = 4$$

$$a_5 = ar^4 = 4 \cdot 3^4 = \underline{\underline{324}}$$

★　その他の数列

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**(b),(c), $\boxed{\textbf{Ex}}$ **5** は，等差数列，等比数列以外の規則性をもっている．

★　漸化式

漸化式(ぜんかしき)=1 つ前の項 a_n から，次に続く項 a_{n+1} を定める規則を表した式．

$$\begin{cases} \text{等差数列の漸化式：} & a_{n+1} = a_n + d,\ (a_1 = a) \\ \text{等比数列の漸化式：} & a_{n+1} = a_n r,\ (a_1 = a) \end{cases}$$

いずれも，初項を与えておく必要がある．

例 19　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3,\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

（高知大学）

【解】 $a_{n+1} = 2a_n + 3 \implies a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$
$b_n = a_n + 3$ とおくと，$b_{n+1} = 2b_n,\ b_1 = a_1 + 3 = 4$
$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 4$, 公比 $r = 2$ の等比数列．

$$b_n = b_1 r^{n-1} = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

$$a_n = b_n - 3 = \underline{\underline{2^{n+1} - 3}}$$

4–2　数列の和

≪ この節で学ぶこと ≫

[**和の記号，自然数の和，等差数列の和，等比数列の和，**$\{n^2\}$ **の和，数学的帰納法**]

★　いろいろな数列の和

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **1**. 金属の結晶は，図 1 のように同じ大きさの剛体球を空間内に最も密に詰めたような配列となっている．頂点の 1 個の球（原子）から段を下って，n 段目に並ぶ球の数はいくつであろうか．数列の和のままの形で考えてみよう．

1 段目, 2 段目, 3 段目，$\cdots$ を切り取って，各段を見ると，図の○，●の部分を順次積み上げげたもので，

$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ \cdots$$

となっている．一般に，上から n 段目の球の個数は

$$\underline{\underline{1+2+3+\cdots+n\,\text{個}}}$$

である．

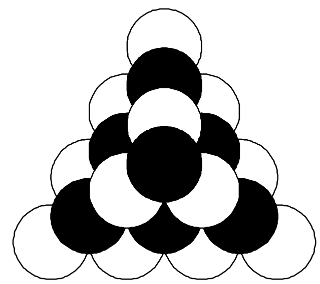


図 1: 真上から見た金属結晶の模型．4 段まで

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**. 図 2 のように, 1 辺に n 個のブロックの並んでいる正方形の上に, 1 辺に $n-1$ 個のブロックの並んでいる正方形を次々と積み上げ，頂上に 1 個のブロックが来るようにしたミラミッドを作る．高さ n 段のピラミッドに使われたブロックの総数は，いくつであろうか．これも数列の和のままの形で答えると，

$$\underline{\underline{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\text{個}}}$$

である．

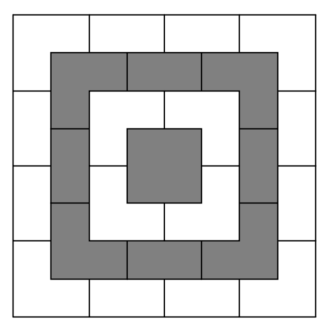


図 2: 真上からピラミット．4 段まで

Ex **3**. 図 3 のように，細い管でコックの付いた連結したの水槽 A, B がある．A，B の容積はともに 2560 リットルとする． A の上には水道の蛇口があり，次の一連の操作を何回も繰り返した．ただし，A, B は最初は空だったとする．

操作 I. コックを閉じ，水道の蛇口を開いて A をいっぱいにする．

操作 II. 次に，蛇口を閉じて，コックを開く．

n 回目の操作終了後の水槽 B に入った水の体積増加分を a_n リットルとして，全体積を数列の和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ リットルで表すことを考えてみよう．何回もこの操作をくり返ししていると，水槽 B から水があふれ出すことがあるだろうか？

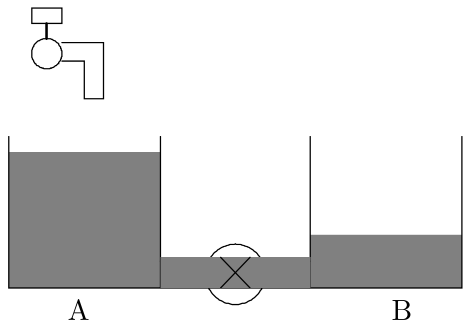


図 3: コックつき水槽

(i) 第 1 回目：操作 I 終了後，A の水量 ×2560 リットル，B は空．操作 II の後，A，B の水量は半分ずつになるから，A，B の水量はともに $a_1 = \frac{1}{2} \times 2560$ リットル．

(ii) 第 2 回目：操作 I 終了後，A には水量 $\frac{1}{2} \times 2560$ リットルあったところに，全体で 2560 リットルになるように，あらたに 水量 $\frac{1}{2} \times 2560$ リットルがつぎたされる．そのときの B の水量は $\frac{1}{2} \times 2560$ リットル．操作 II の後，A につぎたした分が，A，B に半分ずつ分けられるから，水量 a_1 からの増加分は A，B ともに $a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2560$ リットルで，A，B の全水量（リットル数）は，ともに，

$$a_1 + a_2 = \left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \times 2560$$

(iii) 第 3 回目：操作 I 終了後，A には水量 $\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \times 2560$ リットルあったところに，全体で 2560 リットルになるように，あらたに 水量 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2560$ リットルがつぎたされる．そのときの B の水量は $\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \times 2560$ リットル．操作 II の後，A につ

ぎたした分が，A，B に半分ずつ分けられるから，水量 a_1 からの増加分は A，B ともに $a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2560$ リットルで，A，B の全水量（リットル数）は，ともに，

$$a_1 + a_2 + a_3 = \left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} \times 2560$$

したがって，第 n 回目の操作 II の終了後には，B（A）の水量（リットル数）は

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \underline{\underline{\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \times 2560}}$$

n が非常に大きくなっても，操作 I の終了後の A ではつぎたされた水が水槽いっぱいになるだけであるから，そのつぎたした分の半分が B に入っても水槽 B から水があふれ出すことはない.

★　和の記号 $\sum$

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{m-1} + a_m$$

項数に注意. $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} 1 = N$

問 20	**Ex 1** ～ **Ex 3** の数列の和を $\sum$ を使って表せ.

★　自然数の和

Ex 1 の結晶板の各段の和を求めるために，図 4 のようにそれぞれに全く同じ形の●の部分を組み合わせたときそれぞれが平行 4 辺形となり，各段の和が数えやすくなる．すなわち，各段の○のみの個数は○と●を合わせた個数の半分であるから，

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}, \quad 1+2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3, \quad 1+2+3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6, \quad 1+2+3+4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10, \quad \cdots$$

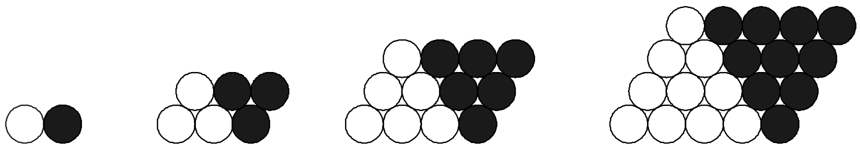


図 4: 1∼4 段目まで

$$1+2+3+\cdots n+\cdots N=\sum_{n=1}^{N} n=\frac{N(N+1)}{2}$$

★ 等差数列の和

一般の等差数列：$a_n = a_1 + (n-1)d$ の和は，$\sum n$ の値を用いて，

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N}\{a_1+(n-1)d\}$$

ここで,

$$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)+\cdots+\{a_1+(N-1)d\}$$

$$=a_1(\underbrace{1+1+1+1+\cdots+1}_{N\text{ 個}})+d\{1+2+3+\cdots+(N-1)\}$$

となるから,

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1\sum_{n=1}^{N} 1 + d\sum_{n=1}^{N-1} n$$

$$=a_1\cdot N + d\cdot\frac{1}{2}(N-1)N=\frac{1}{2}N\{2a_1+(N-1)d\}$$

最後の式の $\{\quad\}$ の中は,

$$2a_1+(N-1)d = a_1+\{a_1+(N-1)d\}$$

となるから,

初項 a_1，公差 d の等差数列 $a_n = a_1 + (n-1)d$ の初項から第 N 項までの和

$$\sum_{n=1}^{N}\{a_1 + (n-1)d\} = \frac{1}{2}N\{2a_1 + (N-1)d\} = \frac{1}{2}N(a_1 + a_N)$$

つまり，等差数列の和は $\frac{1}{2}$(項数) × {(初項) + (末項)} である．

例 20　次の問題文中の **A** ～ **F** には，それぞれ –（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

等差数列（arithmetic progression）

$$1, 8, 15, 22, \cdots$$

の第 n 項（term）を a_n で表す．

(1)　$a_n = \boxed{\mathbf{A}}\, n - \boxed{\mathbf{B}}$ である．

(2)　初項（first term）から第 30 項までの数の和（sum）は $\boxed{\mathbf{CDEF}}$ である．

（日留試試行）

【解】 (1) $a_1 = 1,\ d = 8 - 1 = 15 - 8 = \cdots = 7$ より，

$$a_n = 1 + 7(n-1) = \underline{\underline{7n - 6}}$$
（A の【答】7，B の【答】6）

(2) $a_{30} = 7 \cdot 30 - 6 = 204$ だから，

$$\sum_{n=1}^{30} a_n = \frac{1}{2} \times 30(a_1 + a_{30}) = 15(1 + 204) = \underline{\underline{3075}}$$
（CDEF の【答】3075 ）

問 21 第 4 章 §1 の数列の例 $\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**(a) と (c) を比べると（碁石を並べた図．）

$$1+3+5+7+\cdots+(2N-1)=\sum_{n=1}^{N}(2n-1)=N^2$$

は明らかであるが, これを上の等差数列の和の公式にあてはめて示してみよ.

★ 等比数列の和

初項 $a_1=1$，公比 r $(r\neq 1)$ の等比数列の初項から第 N 項までの和は,

$$S_N=1+r+r^2+\cdots+r^{N-2}+r^{N-1}$$

の各辺に r を掛けると,

$$rS_N=r+r^2+r^3+\cdots+r^{N-1}+r^N$$

2 つの式を各辺差し引くと,

$$(1-r)S_N=1-r^N,\quad \therefore S_N=\frac{1-r^N}{1-r}$$

$a_1=a\neq 1$ の場合は, 全体を a 倍すればよい.

初項 a，公比 $r(\neq 1)$ の等比数列 $a_n=ar^{n-1}$ の初項から第 N 項までの和

$$\sum_{n=1}^{N}ar^{n-1}=a\sum_{n=1}^{N}r^{n-1}=a\frac{1-r^N}{1-r}$$

例 21 $\boxed{\textbf{Ex}}$ **3** で所定の操作を 10 回くりかえしたときの水槽 B にたまる水の量は何リットルか．ただし，$2^{10}\fallingdotseq 1000$ として計算せよ.

【解】　この等比数列の初項は $a = \dfrac{2560}{2} = 1280$，公比は $r = \dfrac{1}{2}$ だから，

$$
\begin{aligned}
1280\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= 1280 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \\
&\fallingdotseq 1280 \times 2\left\{1-\left(\frac{1}{1000}\right)\right\} \\
&= 1280 \times 2 \times 0.999 \;=\; \underline{\underline{2557.44}}
\end{aligned}
$$

つまり，水槽はほとんどいっぱいになった.

問 22　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

$$3,\ 3\cdot 5,\ 3\cdot 5^2,\ 3\cdot 5^3,\ 3\cdot 5^4,\ \cdots$$

（上智大学）

★　$\{n^2\}$ の和

Ex 2 の数列の和.

恒等式 $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ に，$n = 1$ から $n = N$ を代入して順次並べると，

$$
\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \\
\cdots\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\cdots \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1 \\
\cdots\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\cdots \\
(N+1)^3 - N^3 &= 3\cdot N^2 + 3\cdot N + 1
\end{aligned}
$$

これらの式を辺々加えると，

$$
\begin{aligned}
(N+1)^3 - 1^3 &= 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + \cdots + N^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n + \cdots + N) + N \\
&= 3\sum_{n=1}^{N} n^2 + 3\cdot\frac{1}{2}N(N+1) + N
\end{aligned}
$$

したがって，

$$3\sum_{n=1}^{N} n^2 = (N+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}N(N+1) - N$$

$$= \frac{1}{2}(N+1)\{2(N+1)^2 - 3N - 2\}$$

$$= \frac{1}{2}(N+1)(2N^2+N) = \frac{1}{2}N(N+1)(2N+1)$$

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)}$$

例 20 次の問題文中の **A** ～ **D** には，それぞれ −（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

数列 a_n が

$$a_k = k^2 - 2k + 2 \ (k \leqq 1)$$

で与えられているとき，初項から第 n 項までの和は

$$\frac{\boxed{\mathbf{A}}\, n^3 - \boxed{\mathbf{B}}\, n^2 + \boxed{\mathbf{C}}\, n}{\boxed{\mathbf{D}}}$$ である．

（日留試）

【解】

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} n^2 - 2\sum_{k=1}^{n} n + 2\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 2n \\
&= \frac{n}{6}\{(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 12\} \\
&= \frac{n}{6}\{(2n^2+3n+1) - 6n - 6 + 12\} \\
&= \frac{n}{6}(2n^2 - 3n + 7) \\
&= \frac{2n^3 - 3n^2 + 7n}{6}
\end{aligned}$$

（A の【答】2，B の【答】3，C の【答】7，D の【答】6）

問 23　次の問題文中の **A** ～ **E** には，それぞれ −（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

一般項 a_n $(n \leqq 1)$ が

$$a_n = pn^2 + qn + r$$

で与えられている数列 $\{a_n\}$ がある．

$a_1 = 2$, $a_2 = 9$, $a_3 = 22$, $a_4 = \boxed{\mathbf{AB}}$ である．$\{a_n\}$ のはじめの 8 項の和は $\boxed{\mathbf{CDE}}$ となる．

（日留試）

★　その他の数列の和

その他の数列の和の求め方

(1) 各項を差の形に変形し，中間項を消す方法.

(2) 答を予想して，数学的帰納法で証明する.

数学的帰納法（すうがくてききのうほう）

命題を P(N) で表す.（N は自然数）

(1) $N = 1 \implies \cdots \therefore$ P(1) 成立.

(2) P(n) $(n \leqq 2)$ 成立仮定.

$\implies \cdots \therefore$ P$(n+1)$ 成立.

以上，(1), (2) より，P(N) 成立.（Q，E，D，）

例 23　次の数列の初項から第 N 項までの和を求めよ.

$$\frac{1}{1\cdot 2},\quad \frac{1}{2\cdot 3},\quad \frac{1}{3\cdot 4},\quad \frac{1}{4\cdot 5},\quad \frac{1}{5\cdot 6},\quad \cdots$$

【解】 (i) $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ となることを利用して，$n=1$ から $n=N$ までの和を求める.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} = \underline{\underline{\frac{N}{N+1}}}$$

(ii) $\dfrac{1}{1\cdot 2} = \dfrac{1}{1+1}$, $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} = \dfrac{2}{2+1}$, $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} = \dfrac{3}{3+1}$, $\cdots$ より,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}$$

を命題 P(N) で表す.
(1) $N=1 \implies \dfrac{1}{1\cdot 2} = \dfrac{1}{1+1}$ $\therefore$ P(1) 成立.
(2) P(n) $(n \leqq 2)$ 成立仮定.

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \\
&\implies \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)+1} \quad \therefore P(\text{n+1}) \text{ 成立.}
\end{aligned}$$

以上, (1), (2) より, P(N) 成立.（Q, E, D,）

問 24 次の数列の初項から第 24 項までの和を求めよ.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},\quad \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}},\quad \cdots$$

第5章　指数関数と対数関数

5–1　指数関数

≪ この節で学ぶこと ≫

[**指数法則の拡張，n 乗根，指数関数，指数方程式**]

★　指数法則の拡張

指数法則

【1】$a^m a^n = a^{m+n}$
【2】$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
【3】$(a^m)^n = a^{mn}$
【4】$(ab)^m = a^m b^m$

第 1 章 §1 の 3 ページにあげたこの法則では，m，n，$m-n$ は自然数であった．指数はまず，0 と負の整数，さらに分数 $\dfrac{m}{n}$ に拡張される．

指数法則の拡張

【1】～【4】は有理数で成立.
【5】$a^0 = 1$
【6】$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
【7】$ab^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

n **乗根**（エヌじょうこん）：$x = \sqrt[n]{a} \mid x^n = a,\ (a > 0)$

（n ：奇数のとき，$a < 0$．例えば，$\sqrt[3]{-27} = -3$ のようなことも考えられるが，ここでは，$a = 0,\ a < 0$ は考えないことにする.）

★ 指数関数

$y = a^x,\ (a > 0, a \neq 1)\ \cdots$ 定義域 x：実数（指数をさらに拡張.）
$y = a^x,\ \ y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x},\ (a > 1)$ のグラフの特徴.

値域	$y > 0$，x 軸が漸近線
増減	$y = a^x$ は増加関数.　$y = a^{-x}$ は減少関数
対称性	$y = a^x$ と $y = a^{-x}$ は y 軸に関して線対称．ともに $(0, 1)$ を通る.

問 25　以下の [表] を完成させ，$y = 2^x$ と $y = 2^{-x}$ のグラフを描け.

[表]

x	-3	-2	-1	0	1	2	-3
$y = 2^x$							
$y = 2^{-x}$							

例 24　次の問題文中の **A** ～ **D** には，それぞれ −（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

変数 x が $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動くとき，関数

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

の最小値は $\dfrac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}}$ で，最大値は $\dfrac{\boxed{\mathbf{C}}}{\boxed{\mathbf{D}}}$ である．

（日留試）

【解】

$$\left[\begin{array}{lll} f(x) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x \text{ の値域：} & \min \leqq f(x) \leqq \max \\ \text{変数 } x \text{ の定義域：} & -1 \leqq x \leqq 2 \end{array}\right.$$

$y = f(x)$ は増加関数であるから，

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \leqq f(2) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} \\ f(x) \geqq f(-1) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ll} \max : & \underline{\underline{\dfrac{9}{4}}} \\ \min : & \underline{\underline{\dfrac{2}{3}}} \end{array}\right.$$

（A の【答】9，B の【答】4，C の【答】2，D の【答】3）

★　指数方程式

$a^x = t$ とおいたとき，<u>t の定義域は $t > 0$.</u>

例 25　方程式 $5^{2x} + 5^x = 2$ を解け．

【解】 $5^x = t$ とおくと，$5^{2x} = (5^x)^2 = t^2$．また，$t > 0$ だから，与えられた方程式は，

$$
\begin{aligned}
t^2 + t = 2 \ \ \& \ \ t = 5^x > 0 \ &\Longleftrightarrow \ (t+2)(t-1) = 0 \ \ \& \ \ t = 5^x > 0 \\
&\Longleftrightarrow \ (t = -2 \ \text{ or } \ 1) \ \ \& \ \ t = 5^x > 0 \\
&\Longleftrightarrow \ t = 1 \ \ \& \ \ t = 5^x \\
&\Longleftrightarrow \ 5^x = 1 \\
&\Longleftrightarrow \ x = \underline{\underline{0}}
\end{aligned}
$$

問 26 次の問題文中の **A** ～ **C** には，それぞれ –（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

方程式

$$2 \times 4^x - 9 \times 2^x + 4 = 0$$

の解は $x = \boxed{\mathbf{A}}$ と $x = \boxed{\mathbf{BC}}$ である．

（日留試）

5–2　対数関数

≪ この節で学ぶこと ≫

[**対数と指数の関係，対数・真数・底，対数の公式，対数方程式**]

★　対数の定義

対数(たいすう)は指数との関係で定義する．

$$\boxed{p = \log_a N \iff a^p = N}$$

対数：p
真数(しんすう)：$N \mid (N > 0)$
底(てい)：$a \mid (a > 0,\ a \neq 1)$

★　対数の公式

【1】　$\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$
【2】　$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
【3】　$\log_a M^r = r \log_a M$
【4】　$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

【1】,【2】,【3】は同じ番号の指数法則に対応する．

例 26 次の問題文中の **A** ～ **G** には，それぞれ $-$（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

(1) 等式（equality）

$$\log_{10} 225 = \boxed{\mathbf{AB}}\ \log_{10} 2 + \boxed{\mathbf{C}}\ \log_{10} 3 + \boxed{\mathbf{D}}$$

が成り立つ．

(2) 等式

$$\log_3 12 \cdot \log_4 12 = \log_3 \boxed{\mathbf{E}} + \log_4 \boxed{\mathbf{F}} + \boxed{\mathbf{G}}$$

が成り立つ．

(3) **H** には，それぞれの選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい．

$3^{\frac{2}{\log_{10} 3}}$ の値は $\boxed{\mathbf{H}}$ である．

① 2　② 3　③ 6　④ 10　⑤ 100

（日留試）

【解】 (1) 等式を $\log_{10} 225 = p \log_{10} 2 + q \log_{10} 3 + r$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\log_{10} 225 &= p \log_{10} 2 + q \log_{10} 3 + r \\
&= \log_{10} 2^p + -log_{10} 3^q + \log_{10} 10^r \\
&= \log_{10} 2^p 3^q 10^r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff 225 = 3^2 5^2 = 3^2 \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 2^p 3^q 10^r \\
&\iff \underline{\underline{p = -2,\ q = 2,\ r = 2}}
\end{aligned}$$

（AB の【答】-2，C の【答】2，D の【答】2）

(2) 任意の底 a, $(a > 1,\ a \neq 1)$ に対して，

$$\log_3 4 \cdot \log_4 3 = \frac{\log_a 4}{\log_a 3} \cdot \frac{\log_a 3}{\log_a 4} = 1$$

となる．この関係を使って式をかんたんにする．

$$\begin{aligned}
\log_3 12 \cdot \log_4 12 &= \log_3(3 \cdot 4) \cdot \log_4(3 \cdots 4) \\
&= (\log_3 3 + \log_3 4)(\log_4 3 + \log_4 4) \\
&= (1 + \log_3 4)(\log_4 3 + 1) \\
&= \log_3 4 + \log_3 4 \cdot \log_4 3 + 1 + \log_3 4 \\
&= \log_3 \underline{\underline{4}} + \log_4 \underline{\underline{3}} + \underline{\underline{2}}
\end{aligned}$$

（E の【答】4, F の【答】3, G の【答】2）

(3) $x = 3^{\frac{2}{\log_{10} 3}}$ とおき，両辺を 10 を底とする対数とする．

$$\begin{aligned}
x = 3^{\frac{2}{\log_{10} 3}} &\iff \log_{10} x = \log_{10} 3^{\frac{2}{\log_{10} 3}} \\
&\iff \log_{10} x = \frac{2}{\log_{10} 3} \times \log_{10} 3 \\
&\iff \log_{10} x = 2 \\
&\iff x = 10^2 = \underline{\underline{100}}
\end{aligned}$$

（H の【答】 ⑤）

問 27　つぎの値を求めよ．

(1) $9^{\log_9 27}$　(2) $\log_{16} 8$

（神戸商科大）

(3) $\log_2 \dfrac{8}{3} + \log_2 24$　(4) $\log_8 2 - \log_2 \dfrac{1}{4}$

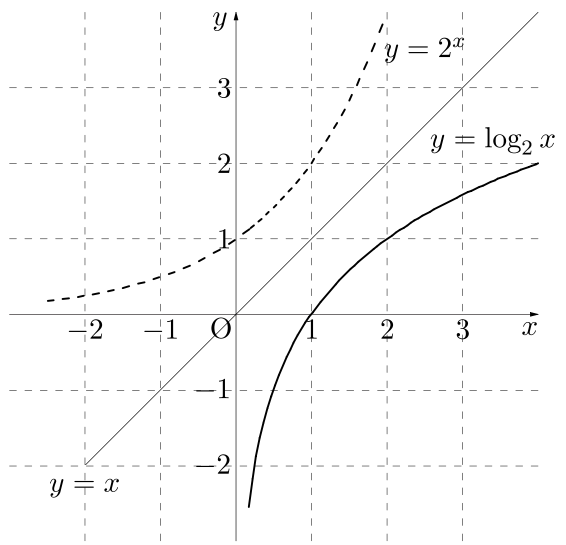
（中部大）

★　対数関数

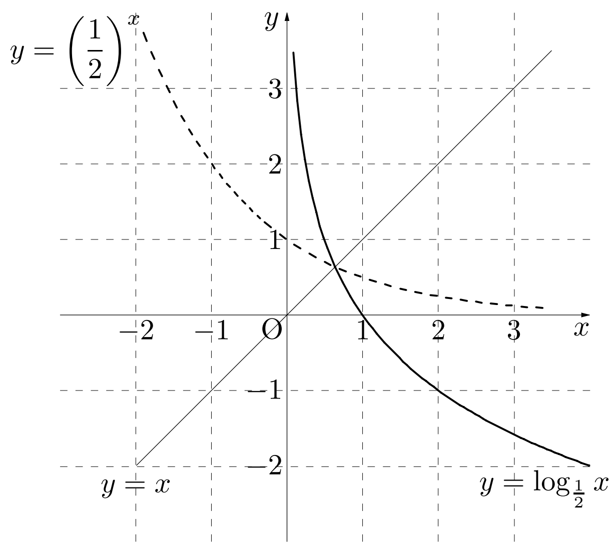
対数関数：$y = \log_a x \iff x = a^y$

$y = \log_a x$ のグラフは，$y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して線対称（$x \leftrightarrow y$ と入れ換えたもの.）

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **1**.　$y = \log_2 x$ のグラフ.



$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**.　$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフ.



$y = \log_a x,\ y = \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x,\ (a > 1)$ のグラフの特徴

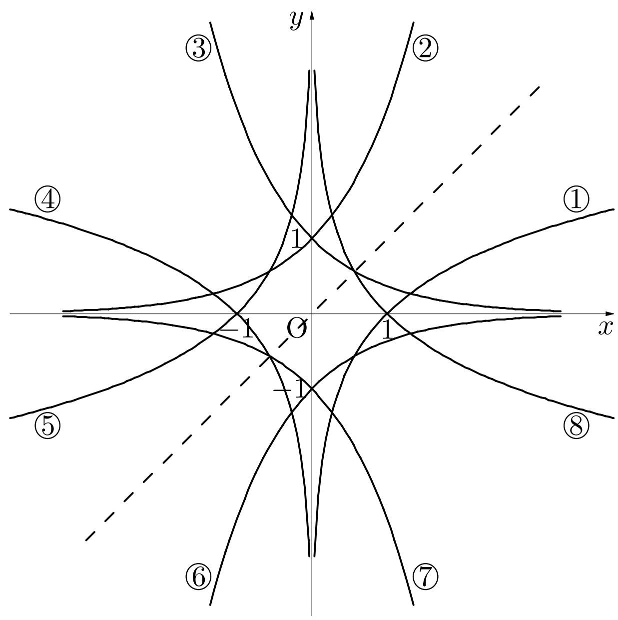
定義域	$x > 0$，y 軸が漸近線
増減	$y = \log_a x$ は増加関数.　$y = \log \frac{1}{a} x$ は減少関数
対称性	$y = \log_a x$ と $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ は x 軸に関して線対称．ともに $(1, 0)$ を通る.

例 27　それぞれの選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい．

$a > 1$ とする．下の図に描かれているグラフ ①〜⑧ の中で

(1)　関数 $y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称なグラフは $\boxed{\mathbf{A}}$ である．

(2)　関数 $y = \log_a \dfrac{1}{x}$ のグラフは $\boxed{\mathbf{B}}$ である．



【解】　対数関数

$$y = \log_a x,\ (a > 1)$$

のグラフは
(i)　$x > 0$ の範囲のみに存在する増加関数．
(ii) $x = 1$ のとき $y = 0$．
すなわち，問題の図の中の ① である．

(1) $a > 1$ のとき，$y = a^x$ のグラフは ② であり，このグラフを $y = x$ に関して直接，線対称移動して該当するグラフを見つけてもいいし，$y = a^x$ の逆関数 $y = \log_a x$ のグラフが上に示したようになっていることから考えてもよい．　（A の【答】①）

(2) $y = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

このグラフは ① と x 軸に関して線対称なグラフ. (B の【答】⑧)

★ 対数方程式

$\log_a M = \log_a N \implies M = N,$ $\underline{\text{真数 } M > 0,\ N > 0}$

例 28 次の問題文中の **A** ～ **E** には，それぞれ −（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

(1) 方程式

$$(\log_2 64)\left(\log_2 \frac{16}{x}\right) = 24$$

の解は $x = \boxed{\mathbf{A}}$ と $x = \dfrac{1}{\boxed{\mathbf{B}}}$ である．

(2) 方程式

$$\log_2(x-4) = \log_4(15-x) + 1$$

の解は $x = \boxed{\mathbf{C}} + \boxed{\mathbf{D}}\sqrt{\boxed{\mathbf{E}}}$ である．

（日留試）

【解】 (1) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6\log_2 2 = 6,\quad \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ を用いる．

$$\begin{aligned}
(\log_2 64)\left(\log_2 \frac{16}{x}\right) = 24 &\iff (\log_2 64 + \log_2 x)(\log_2 16 - \log_2 x) = 24\\
&\iff (6 + \log_2 x)(4 - \log_2 x) = 24\\
&\iff (6+t)(4-t) = 24\ \ \&\ \ t = \log_2 x\\
&\iff 24 - 2t - t^2 = 24\ \ \&\ \ t = \log_2 x\\
&\iff t(t+2) = 0\ \ \&\ \ t = \log_2 x\\
&\iff (t = 0\ \text{ or }\ -2)\ \ \&\ \ t = \log_2 x\\
&\iff \log_2 = 0\ \text{ or }\ \log_2 = -2\\
&\iff x = 2^0 = \underline{\underline{1}}\ \text{ or }\ x = 2^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

(A の【答】: 1．B の【答】: 4)

(2) まず，真数の条件 $x-4>0$ & $15-x>0 \iff 4<x<15$ をはっきりさせておく．

$$
\begin{aligned}
\log_2(x-4)=\log_4(15-x)+1 &\iff \log_2(x-4)=\log_4(15-x)+\log_4 4\\
&\iff \log_2(x-4)=\log_4 4(15-x)\\
&\iff \log_2(x-4)=\frac{\log_2 4(15-x)}{\log_2 4}\\
&\iff \log_2(x-4)=\frac{\log_2 4(15-x)}{\log_2 2^2}\\
&\iff \log_2(x-4)=\frac{\log_2 4(15-x)}{2}\\
&\iff 2\log_2(x-4)=\log_2 4(15-x)\\
&\iff \log_2(x-4)^2=\log_2 4(15-x)\\
&\iff (x-4)^2=4(15-x)\ \ \&\ \ 4<x<15\\
&\iff x^2-4x-44=0\ \ \&\ \ 4<x<15\\
&\iff x=2\pm\sqrt{2^2+44}\ \ \&\ \ 4<x<15\\
&\iff x=2\pm\sqrt{48}\ \ \&\ \ 4<x<15\\
&\iff (x=2+4\sqrt{3}\ \text{ or }\ 2-4\sqrt{3})\ \ \&\ \ 4<x<15\\
&\iff x=\underline{\underline{2+4\sqrt{3}}}
\end{aligned}
$$

(CDE の【答】: 2, 4, 3)

問 28　次の問題文中の **A** には，それぞれ −（負号，minus sign）か 0 ∼ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

対数方程式（logarithmic equation）

$$\log_2(x+1)+\log_2(x-2)=2$$

の解は $x=$ $\boxed{\mathbf{A}}$ である．

第6章　三角関数

6–1　三角比

≪ この節で学ぶこと ≫

[**サイン・コサイン・タンジェント，鋭角の三角比，**$90^\circ - \theta$ **の三角比, 正弦定理**

余弦定理，三角形の面積]

★　$\sin\theta$,　$\cos\theta$,　$\tan\theta$ の定義

　半径 1 の円の中に図 1 のようにおかれた直角 3 角形において，角 θ の対辺の長さを $\sin\theta$，底辺の長さを $\cos\theta$ とする．また，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ は円への垂直な接線の図 1 の部分の長さであり，これを $\tan\theta$ で表す．すなわち，

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

である．

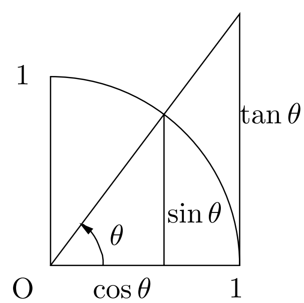


図 1: $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の定義

　さらに，図 1 の直角 3 角形についてのピタゴラスの定理より，

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

の関係がある．($(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$ と書く．$\cos\theta$ についても同様.)

これらの定義から，任意の直角 3 角形の各辺の長さを図 2 のように水平と傾角 θ をなすように立てたとき，高さ a，底辺 b，斜辺 c として，ちょっとフザケタ暗記法であるが，この 3 角形へ sin は $\mathcal{S}$，cos は $\mathcal{C}$，tan は $\mathcal{T}$ と書けば，

$$\boxed{\sin\theta = \frac{a}{c}, \quad \cos\theta = \frac{b}{c}, \quad \tan\theta = \frac{a}{b}}$$

となる．*

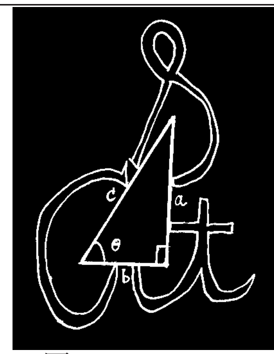


図 2: sin , cos , tan

問 29　図 4 を参考に表 1 を完成せよ．ただし，$\theta = 0^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ は 3 角形をなさないから，θ をしだいに 0°，あるいは，90° に近づけるという作図によって求めよ．

[表 1]

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°			
30°			
45°			
60°			
90°			

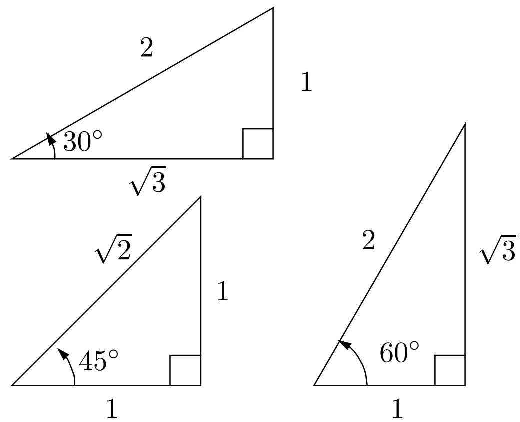


図 4: 定規の 3 角形

★　$90^\circ - \theta$ の三角比

図 2 の三角形の直角でないもう一つの角は $90^\circ - \theta$ であり，この角に関する三角比は，

$$\boxed{\sin(90^\circ - \theta) = \frac{b}{c} = \cos\theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \frac{a}{c} = \sin\theta}$$

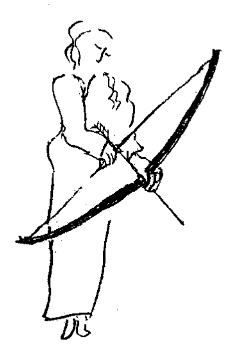


図 3: はじめは弓の弦，後に半分となった．

[註]* sin , cos , tan を「正弦」,「余弦」,「正接」と言うこともあるが，これはこれらの記号の語源に近い訳語である．例えば，sin の語源をさかのぼると図 3 のような円弧の弦（の半分）を表すインドの言葉に行きつく．3 角比の起源は 1 世紀のインドだった．

例 29 次の関係をみたす α について以下の問いに答えよ.

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

(1) α の範囲として正しいものを，次の (a)∼(c) の中から選び，その根拠も示せ.

(a) $30^\circ < \alpha < 45^\circ$ (b) $45^\circ < \alpha < 60^\circ$ (c) $60^\circ < \alpha < 90^\circ$

(2) 次の値を計算せよ.

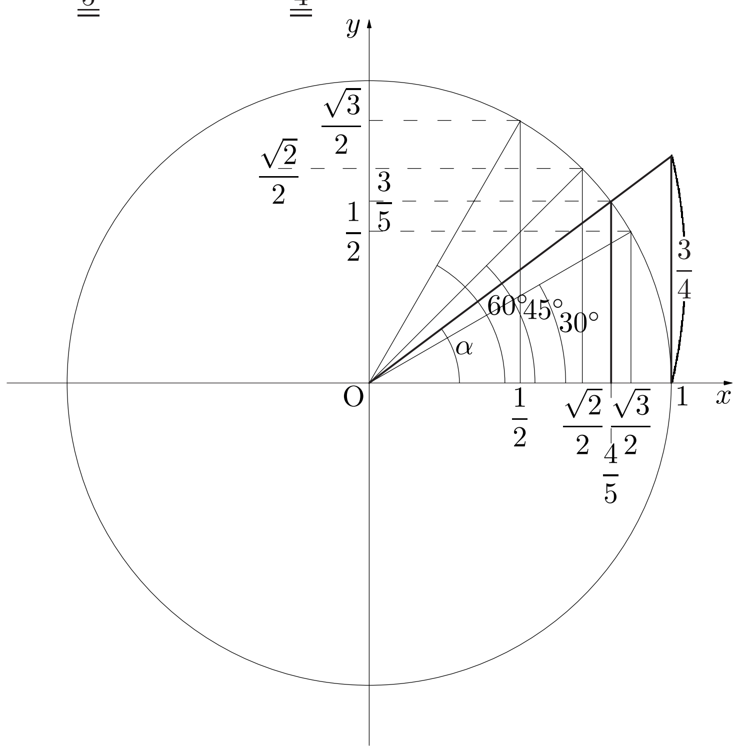
(i) $\sin\alpha$ (ii) $\tan\alpha$

（上智大学改）

【解】 (1) **単位円**を使う解法が最も簡単である.

(1) $\underline{\underline{\text{(a)}}}$【答】 【根拠】下図より明らか.

(2) 下の図より，(i) $\sin\alpha = \underline{\underline{\dfrac{3}{5}}}$ (ii) $\tan\alpha = \underline{\underline{\dfrac{3}{4}}}$



★ 正弦定理

正弦定理（せいげんていり）

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

ただし，R は外接円（がいせつえん）の半径

★ 余弦定理

余弦定理（よげんていり）

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

★ 三角形の面積

$$\boxed{\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C}$$

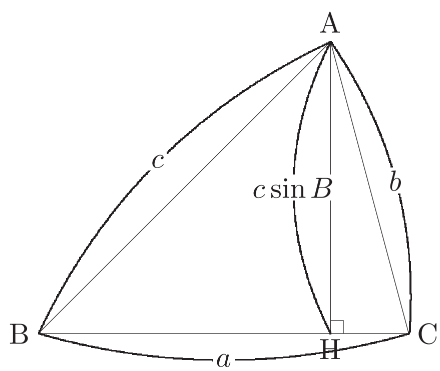


図 5: 三角形の角と辺

例 30 次の問題文中の **A** ～ **F** には，それぞれ，–（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

三角形 ABC の角 A, B, C は

$$\frac{\sin A}{\sqrt{6}} = \frac{\sin B}{2} = \frac{\sin C}{1+\sqrt{3}}$$

を満たしているとする。このとき，

(1) $\cos A = \dfrac{\boxed{\textbf{A}}}{\boxed{\textbf{B}}}$ である．

(2) $\sin A = \dfrac{\sqrt{\boxed{\textbf{C}}}}{\boxed{\textbf{D}}}$ である．

(3) 最小の角の大きさは $\boxed{\textbf{EF}}$ 度である．

【解】 条件式より

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{6} : 2 : 1+\sqrt{3}$$

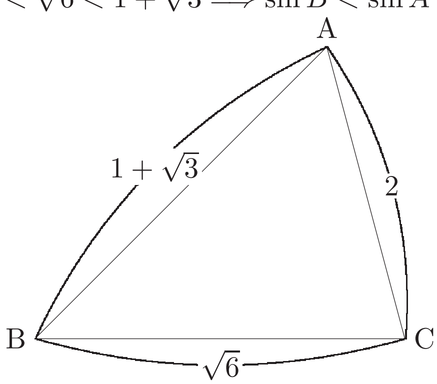
である。下の図は △ABC と相似の 3 角形である．

(1) 余弦定理より，

$$\cos A = \frac{2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \cdot 2(1+\sqrt{3})} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}},\ (A = 60^\circ)$$

(2) $\sin A = \sin 60^\circ = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}$

(3) 条件式で $2 < \sqrt{6} < 1+\sqrt{3} \Longrightarrow \sin B < \sin A < \sin C$



最小角は B。

$$\sin B = \frac{2}{\sqrt{6}}\sin A = \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow A = \underline{\underline{45^\circ}}$$

（A の【答】1，B の【答】2，C の【答】3，D の【答】2，EF の【答】45）

問 30　次の問題文中の **A** ～ **G** には，それぞれ，–（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

三角形（triangle）PQR において

$$\mathrm{PQ} = 5, \quad \mathrm{PR} = 3, \quad \angle\mathrm{P} = 60^\circ$$

であるとする．

(1)　△PQR の面積（area）は $\dfrac{\boxed{\mathbf{AB}}\sqrt{\boxed{\mathbf{C}}}}{4}$ である．

(2)　辺（edge）QR の長さ（length）は $\sqrt{\boxed{\mathbf{DE}}}$ である．

(3)　△PQR の外接円（circumcircle）の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\mathbf{FG}}}}{3}$ である．

（日留試試行）

6–2　三角関数

≪ この節で学ぶこと ≫

[一般角，三角関数，三角関数の方程式・不等式]

★　回転移動と一般角

回転移動：$\mathrm{P} \to \mathrm{P}' \mid \mathrm{OP}' = \mathrm{OP}, \quad \angle \mathrm{P}'\mathrm{OP} = x$

一般角 = 反時計回りの回転を正の向き ($x > 0$)，時計回りの回転を負の向き ($x < 0$) とした回転の量.

$x + 360^\circ \times n$ 回転したときの OP'と x 回転したときの OP'とは重なる.

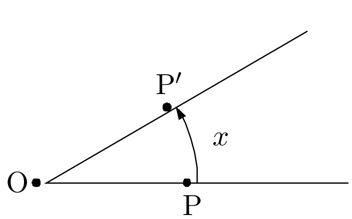


図 6: 回転移動

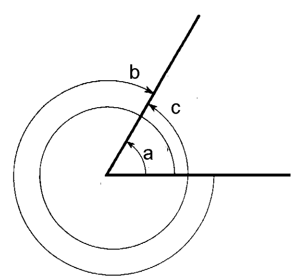


図 7: 一般角

★　三角関数の定義

点 (1, 0) を出発点として線分 OP を x 回転して得られる単位円上の点を $\mathrm{P}(X,\quad Y)$ とするとき,

$$\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases}$$

さらにこの 2 つの関数から,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

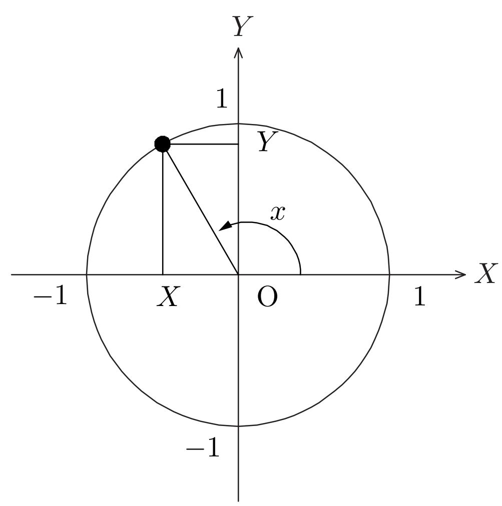


図 8: 三角関数の定義

問 31 [表 2] を完成せよ．ただし，x の第 1 列と第 3 列は差が $\pm 360°$ となって 三角関数の値が同じとなる．

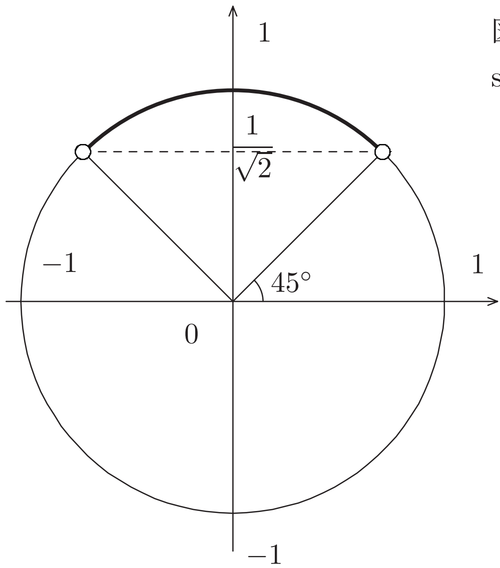
[表 2]

x 度	x 度	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$-360°$	$0°$			
$-330°$	$30°$			
$-315°$	$45°$			
$-300°$	$60°$			
$-270°$	$90°$			
$-240°$	$120°$			
$-225°$	$135°$			
$-210°$	$150°$			
$-180°$	$180°$			
$-150°$	$210°$			
$-135°$	$225°$			
$-120°$	$240°$			
$-90°$	$270°$			
$-60°$	$300°$			
$-45°$	$315°$			
$-30°$	$330°$			
$0°$	$360°$			

例 31 $0° \leqq \theta \leqq 360°$ のとき，つぎの不等式をみたす θ の範囲を求めよ．

$$\sin\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

【解】



図より

$\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff 45° < \theta < 135°$

問 32 $0° \leqq x \leqq 360°$ のとき，つぎの方程式を解け.

$$\cos^2 x - \sin^2 + 3\sin x + 1 = 0$$

★　三角関数のグラフ

X，あるいは，Y をあらためて y と表す．[表 2] を使って横軸 x，縦軸 y として，

$$y = \cos x, \quad y = \sin x, \quad y = \tan x$$

の **3 角関数のグラフ**を描くと，図 9，10，11 のようになる．

$y = \cos x$

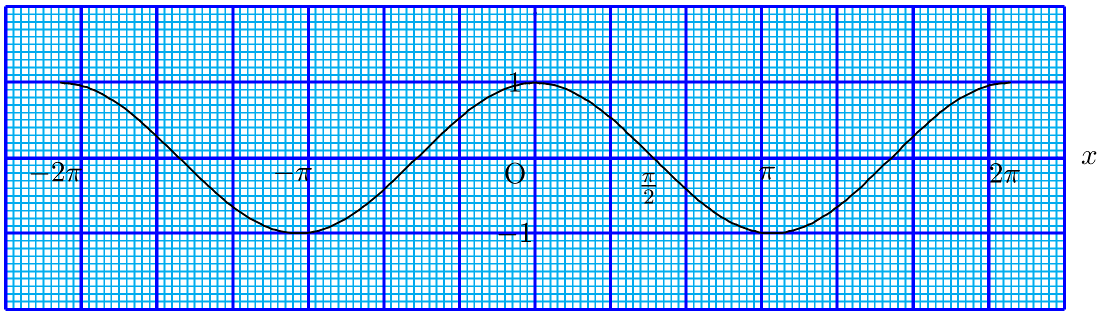


図 9: $y = \cos x$ のグラフ

$y = \sin x$

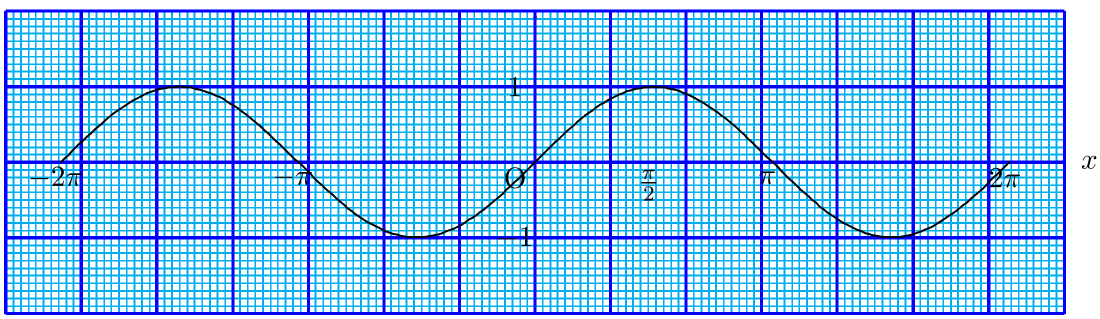


図 10: $y = \sin x$ のグラフ

$y = \cos x,\ y = \sin x$ のグラフの特徴

値域	$-1 \leqq \cos x \leqq 1$	$-1 \leqq \sin x \leqq 1$
周期 360°	$\cos(x + 360^\circ) = \cos x$	$\sin(x + 360^\circ) = \sin x$
対称性	y 軸に関して線対称： $\cos(-x) = \cos x$	原点に関して点対称： $\sin(-x) = -\sin x$

$y = \tan x$

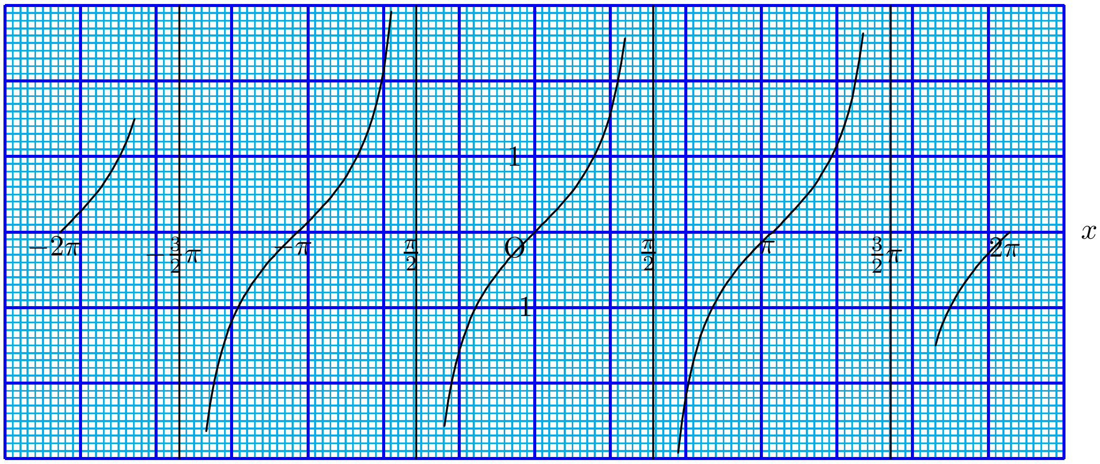


図 11: $y = \tan x$ のグラフ

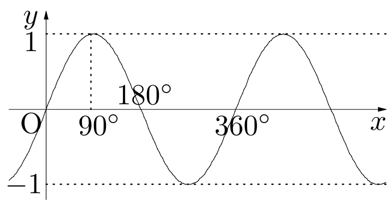
$y = \tan x$ のグラフの特徴

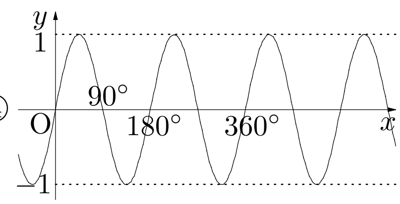
定義域	$x \neq \cdots -270^\circ,\ -90^\circ,\ 90^\circ,\ 270^\circ,\ \cdots$
値域	全域，min，max をもたない
周期 180°	$\tan(x + 180^\circ) = \tan x$
対称性	原点に関して点対称：$\tan(-x) = \tan x$

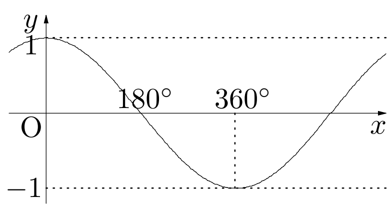
例 32　それぞれの選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい.

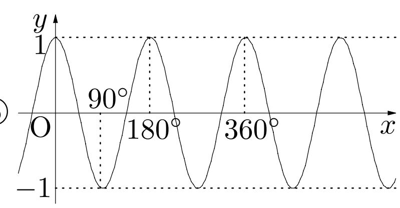
下図の ①～⑥ の中で

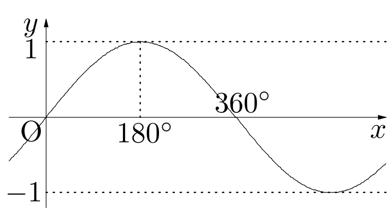
(1)　関数 $y = \sin x$ のグラフは $\boxed{\text{A}}$ である.
(2)　関数 $y = \sin 2x$ のグラフは $\boxed{\text{B}}$ である.

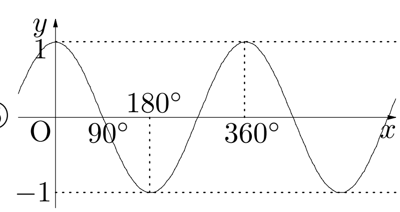
①


④


②


⑤


③


⑥


（日留試改）

【解】(1) 三角関数 $y = \sin x$ は
　(i) $x = 0$ のとき，$y = 0$.
　(ii) 周期 $x = 2\pi$ の周期関数.
である．この 2 つを満たすグラフは，　（A の【答】①）
(2) 三角関数 $y = \cos 2x$ は
　(i) $x = 0$ のとき，$y = 1$.
　(ii) 周期 $2x = 2\pi$，すなわち $x = \pi$ の周期関数.
である．この 2 つを満たすグラフは，　（B の【答】⑤）

6–3　複素数平面と三角関数の加法定理

≪ この節で学ぶこと ≫

[**複素数平面，複素指数関数，三角関数の加法定理，三角関数の合成**]

★　複素数平面

第 2 章 §2 で**虚数**を習った.

複素数：$z = x + yi,\ (i^2 = -1)$

複素数平面 (ガウス平面) 上の点：$\mathrm{P}(x,\ y) \mid z = x + yi$

$$\begin{cases} \text{OP の長さ：} & r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{OP の+x軸となす角：} & \theta \mid x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

例 33　2 つの複素数 $z = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$,　$w = 1$ について，つぎの問に答えよ.

(1)　$z,\ w$ に対応するガウス平面上の点を，原点を始点とし終点が $z,\ w$ となる矢印 で描け．また，各点の原点からの距離と矢印の $+x$ 軸となす角を求めよ.

(2)　(a) $z + w$　(b) $z - w$　(c) $2zw$　(d) $\dfrac{z}{2w}$

を計算して，それらの答を複素数平面上の点で表せ.

【解】 (1)(i) $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ は複素数平面上の点 $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. OP のなす角を θ とする.

$$\mathrm{OP} = |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \underline{\underline{1}}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \therefore\ \theta = \underline{\underline{30^\circ}}$$

【答】図 12

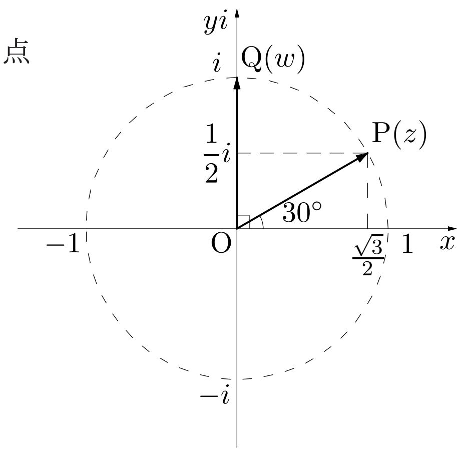


図 12: z と w の図

(ii) $w = i$ は複素数平面上の点 Q(0, 1).

$$\mathrm{OQ} = |w| = \underline{\underline{1}},\quad \mathrm{OQ}\ \text{の}\ +x\ \text{軸とのなす角}:\underline{\underline{90^\circ}}$$

【答】図 12

(2)(a) 複素数の足し算.

$$\begin{aligned} z+w &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)+i \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i+2i\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i}} \end{aligned}$$

【答】図 13

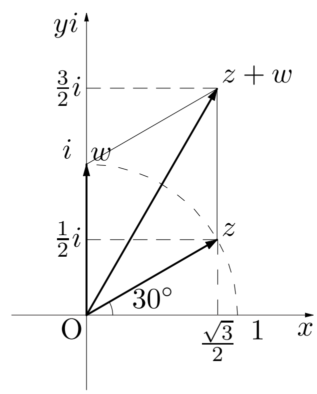


図 13: $z+w$ の図

$z+w$ の矢印は, z と w の矢印を 2 辺とする平行四辺形の点 O からの対角線となっている.

(b) 複素数の引き算.

$$\begin{aligned} z-w &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)-i \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i-2i\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}} \end{aligned}$$

【答】図 14

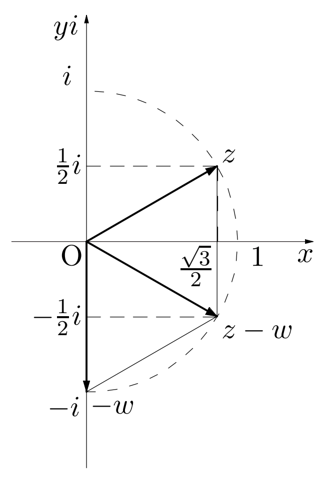


図 14: $z-w$ の図

$z-w$ の矢印は, z と $-w=-i$ の矢印を 2 辺とする平行四辺形の点 O からの対角線となっている.

(c) 複素数の掛け算.

$$
\begin{aligned}
2zw &= 2\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)i \\
&= \underline{\underline{-1+\sqrt{3}i}}
\end{aligned}
$$

【答】図 15

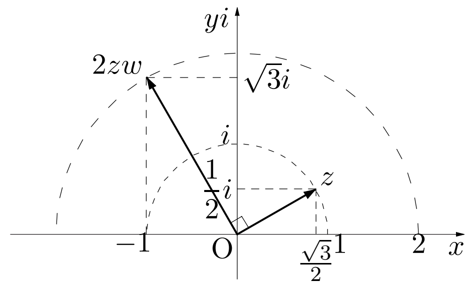


図 15: $2zw$ の図

z の矢印を 90°（w のなす角）だけ回転し，矢印を 2 倍する.

(d) 複素数の割り算.

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{2w} &= \frac{\sqrt{3}+i}{4i} \\
&= \frac{(-i)(\sqrt{3}+i)}{4(-i)i} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i}}
\end{aligned}
$$

【答】図 16

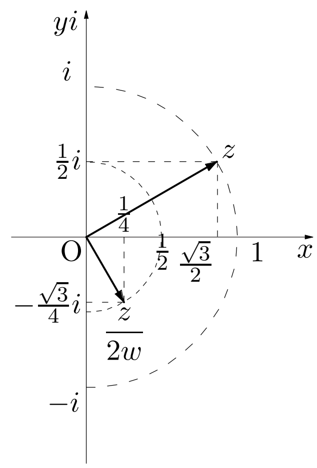


図 16: $\dfrac{z}{2w}$ の図

z の矢印を 90°（w のなす角）だけ時計まわりに回転し，矢印を $\dfrac{1}{2}$ 倍する.

問 33 複素数 $z=1+i$ について，つぎの問に答えよ.

(1) z に対応するガウス平面上の点を，原点を始点とし終点が z となる矢印 で描け．また，各点の原点からの距離と矢印の $+x$ 軸となす角を求めよ.

(2) (a) $2z$ (b) $z+\overline{z}$ (c) z^2 (d) $\dfrac{z}{\overline{z}}$

を計算して，それらの答を複素数平面上の点で表せ.

★　複素指数関数

$|z| = 1$ の複素数は，単位円上にある．
$z = X + Yi$ とおいて，67 ページの三角関数の定義

$$X = \cos\theta,\quad Y = \sin\theta,\quad (x = \theta)$$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

このような複素指数関数を考えると，以下のように便利である．

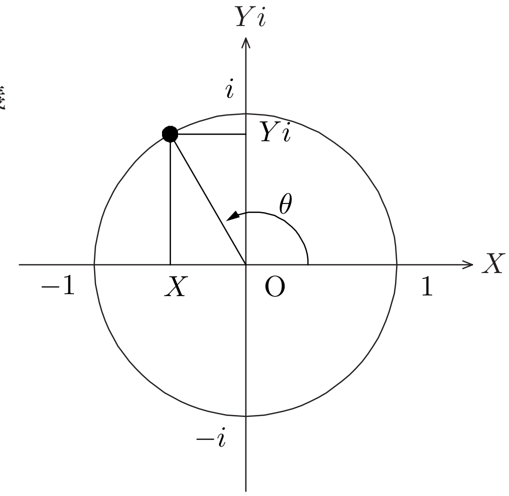


図 17: 単位円上の複素数

★　三角関数の加法定理

指数法則：$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$ より

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\
&= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta \\
&= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)
\end{aligned}$$

実数部と虚数部を別々に書く．$\alpha - \beta$ の場合も同じように示せる．

sin，　cos の**加法定理**（かほうていり）

【1】$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
　　$\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
【2】$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
　　$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

★　tan の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

例 34　$\cos 15^\circ$ の値を求めよ．

【解】 加法定理を利用する．

$$
\begin{aligned}
\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\
&= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}} \text{【答】}
\end{aligned}
$$

問 34　$\sin 75^\circ$ の値を求めよ．

★　三角関数の合成

$$a \sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$\text{ただし，} \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

例 35　次の問題文中の **A** ～ **G** には，それぞれ，–（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

三角関数（trigonometric function）

$$f(x) = 3\sin x + 4\cos x \qquad (0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ)$$

は $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ を満たす一定な角 α を用いて，

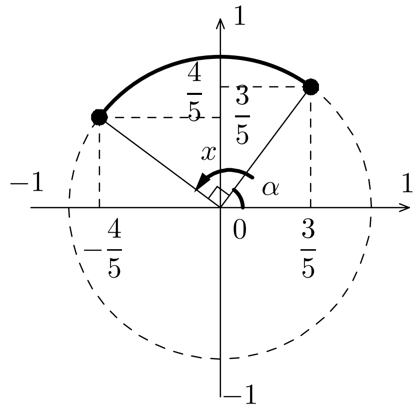
$$f(x) = \boxed{\mathbf{A}}\sin(x+\alpha)$$

と合成できるので，$x = \boxed{\mathbf{BC}}$ ° のとき最小値 $\boxed{\mathbf{D}}$ をとり，
$x = \boxed{\mathbf{EF}}$ ° $- \alpha$ のとき最大値 $\boxed{\mathbf{G}}$ をとる．

【解】　3 角関数の合成。

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin x + 4\cos x \\ &= 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) \\ &= \underline{\underline{5\sin(x+\alpha)}} \end{aligned}$$

(αは右図)



ここで，$0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ として最大最小値を求めると，図より

$$5\cdot\frac{3}{5} = f(90^\circ) \leqq f(x) \leqq f(90^\circ - \alpha) = 5\cdot 1$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{3 \leqq f(x) \leqq 5}}$$

（A の【答】5，BC の【答】90，D の【答】3，EF の【答】90，G の【答】5)

問 35　次の問題文中の **A** ～ **F** には，それぞれ，−（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

関数

$$f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$$

は

$$f(x) = \boxed{\mathbf{A}}\sin\left(x + \boxed{\mathbf{BC}}^\circ\right)$$

と合成できるので，$x = \boxed{\mathbf{DE}}^\circ$ のとき最大値 $\boxed{\mathbf{F}}$ をとる．

（日留試改）

第7章　図形と式・ベクトル

7–1　図形と方程式

≪ この節で学ぶこと ≫

[座標，距離，内分点・外分点，直線の方程式，傾き，直線のパラメーター表示，

2 直線の平行・垂直，点と直線の距離，円の方程式，円の接線の方程式，領域]

★　x, y 座標

座標軸（ざひょうじく）$\cdots x$：x 軸, y：y 軸
座標：$\mathrm{P}(x,\ y)\cdots x$：$x$ 座標, y：y 座標

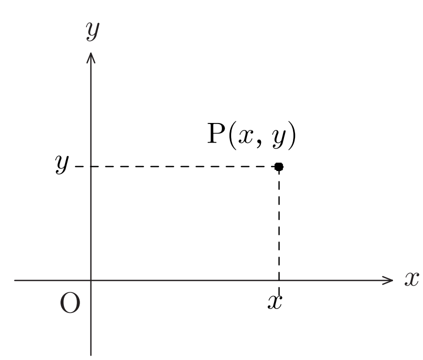


図 1: x, y 座標

★　2 点間の距離

2 点 $\mathbf{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathbf{B}(x_2,\ y_2)$ 間の距離

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \cdots ①$$

原点 $\mathbf{O}$ と点 $\mathbf{P}(x,\ y)$ 間の距離

$$\mathrm{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cdots ②$$

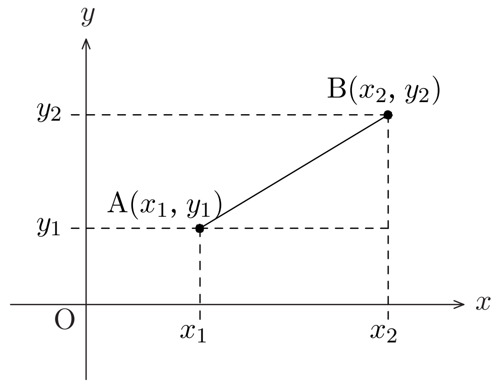


図 2: 2 点間の距離

★　内分点

内分点（ないぶんてん）：P | AP：BP$= m : n$
　ただし，P は線分 AB 上の点.

2 点 $\mathbf{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathbf{B}(x_2,\ y_2)$ を $m : n$ に内分した点 $\mathbf{P}(x,\ y)$

$$\begin{cases} x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n} \\ y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n} \end{cases}$$

$\mathbf{P}(x,\ y)$ が中点のとき

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

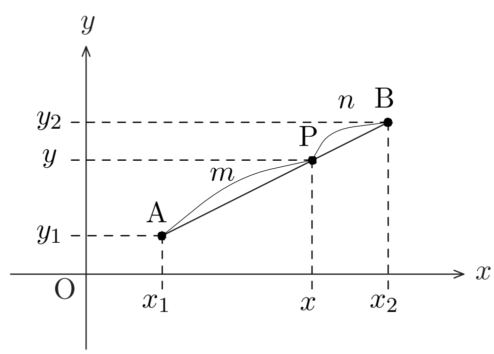


図 3: 内分点

ただし，$m \leqq 0,\ n \leqq 0$ ＆ $m + n \neq 0$ とする．これをまとめて

$$(x,\ y) = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right) \quad \cdots ③$$

★ 外分点

外分点(がいぶんてん)：Q | AQ：BQ= m'：n'

ただし，Q は線分 AB の延長上の点.

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ のつくる線分 AB の延長上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が線分 AB を m'：n' に外分する点であるとき，

$m=-m'$，$n=n'$ or $m=m'$，$n=-n'$ とおけば，

$$\begin{cases} x = \dfrac{nx_1+mx_2}{m+n} \\ y = \dfrac{ny_1+my_2}{m+n} \end{cases}$$

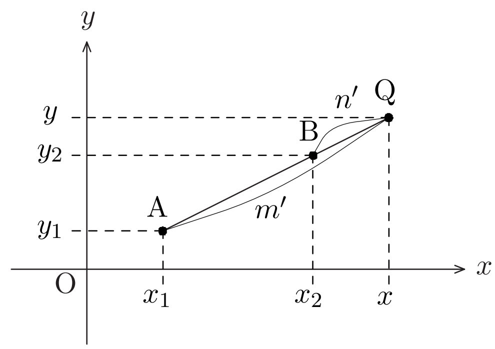


図 4: 外分点

つまり，③ 式は $m \gtreqless 0$，$n \gtreqless 0$ & $m+n \neq 0$ で使える.

問 36 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 3)$，$\mathrm{B}(4,\ 9)$ において，つぎの値を求めよ.

(1) 線分 AB の長さ
(2) 線分 AB の中点
(3) 線分 AB を 1：2 に内分する点
(4) 線分 AB を 2：1 に外分する点

★ 直線の方程式

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通る直線

$$y = p(x-x_1)+y_1 \quad \text{or} \quad x = x_1$$

原点を通る直線

$$y = px \quad \text{or} \quad x = 0\ (y\ 軸)$$

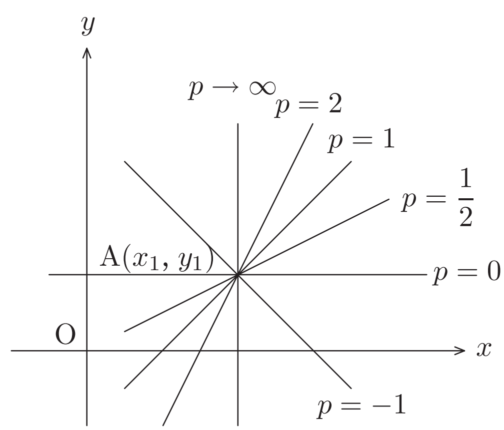


図 5: 直線のいろいろな傾き p

傾き：$p = \tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$x_1 = x_2$ のとき，p の値は存在しない．

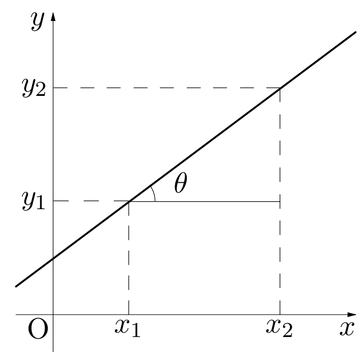


図 6: 2 点を与えたときの直線の傾き

問 37　つぎの直線の方程式を求めよ．

(1)　点 (3, 1) を通り，x 軸の正の方向とのなす角が 60° である．（中部大学）

(2)　2 点 $(-1,\ 1)$，$(3,\ 7)$ を通る．（摂南大学）

★　直線のパラメーター表示

③ で $t = \dfrac{m}{m+n}$ とおくと，$1 - t = 1 - \dfrac{m}{m+n} = \dfrac{n}{m+n}$ だから，

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 \end{cases}$$

t をいろいろ変えた点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は A，B を通る直線上を動く．上の 2 式より，

$$t(x_2 - x_1) = x - x_1, \qquad y - y_1 = t(y_2 - y_1)$$

この 2 式の右辺どうし，左辺どうしを掛けると，

$$t(x_2 - x_1)(y - y_1) = t(x - x_1)(y_2 - y_1)$$

t を消去すると，

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

この式は，

$$\begin{cases} x_1 \neq x_2 \text{ のとき} \quad y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ x_1 = x_2 \text{ のとき} \quad x = x_1 \end{cases}$$

つまり，直線の方程式となる．

直線のパラメーター表示

$$(x,\ y) = ((1-t)x_1 + tx_2,\ (1-t)y_1 + ty_2) \cdots ④$$

★ 直線の一般形

$$ax + by + c = 0 \iff y = px + q \ \text{ or } \ x = k$$

$a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ k$ は定数．

★ 2 直線の平行条件

平行条件

2 直線 $y = px + q,\ \ y = p'x + q'$ が平行 $\iff$ $p = p'$ & $q \neq q'$

★ 2 直線の垂直条件

垂直条件

2 直線 $y = px + q,\ \ y = p'x + q',\ \ (pp' \neq 0)$ が垂直 $\iff$ $pp' = -1$

$p = 0$ の場合：直線 $y = q$ に垂直な直線は $x = k$．証明は §2 でやる．

問 38　つぎの直線の方程式を求めよ.

(1)　点 $(1, -2)$ を通り，直線 $y = -3x - 5$ に平行.　（中部大学）
(2)　2 点 $(3,\ 2)$ を通リ，直線 $x + 2y - 2 = 0$ に垂直.

★　点と直線の距離

点 $(x_0,\ y_0)$ **と直線** $ax + by + c = 0$ **との距離：**d

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \cdots ⑤$$

証明は §2 でやる.

問 39　点 $(1, 2)$ と直線 $4x + 3y - 8 = 0$ との距離を求めよ.

★　円の方程式

中心 $\mathrm{C}(x_0,\ y_0)$**，半径** r **の円**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \cdots ⑥$$

原点 O が中心，半径 r **の円**

$$x^2 + y^2 = r^2$$

問 40　点 $(5, 2)$ を中心とする半径 3 の円の方程式を求めよ.　（摂南大学）

★ 円の接線の方程式

> **円** $x^2+y^2=r^2$ **の点** $(x_1,\ y_1)$ **における接線：**l
>
> $$x_1x+y_1y=r^2$$

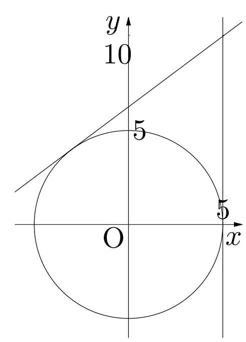
(i) 点 P の座標を l に代入すると，$x_1^2+y_1^2=r^2$ となるから,l は点 P を通る.
(ii) 原点 O と接線 l 間の距離は

$$\frac{|x_1\cdot 0+y_1\cdot 0-r^2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=\frac{r^2}{r}=r$$

となる.（Q. E. D.）

> **例 36**　円 $x^2+y^2=25$ に接し，点 A(5, 10) を通る直線の方程式を求めよ.
>
> （関東学院大）

【解】（円外の 1 点からの接線は 2 本あることに注意.）



(i) 図より，1 本の接線は $x=5$ であることは自明.
(ii) y 軸に平行でない接線.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ y=k(x-5)+10 \end{array}\right\}$$ が 1 つの実解を持つ.

$\iff$ $x^2+\{k(x-5)+10\}^2=25$ が重解を持つ.
$\iff$ $(k^2+1)x\ 2-10k(k-2)x+25(k^2-4k+3)=0$
　の判別式：$D=0$
$\iff$ $\dfrac{D}{4}=25k^2(k-2)^2-25(k^2+1)(k\ 2-4k+3)=0$
$\iff$ $k=\dfrac{3}{4}$

接線：$y=\dfrac{3}{4}(x-5)+10$

接線の方程式：$\underline{\underline{x=0\ \ \text{or}\ \ 3x-4y+25=0}}$

問 41　次の問題文中の **A** ～ **F** には，それぞれ，−（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

円

$$x^2+y^2=1\cdots\cdots①$$

上を動く点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とする．

(1)　円 ① 上の点 $\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$ における接線の方程式は，$\boxed{\mathbf{A}}\,x+\boxed{\mathbf{B}}\,y=\boxed{\mathbf{C}}$ である．

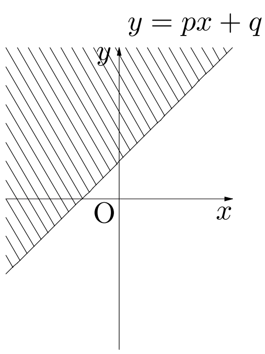
(2)　点 P における ① の接線 l に点 $\mathrm{A}(3,\ 2)$ からの垂線 AH を引くと

$$\mathrm{AH}=\left|\,\boxed{\mathbf{D}}\,a+\boxed{\mathbf{E}}\,b-\boxed{\mathbf{F}}\,\right|$$

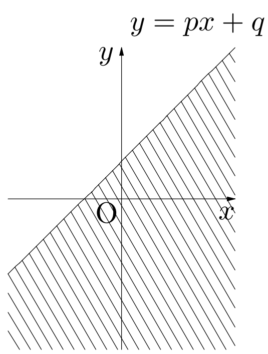
である．（日留試）

★　不等式の表す領域

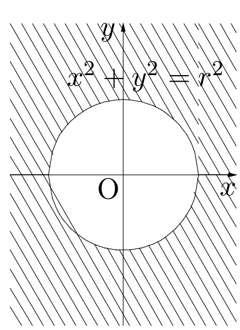
(1) $y>px+q$ の表す領域は直線 $y=px+q$ の上側．[図 7]
　$y<px+q$ の表す領域は直線 $y=px+q$ の下側．[図 8]
(2) $x^2+y^2>r^2$ の表す領域は円 $x^2+y^2=r^2$ の外部．[図 9]
　$x^2+y^2<r^2$ の表す領域は円 $x^2+y^2=r^2$ の内部．[図 10]



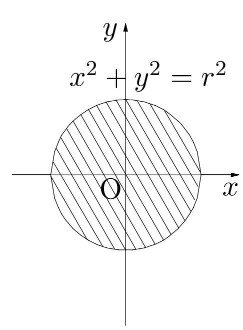
図：7



図：8



図：9



図：10

例 37 次の問題文中の **A** ～ **I** には，それぞれ，–（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

座標平面（coordinate plane）上に，円

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$$

がある．

(1) この円の中心の座標は $\left(\boxed{\mathbf{A}},\ \boxed{\mathbf{B}}\right)$ で，半径（radius）は $\boxed{\mathbf{C}}$ である．

(2) この円と直線

$$x + y = 8$$

との交点の座標は $\left(\boxed{\mathbf{D}},\ \boxed{\mathbf{E}}\right)$，$\left(\boxed{\mathbf{F}},\ \boxed{\mathbf{G}}\right)$ である．ただし，D<F とする．

(3) つぎの不等式（inequality）

$$x^+y^2 - 8x - 4y + 16 \leqq 0$$

$$x + y\ 8 \leqq 0$$

を同時に満たす領域（domain）の面積は $\boxed{\mathbf{H}}\,\pi + \boxed{\ \mathbf{I}\ }$ である．

（日留試）

【解】 (1) 与えられた式を変形すると，

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

円の中心 :$\underline{\underline{(4,\ 2)}}$，　半径 :$\underline{\underline{2}}$　　　　(ABC の【答】4, 2, 2)

(2) $(x-4)^2+(y-2)^2=2^2$ と $x+y=8$ の交点

$$\begin{aligned}
&\iff (x-4)^2+(y-2)^2=2^2 \ \ \& \ \ x+y=8\\
&\iff (x-4)^2+(y-2)^2=2^2 \ \ \& \ \ y=8-x\\
&\iff (x-4)^2+\{(8-x)-2\}^2=2^2 \ \ \& \ \ y=8-x\\
&\iff (x^2-8x+16)+(36-12x+x^2)=4 \ \ \& \ \ y=8-x\\
&\iff 2x^2-20x+48=0 \ \ \& \ \ y=8-x\\
&\iff x^2-10x+24=0 \ \ \& \ \ y=8-x\\
&\iff (x-4)(x-6)=0 \ \ \& \ \ y=8-x\\
&\iff (x=4 \ \text{ or } \ 6) \ \ \& \ \ y=8-x\\
&\iff (x,\ y)=\underline{\underline{(4,\ 4) \text{ or } \ (6,\ 2)}}
\end{aligned}$$

グラフをくわしく描くと，計算しなくても求められる．　(DEFG の【答】4, 4, 6, 2)

(3)(i)　$(x-4)^2+(y-2)^2=2^2$ ＆ $x+y=8$ が境界線である．

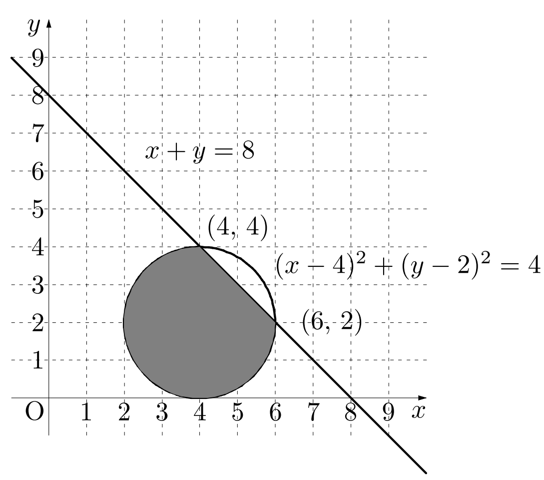
(ii) 例えば $(x,y)=(4,2)$ を代入すると，

$$(x-4)^2+(y-2)^2-4=-4 \leqq 0 \ \ \& \ \ x+y-8=-2 \leqq 0$$

となり，2 つの不等式を満たすから，(4, 2) を含む部分，下の図の斜線部がこの領域である．

この領域の面積は，半径 2 の $\dfrac{3}{4}$ 円と底辺 2，高さ 2 の三角形の和であるから，

$$\frac{3}{4}\times\pi\cdot 2^2+\frac{1}{2}2\cdot 2=\underline{\underline{3\pi+2}} \qquad \text{(HI の【答】3, 2)}$$



例 38　つぎの不等式の解の領域を図示せよ．

$$x^2+3xy+2y^2 \geqq 0$$

（摂南大学）

【解】 2 変数 $(x,\ y)$ の不等式の領域の図示はつぎの《手順》でおこなう.
(I)（与えられた不等式を因数分解する）

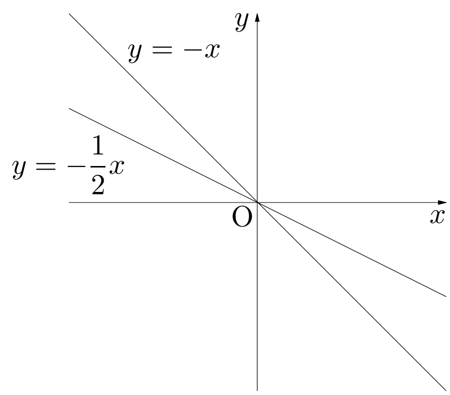
$$x^2 + 3xy + 2y^2 \geqq 0 \iff (x+y)(x+2y) \geqq 0$$

(II) （境界線を描く）

$(x+y)(x+2y) = 0$ をみたす直線または曲線が境界線である.

∴ 境界線は直線 $y = -x$ と $y = -\dfrac{1}{2}x$

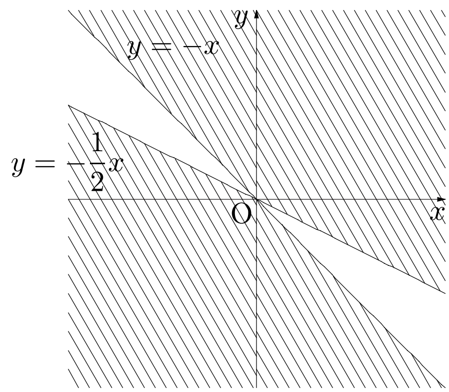
不等式は等号を含むから，この境界線は領域に含まれるから，実線で描く
（含まれない場合は点線で描く）.（下図）



(III)（領域に斜線を引く）
上図のように境界線によって平面が 4 つの部分に分けられている．この 4 つの領域のどれかに斜線を引けばよい．そのためには，境界線上にない 1 点を選び，不等式に代入して満足するかどうか調べる.
例えば (1, 0) を選んで代入すると，

$(x+y)(x+2y) = (1+0)(1+0) = 1 \geqq 0$ となり不等式をみたすから，

点 (1, 0) を含む領域に斜線を引く。あとは隣り合わないように斜線を引いて行けばよい.
【答】はつぎのページの図となる.



問 42　つぎの不等式の解の領域を図示せよ．

$$(x + y)(x^2 + y^2 - 2) < 0$$

7–2　ベクトル

≪ この節で学ぶこと ≫

[ベクトル，ベクトルの演算，ベクトルの成分，位置ベクトル，単位ベクトル

内積，長さ・角，平行・垂直，方程式との対応]

★　ベクトル

ベクトル：$\vec{a}$ == 始点 A，終点 B とする有向線分.
<u>等しい</u> ベクトル：$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} \mid \mathrm{AB} = \mathrm{CD}$　&　$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動して $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ に重ねることができる場合,
2 つのベクトルは等しい.

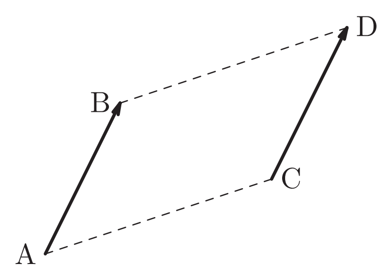


図 1: 等しいベクトル

★　ベクトルの演算

【1】 ベクトルの加法 $\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \text{ の和 :} \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

これは，図 2，図 3 のように作図.

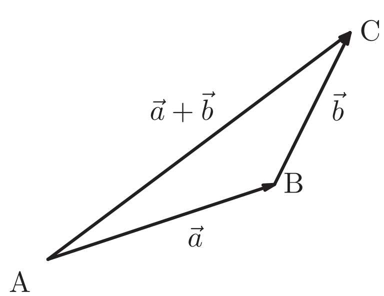


図 2: ベクトルの加法
（三角形の方法）

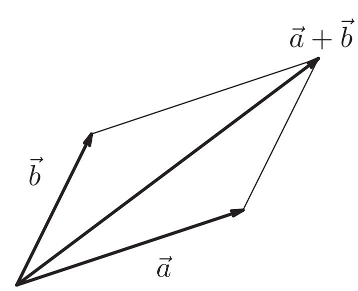


図 3: ベクトルの加法
（平行四辺形の方法）

1° ゼロベクトル $\vec{0}$ | $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
2° 逆ベクトル $-\vec{a}$ | $(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$
3° ベクトルの減法 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

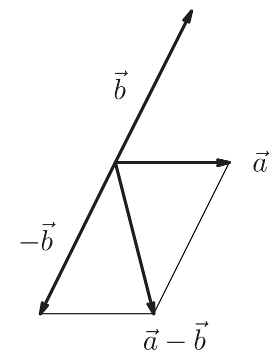
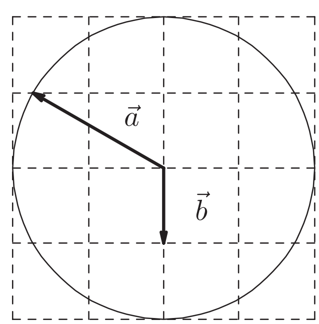


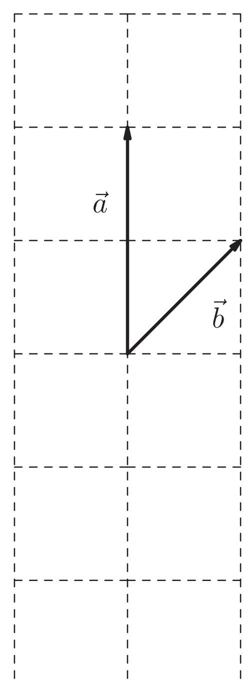
図 4: ベクトルの減法

問 43

図の (a), (b) で，2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の和 $\vec{a}+\vec{b}$ を実線の矢印で，　差 $\vec{a}-\vec{b}$ を点線の矢印で，それぞれ，描け.



(a)



(b)

【2】ベクトルの実数倍 $k\vec{a}$

1° $k > 0$ ならば，$\vec{a}$ と同じ方向で長さが $\vec{a}$ の k 倍のベクトル．

2° $k < 0$ ならば，$\vec{a}$ と逆方向で長さが $\vec{a}$ の $|k|$ 倍のベクトル．

3° $k = 0$ ならば，$k\vec{a} = \vec{0}$
　また，$\vec{a} = \vec{0}$ のとき，$k\vec{0} = \vec{0}$

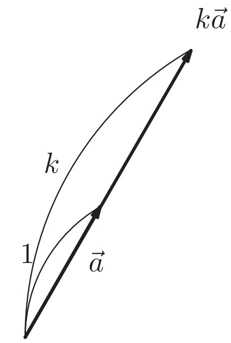


図 5: ベクトルの実数倍

【3】ベクトルの分解

　任意の $\vec{c}$ は，$\vec{0}$ でなく，たがいに平行でない 2 つのベクトル $\vec{a}$,$\vec{b}$ によって，

$$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

と表すことができる．このとき実数 p, q は 1 通りの数の組である．

　図 12 で $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，　$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，　$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

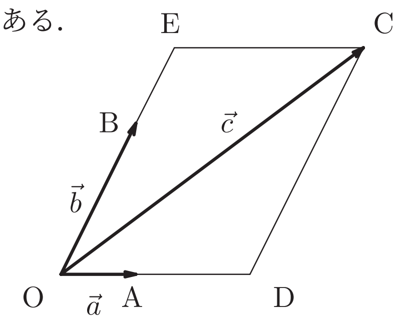


図 6: ベクトルの分解

★　ベクトルの成分表示

成分表示（せいぶんひょうじ）：$\vec{a} = (a_x,\ a_y)$

　成分 $\cdots a_x$: x **成分**，a_y: y **成分**

　平面上のベクトルは 2 成分，空間内では 3 成分．

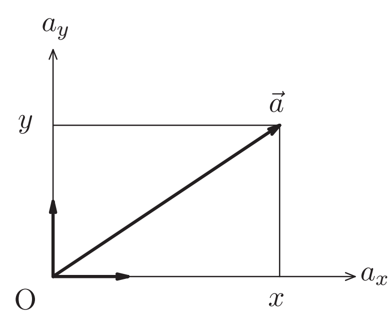


図 7: x，y 成分

★　成分によるベクトルの演算

【1】ベクトルの加法

　2 つのベクトルを

$$\vec{a} = (a_x, a_y), \quad \vec{b} = (b_x, b_y)$$

と表したとき，

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

1° ゼロベクトル $\vec{0} = (0,\ 0)$
2° 逆ベクトル $-\vec{a} = (-a_x,\ -a_y)$
3° ベクトルの減法 $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$

【2】ベクトルの実数倍

k を実数として，

$$k\vec{a} = (ka_x, ka_y)$$

問 44　つぎのベクトルを成分表示せよ．

(A)　$\vec{a} = (-\sqrt{3},\ 1),\ \ \vec{b} = (0,\ -1)$ のとき，
(1) $\vec{a}+\vec{b}$　(2) $\vec{a}-\vec{b}$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}-2\vec{b})$

(B)　$\vec{a} = (0,\ 2),\ \ \vec{b} = (1,\ 1)$ のとき，
(4) $\vec{a}+\vec{b}$　(5) $\vec{a}-\vec{b}$　(6) $-\dfrac{1}{2}(\vec{a}-2\vec{b})$

★　位置ベクトル

位置ベクトル：$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$
ただし，O：平面上に固定された原点．P: 平面上の点．

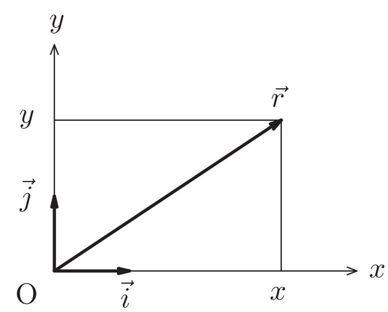


図 8: 位置ベクトルの分解

★　単位ベクトル

単位ベクトル：$\vec{i} = (1,\ 0),\ \ \vec{j} = (0,\ 1)$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x,\ y)$$

★　ベクトルの内積

$\vec{a},\ \vec{b}$ **の内積**（ないせき）

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = a_xb_x + a_yb_y$$

ただし，$\theta\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ は $\vec{a},\ \vec{b}$ のなす角

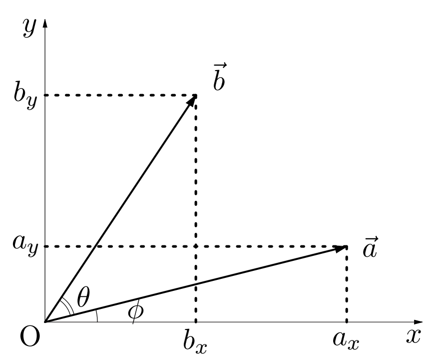


図 9: ベクトルの内積

[注意] $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$ とおいて,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \text{ のとき} \begin{cases} ① & a = 0 \\ ② & b = 0 \\ ③ & \cos\theta = 0, \quad \therefore\ \theta = 90^\circ \end{cases}$$

③ の場合もあるということ.

★ ベクトルの大きさとなす角

ベクトルの大きさ

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

80 ページ ② 式と対応.

2 つのベクトルのなす角

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)}}$$

例 39 次の問題文中の **A** ～ **D** には，それぞれ，−（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

長さ（length）2 のベクトル（vector）$\vec{a}$ と長さが 3 のベクトル $\vec{b}$ のなす角（angle）が 60° であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積（inner product）は $\boxed{\mathbf{A}}$ であり，ベクトル $\vec{a}+2\vec{b}$ の長さは $\boxed{\mathbf{B}}\sqrt{\boxed{\mathbf{CD}}}$ である．

（日留試試行）

【解】 (i) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 3\cos 60^\circ = \underline{\underline{3}}$

(ii)

$$\begin{aligned}(\vec{a}+2\vec{b})^2 &= \vec{a}^{\,2} + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\vec{b}^{\,2} \\ &= 2^2 + 4\cdot 3 + 4\cdot 3^2 \\ &= 52\end{aligned}$$

$$\therefore\ |\vec{a}+2\vec{b}| = \sqrt{52} = \underline{\underline{2\sqrt{13}}}$$

（A の【答】3，BCD の【答】213）

★　2 つのベクトルの平行・垂直

【1】$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき，k を 0 でない実数として

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}}$$

これは，ベクトルの実数倍である．
【2】$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき，

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

これは前ページの説明で $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ の ③ の場合である．

★　方程式とベクトル式の対応

以下，この章の §1 の ①〜⑥ 式とベクトル式の対応を示す．

【1】座標と成分表示

始点 A(x_1, y_1)，終点 B(x_2, y_2) のベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \cdots \text{①}'$$

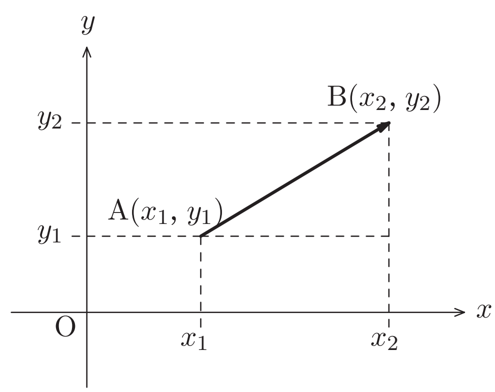


図 10: 座標と成分表示

①’ 式は ① 式に対応している．

【2】内分点・外分点

2 点 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) を m：n に内分，あるいは，外分した点 P(x, y).
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$,$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$,$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{x}$ とおくと，③ より，

$$\vec{x} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right) \qquad \cdots \text{③}'$$

P が AB の中点のとき，$\vec{x} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2},\ \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

【3】直線

2 点 $\vec{a}$, $\vec{b}$ を通る直線のベクトル方程式は，④ より，

$$\vec{x}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=((1-t)x_1+tx_2,\ (1-t)y_1+ty_2) \qquad \cdots ④'$$

2 点 $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2)$, (ただし,$x_1\neq x_2$) を通る直線と 2 点 $\vec{a}\,'=(x_1',\ y_1')$, $\vec{b}\,'=(x_2',\ y_2')$, (ただし,$x_1'\neq x_2'$) を通る直線が垂直なとき,

$$(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\,'-\vec{a}\,')=0$$

$$\iff (x_2-x_1)(x_2'-x_1')+(y_2-y_1)(y_2'-y_1')=0$$

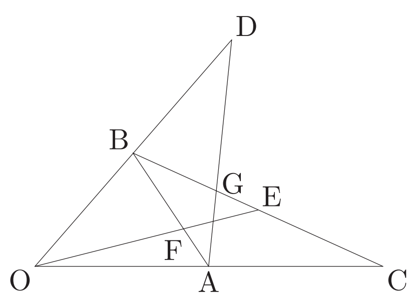
$$\iff 1+\frac{(y_2-y_1)(y_2'-y_1')}{(x_2-x_1)(x_2'-x_1')}=0$$

$$\iff pp'=-1,\ \text{ただし},\ p=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ p'=\frac{y_2'-y_1'}{x_2'-x_1'}$$

これで 83 ページの**直線の垂直条件**が証明された.

例 40 三角形 OAB において，OA の延長線上に OA=AC となるように点 C をとり，また OB の延長線上に OB=BD となるように点 D をとる．線分 BC の中点を E，線分 OE と線分 AB の交点を F，線分 BC と線分 AD の交点を G とする．ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$



（神戸商科大）

【解】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\vec{a}$, BC の中点 E

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}(2\vec{a}+\vec{b})=\underline{\underline{\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}}$$

(2) F は AB を $t:(1-t)$ に内分，また，F は OE 上にある．

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=k\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$1-t=k \ \ \& \ \ t=\frac{1}{2}t \iff k=2t=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \ \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\underline{\underline{\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}}$$

(3) G は AD を $n:(1-n)$ に内分，また，BC を $m:(1-m)$ に内分．

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-n)\vec{a}+n\cdot 2\vec{b}=(1-m)\cdot 2\vec{a}+m\vec{b}$$

$$1-n=2(1-m) \ \ \& \ \ 2n=m \iff m=2n=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \ \overrightarrow{\mathrm{OG}}=\underline{\underline{\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})}}$$

【4】点と直線の距離

84 ページの

> **点** $(x_0,\ y_0)$ **と直線** $ax+by+c=0$ **との距離：**d
>
> $$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cdots ⑤$$

この関係は，つぎのように証明する．

[証明で使う式]

(i) 法線ベクトル：$\vec{n}=(a,\ b)\cdots$ 直線 $l:ax+by+c=0$ に垂直なベクトル．

l の傾き：$p=-\dfrac{a}{b}$，$(b\neq 0)$ or y 軸に平行 $(b=0)$

$\vec{n}$ の傾き：$p'=\dfrac{b}{a}$，$(a\neq 0)$ or x 軸に平行 $(a=0)$

$pp'=-1$ の場合もそれ以外の場合も両者は垂直．

(ii) 点 $\vec{p}=(x_0,\ y_0)$ を通り，$\vec{n}=(a,\ b)$ に垂直な直線は

$$\vec{x}=\vec{p}+t\vec{n}=(x_0+at,\ y_0+bt)$$

と表せる．

$\vec{x}-\vec{p}=t\vec{a}$ より，$\vec{x}-\vec{p}$ と $\vec{a}$ は平行

【証明】点 H は $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ 上にあるから，t を任意の実数として (ii) より

$\mathrm{H}(x_0+at,\ y_0+bt)$

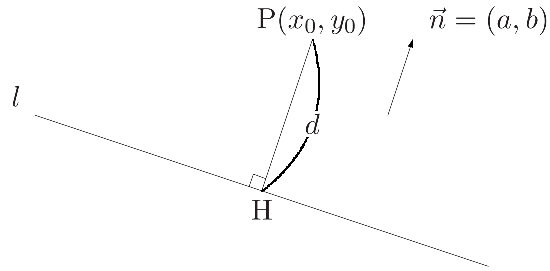


図 11: 点と直線の距離

$$\left[\begin{array}{l} d=\sqrt{(at)^2+(bt)^2} \\ \quad =\sqrt{a^2+b^2}|t| \\ a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} d=\sqrt{a^2+b^2}|t| \\ t=-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

【5】**円**

中心 C$(\vec{c})$= $8x_0$，$y_0)$，半径 r の円周上の点 P$(\vec{x})$= $(x,\ y)$ は,

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r \iff |\vec{x}-\vec{c}|=r$$

$$(\vec{x}-\vec{c})\cdot(\vec{x}-\vec{c})=r^2$$

$$\iff (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \qquad \cdots ⑥$$

第8章　微分・積分

8–1　導関数

≪ この節で学ぶこと ≫

[**極限値，微分係数，接線，導関数，x^n の導関数，関数の増減，極大・極小**]

★　関数の極限値

関数記号：$f(x)$ については，第 2 章 §1（17 ページ）で習った．

関数 $f(x)$ で，x が $x \neq a$ の範囲で限りなく a に近づくとき，$f(x)$ がある一定の値 α に限りなく近づくならば，α を x が a に近づくときの関数 $f(x)$ の**極限値**（きょくげんち）と呼び，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

と表す．

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **1**．　$g(x) = 2x - x^2$ のとき．

$$\lim_{x\to 2}(2x - x^2) = 2\cdot 2 - 2^2 = \underline{\underline{0}},$$ 　　これは　$\lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$　が成り立つ例．

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**．　$f(x) = \dfrac{4 - x^2}{2 - x}$ のとき．では，$x = 2$ とおくと分母が 0 となるから，$x = 2$ では $f(x)$ は定義されていない．しかし，$x \neq 2$ のとき，$\dfrac{4 - x^2}{2 - x} = \dfrac{(2 + x)(2 - x)}{2 - x} = 2 + x$ であるから，

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(2 + x) = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$$ 　この例では，$\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ である．

★　微分係数と導関数

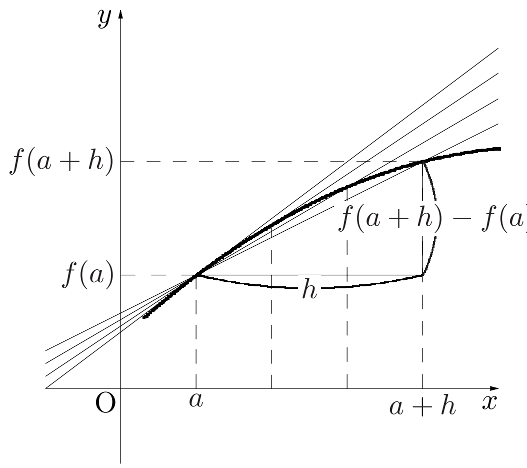


図 1: 微分係数と接線

「関数 $f(x)$ の $x = a$ での**微分係数**（びぶんけいすう）は

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

と定義される.」

2 点 $(a,\ f(a))$, $(a+h,\ f(a+h))$ を通る直線の傾き：p

$$p = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$x = a+h$ を $x = a$ に近づける，すなわち，h を 0 に近づければ，p の極限は曲線 $y = f(x)$ の**接点**（せってん）$(a,\ f(a))$ における**接線**（せっせん）**の傾き**となる.

ここで注意すべきことは，x の値を a なら a と定めるとそれに応じて $f'(a)$ の値がただ 1 つだけ定まる．x の値をいろいろ変えればそれに対応して微分係数が定まるから，これも x の関数の 1 つであると考えることができる．この関数を**導関数**（どうかんすう）と呼び，$f'(x)$ で表す.

【導関数の定義】：$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$

$f'(x)$ のことを $\dfrac{dy}{dx}$，あるいは，y' と書くこともある.

Ex 地面からの高さ y_0 の地点から鉛直上向きに初速 v_0 でボールを投げた．その後，時間 t 経過したときのボールの高さ y は

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

で与えられる．このときのボールの速度を考える．ただし，g は重力加速度と呼ばれる定数であり，空気の抵抗力は無視できて，考えている瞬間にはボールは地面には落ちていないとする.

速度とは y の時間変化である．はじめに各項をひとつずつ考えてみる.

(i) $f(t) = y_0$（定数）とおくと，　$f'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{y_0 - y_0}{h} = \underline{\underline{0}}$

(ii) $g(t) = v_0 t$ とおくと，　$g'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{v_0(t+h) - v_0 t}{h} = \underline{\underline{v_0}}$

(iii) $h(t) = \dfrac{1}{2} g t^2$ とおくと，　$h'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{2} g (t+h)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{h}$

$$\frac{1}{2} g (t+h)^2 - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g (t^2 + 2ht + h^2) - \frac{1}{2} g t^2 = ght + \frac{1}{2} g h^2$$

だから,

$$h'(t) = \lim_{h\to 0}\left(gt + \frac{1}{2}gh\right) = \underline{\underline{gt}}$$

(iv) $F(t) = f(t) + g(t) - h(t)$ のとき，今までの結果を組み合わせて

$$F'(t) = f'(t) + g'(t) - h'(t) = \underline{\underline{v_0 - gt}}$$

ボールの速度は $\dfrac{dy}{dt} = F'(t)$ であり，　$\dfrac{dy}{dt} = \underline{\underline{v_0 - gt}}$ 【答】

しかし，いちいち極限の計算をしなくてもいいように，公式にまとめておこう.

★　導関数の公式

$f(x) = c$ **（定数）の微分：**　$f'(x) = \dfrac{dc}{dx} = 0$

$f(x) = x^n, (n = 1,^2,\ 3,\ \cdots)$ **の微分：**　$f'(x) = \dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

問 45　関数 $f(x) = x^3$ の導関数が $f'(x) = 3x^2$ となることを定義にしたがって証明せよ.　（上智大学）

【1】 $y = kf(x)$ (k：定数) $\Longrightarrow$ $y' = kf'(x)$
【2】 $y = f(x) + g(x)$ $\Longrightarrow$ $y' = f'(x) + g'(x)$
【3】 $y = f(x) - g(x)$ $\Longrightarrow$ $y' = f'(x) - g'(x)$

★　関数の増減

ある区間で $f'(x) > 0$ $\Longrightarrow$ その区間で $f(x)$：増加

ある区間で $f'(x) < 0$ $\Longrightarrow$ その区間で $f(x)$：減少

★ 極大・極小

関数 $f(x)$ の**極大値**（きょくだいち）：$f(a) \mid f'(a)=0$ & $f'(a-h)>0$ & $f'(a+h)<0$
関数 $f(x)$ の**極小値**（きょくしょうち）：$f(a) \mid f'(a)=0$ & $f'(a-h)<0$ & $f'(a+h)>0$
ただし，h は正の小さい値．

例 41 次の問題文中の **A** ～ **H** には，それぞれ，–（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

関数

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

は $x=$ $\boxed{\mathbf{A}}$ のとき極大値（maximal value）$\boxed{\mathbf{B}}$ をとり，$x=$ $\boxed{\mathbf{C}}$ のとき極小値（minimal value）$\boxed{\mathbf{DE}}$ をとる．
$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値は $\boxed{\mathbf{F}}$ であり，最小値は $\boxed{\mathbf{GH}}$ である．

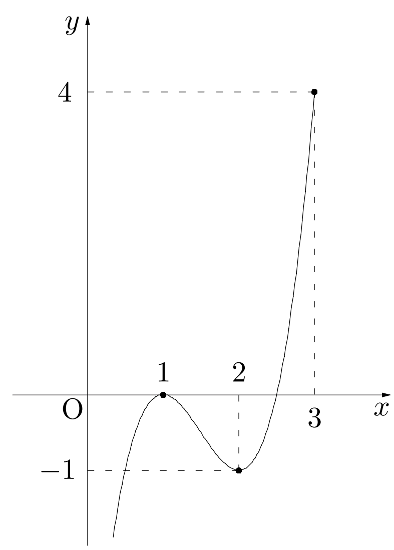
（日留試）

【解】 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$y = f(x)$ の増減表は次の通り

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	↗	極大 0	↘	極小 -1	↗	4



増減表とグラフより，
極大値：$\underline{\underline{f(1)=0}}$，極小値：$\underline{\underline{f(2)=-2}}$

(A，B の【答】: 1，0，C，DE の【答】: 2，-1)

最大最小問題

$$\left[\begin{array}{ll} \text{関数の値域：} & \min \leqq f(x) \leqq \max \\ \text{変数の定義域：} & 0 \leqq x \leqq 3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(0) = \underline{\underline{-5}} & \cdots \min \\ f(1) = 0 & \\ f(2) = -1 & \\ f(3) = \underline{\underline{4}} & \cdots \max \end{array}\right.$$

(F の【答】: 4,　GH の【答】: – 5)

問 46　次の問題文中の **A** ～ **G** には，それぞれ，–（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

関数

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3$$

は $x =$ $\boxed{\mathbf{AB}}$ で極大値 $\boxed{\mathbf{CD}}$ をとり，$x =$ $\boxed{\mathbf{E}}$ で極小値 $\boxed{\mathbf{FG}}$ をとる．

（日留試）

8–2　積分

≪ この節で学ぶこと ≫

[**不定積分，x^n の積分，積分定数，定積分，定積分の公式，定積分の性質，曲線の面積**

2 次関数の定積分]

★　導関数のおさらい

第 8 章 §1 で，tx の n 次関数 x^n を微分すると $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ となることを学んだ．関数の形を少し変えて，

$$g(x) = \frac{1}{n}x^n, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とすると，$g(x)$ の導関数は，

$$g'(x) = x^{n-1}$$

となる．具体的に表にしてみると，

$g(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\cdots$
$g'(x)$	1	x	x^2	$\cdots$

これ以外に大切なことは，定数 C の微分は

$$\boxed{\frac{dC}{dx} = 0}$$

ということである．

★　微分の逆演算

微分をすることの逆を考えてみよう．この演算を**積分**(せきぶん)**する**と言う．ここで，

$$g(x) = F(x), \quad g'(x) = f(x)$$

とおきかえて，上の表の第 1 行目と第 2 行目とを入れかえて書くと，

$f(x)$	1	x	x^2	$\cdots$
$F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\cdots$

演算の規則としては，

$$\boxed{f(x) = x^n \text{のとき}, \quad F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)}$$

$f(x)$ の**不定積分**(ふていせきぶん)：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \cdots$ 微分すると $f(x)$ になる関数．

[注意] $\displaystyle\int f(x)dx$ の答は，上記のような $F(x)$ だけではない．

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = f(x) + 0 = f(x)$$

この C を**積分定数**と呼ぶ．すなわち，不定積分の答は

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

となって，C の部分の値は決まらない．

★　定積分の定義

a から b の**定積分**(ていせきぶん)：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$　（関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とする.）

★ 定積分の公式

【1】 $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k：定数)

【2】 $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

【3】 $\displaystyle\int_a^b (f(x)-g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

★ 定積分の性質

【1】 $\displaystyle\int_a^a kf(x)dx = 0$

【2】 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

【3】 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Ex 地面からの高さ $y(0)$ の地点から鉛直上向きに初速 $v(0)$ でボールを投げた．その後，時間 t 経過したときのボールの速度 $v(t)$ は

$$v(t) = v_0 - gt$$

で与えられる．時間 t 経過したときのボールの高さ $y(t)$ を考える．ただし，g は重力加速度と呼ばれる定数であり，空気の抵抗力は無視できて，考えている瞬間にはボールは地面には落ちていないとする．

$v(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$ の逆演算の関係より，

$$\int_0^t v(t)dt = y(t) - y(0)$$

$$\int_0^t v(t)dt = \int_0^t (v(0)-gt)dt$$

$$= v(0)\int_0^t 1dt - g\int_0^t tdt$$

$$= v(0)\Big[t\Big]_0^t - g\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^t = v(0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

だから，

$$\underline{\underline{y(t) = y(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2}}$$

★　曲線の面積

$f(x) \geqq 0$ のとき，

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

は，曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a$ と x 軸，および，直線 $x = b$ で囲まれた部分の面積を表す．

$f(x) < 0$ のときは,

$$\int_a^b f(x)dx = -S$$

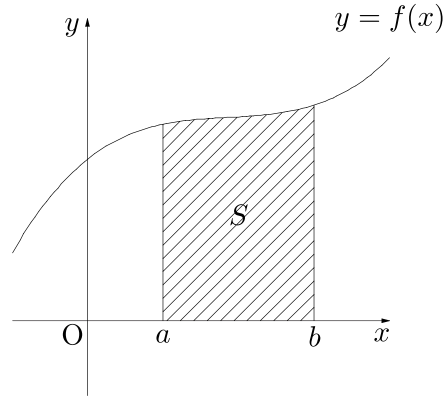


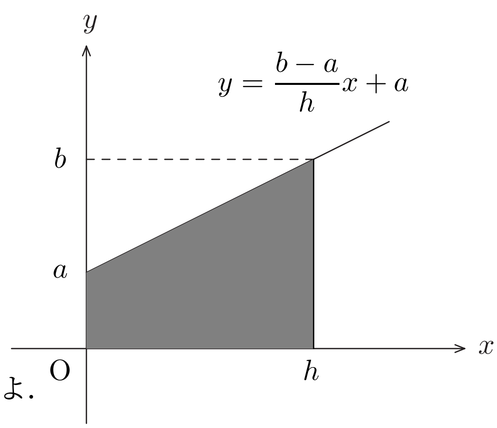
図 2: 曲線の面積

問 47

$f(x) = \dfrac{b-a}{h}x + a$ とおくと，$y = f(x)$ の $x = 0$ から $x = h$ までの定積分は，上底 a，下底 b，高さ h の台形の面積であることから，

$$\int_0^h f(x)dx = \frac{1}{2}(a+b)h$$

となる．これを積分計算により確めよ．



例 42　次の問題文中の **A** ～ **E** には，それぞれ，−（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

2 次関数（quadratic function）
$y = 1 - 3x^2$

の $x = 0$ から $x = a$（ただし $a > 0$）までの定積分（definite integral）は $a = \dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\mathbf{A}}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\mathbf{B}}}{\boxed{\mathbf{C}}\sqrt{\boxed{\mathbf{D}}}}$ をとり，$a = \boxed{\mathbf{E}}$ で 0 となる．

【解】 $y=1-3x^2$ のグラフは $0 \leqq x \leqq 1$ 付近で右下の図のようになる．
定積分を実行すると，

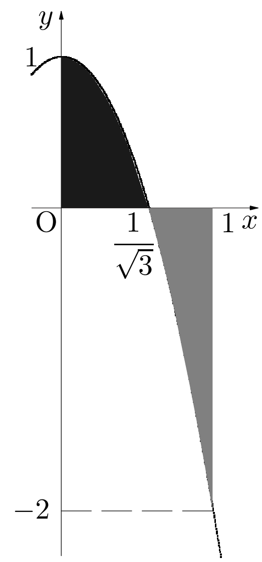
$$\int_0^a (1-3x^2)dx = \left[x-x^3\right]_0^a = a-a^3$$

a を変数とした関数 $S=a-a^3$ の導関数は $S'=1-3a^2$ である．S の最大値は $y=1-3x^2$ の $0 \leqq x \leqq a$ の定積分で a を動かして考えてみると，上の図の濃く塗られた部分のときであることがわかる．これは

$$S'=1-3a^2=0 \ \& \ a>0 \Longleftrightarrow a=\underline{\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}}}$$

のときで，

$$S=\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\underline{\underline{\underline{\frac{2}{3\sqrt{3}}}}}$$



また，

$$S=a-a^3=0 \ \& \ a>0 \Longleftrightarrow a=\underline{\underline{1}}$$

グラフで濃く塗られた部分と薄く塗られた部分は正負打ち消されて定積分は 0 となる．

（A の【答】3，B の【答】2，C の【答】3，D の【答】3，E の【答】1）

問 48 次の問題文中の **A** には，−（負号，minus sign）か 0 ∼ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

放物線 $y=x^2+3$ と直線 $y=2\sqrt{3}x$ と y 軸で囲まれた部分の面積は $\sqrt{\boxed{\mathbf{A}}}$ である．

（日留試）

★　2 次関数の定積分

$$-x^2+px+q=(x-\alpha)(\beta-x), \qquad \alpha<\beta$$

$$\int_\alpha^\beta(-x^2+px+q)dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(\beta-x)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}D^{\frac{3}{2}}$$

$$D=p^2+4q(>0)$$

【証明】$t=x-\alpha$ とおく．$x=t+\alpha,\ \dfrac{dx}{dt}=1,\ \ dx=dt$

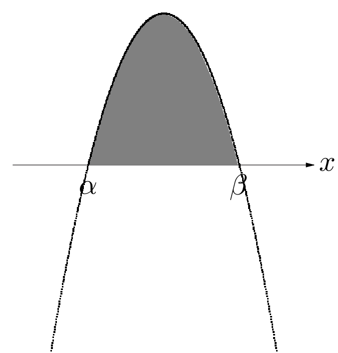
$\beta-x=(\beta-\alpha)-t,\ \ x=\alpha$ のとき $t=0,\ \ x=\beta$ のとき $t=\beta-\alpha$

$$与式=\int_\alpha^\beta t(\beta-\alpha-t)dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\{(\beta-\alpha)t-t^2\}dt$$

$$=\left[\frac{\beta-\alpha}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$（Q. E. D.）

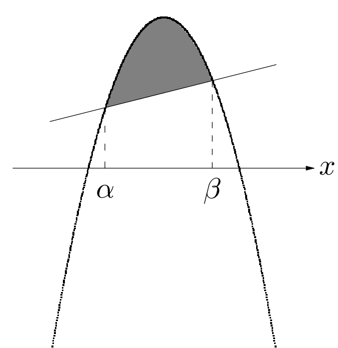


応用 1 $y=ax^2+bx+c(=f(x))$ と $y=mx+n(=g(x))$ で囲まれた面積 S.

(i)　$a<0$ のとき.

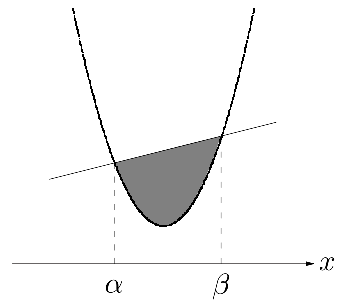
$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=(ax^2+bx+c)-(mx+n)\\&=-a\left(-x^2+\frac{m-b}{a}x+\frac{n-c}{a}\right)\\&=-a(-x^2+px+q)\\&=|a|(x-\alpha)(\beta-x)\end{aligned}$$



$$S = \underline{\underline{|a| \cdot \frac{1}{6} D^{\frac{3}{2}}}}, \qquad D = \left(\frac{m-b}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{n-c}{a}\right)$$

(ii) $a > 0$ のとき.

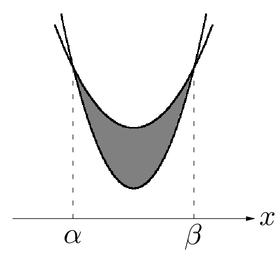


$$S = \int_\alpha^\beta \{g(x) - f(x)\}\, dx$$

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= (mx+n) - (ax^2+bx+c) \\ &= a\left(-x^2 + \frac{m-b}{a}x + \frac{n-c}{a}\right) \end{aligned}$$

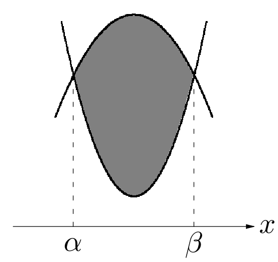
答は同じ.

$\boxed{\textbf{応用 2}}$ $y = ax^2 + bx + c (= f(x))$ と $y = a'x^2 + b'x + c' (= g(x))$ で囲まれた面積 S. ただし $a > a'$ とする.



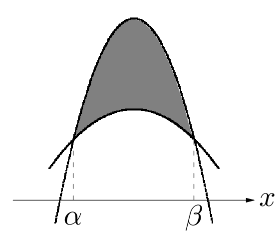
$$S = \int_\alpha^\beta \{g(x) - f(x)\}\, dx$$

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= (a'x^2 + b'x + c') - (ax^2 + bx + c) \\ &= (a-a')\left(-x^2 + \frac{b'-b}{a-a'}x + \frac{c'-c}{a-a'}\right) \end{aligned}$$



$$S = \underline{\underline{(a-a') \cdot \frac{1}{6} D^{\frac{3}{2}}}}$$

ただし, $D = \left(\dfrac{b'-b}{a-a'}\right)^2 + 4\left(\dfrac{c'-c}{a-a'}\right)$



例 43

次の問題文中の **A** ～ **E** には，それぞれ，－（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

放物線 $y = (x-1)^2$ と直線 $y = ax + 1$ で囲まれた面積が $\dfrac{125}{48}$ となるのは，$a = \dfrac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}}$ または $a = \dfrac{\boxed{\mathbf{CD}}}{\boxed{\mathbf{E}}}$ のときである．ただし，$\dfrac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}}$，$\dfrac{\boxed{\mathbf{CD}}}{\boxed{\mathbf{E}}}$ は既約分数である．

（日留試）

【解】 2 次方程式

$$(ax+1)-(x-1)^2=0 \iff -x^2+(a+2)x=0$$

の判別式は，$D=(a+2)^2$．交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，

$$\int_\alpha^\beta \{(ax+1)-(x-1)^2\}dx = \frac{1}{6}D^{\frac{3}{2}} = \frac{125}{48}$$

$$\iff \frac{1}{6}(a+2)^3 = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}\right)^3$$

$$\iff a+2=\frac{5}{2} \text{ or } (a+2)=-\frac{5}{2}$$

$$\iff a=\underline{\underline{\frac{1}{2}}} \text{ or } a=\underline{\underline{-\frac{9}{2}}}$$

（A の【答】1，B の【答】2，CD の【答】-9，E の【答】2）

問 49　曲線 $y = x^2-4$ と直線 $y = 2x-1$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

（中部大学）

第9章　個数と確率

9–1　順列組合せ

≪ この節で学ぶこと ≫

[**順列，組合せ，円順列，重複順列，同じものを含む順列，二項定理**]

★　順列

順列（じゅんれつ）$=n$ 個のものから r 個とった並べ方.

$$\boxed{{}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

[**Ex**] **1**.　A, B, C, D の文字の書いたカード 4 枚の中から 2 枚取りだして並べる並べ方の数.

$${}_4P_2 = 4\times 3 = \underline{\underline{12\text{ 通り}}}$$

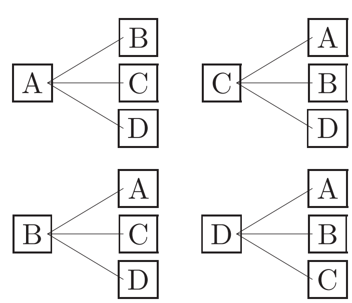
辞書式の並べ方をすると，

$\boxed{\text{A}}\boxed{\text{B}}$,　$\boxed{\text{A}}\boxed{\text{C}}$,　$\boxed{\text{A}}\boxed{\text{D}}$

$\boxed{\text{B}}\boxed{\text{A}}$,　$\boxed{\text{B}}\boxed{\text{C}}$,　$\boxed{\text{B}}\boxed{\text{D}}$

$\boxed{\text{C}}\boxed{\text{A}}$,　$\boxed{\text{C}}\boxed{\text{B}}$,　$\boxed{\text{C}}\boxed{\text{D}}$

$\boxed{\text{D}}\boxed{\text{A}}$,　$\boxed{\text{D}}\boxed{\text{B}}$,　$\boxed{\text{D}}\boxed{\text{C}}$



$$\boxed{n\text{ 通り}} \times \boxed{n-1\text{ 通り}} \times \boxed{n-2\text{ 通り}} \times \cdots \times \boxed{n-r+1\text{ 通り}}$$

★　組合せ

組合せ(くみあわせ) $=$ n 個のものから r 個とった組の数.

$$ {}_nC_r \times r! = {}_nP_r \qquad \therefore \qquad {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{n}{r}\frac{n-1}{r-1}\frac{n-2}{r-2}\cdots\frac{n-r+2}{2}\frac{n-r+1}{1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

[Ex] 2.　A, B, C, D の文字の書いたカード 4 枚の中から 2 枚取りだすとき，その取り出し方の数.

$$ {}_4C_2 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = \underline{\underline{6\text{ 通り}}}$$

組合せ　$\{\boxed{A}, \boxed{B}\}$　$\{\boxed{A}, \boxed{C}\}$　$\{\boxed{A}, \boxed{D}\}$

↙ ↘　↙ ↘　↙ ↘

順列　$\boxed{A}\boxed{B}$ $\boxed{B}\boxed{A}$　$\boxed{A}\boxed{C}$ $\boxed{C}\boxed{A}$　$\boxed{A}\boxed{D}$ $\boxed{D}\boxed{A}$

組合せ　$\{\boxed{B}, \boxed{C}\}$　$\{\boxed{B}, \boxed{D}\}$　$\{\boxed{C}, \boxed{D}\}$

↙ ↘　↙ ↘　↙ ↘

順列　$\boxed{B}\boxed{C}$ $\boxed{C}\boxed{B}$　$\boxed{B}\boxed{D}$ $\boxed{D}\boxed{B}$　$\boxed{C}\boxed{D}$ $\boxed{D}\boxed{C}$

★　円順列

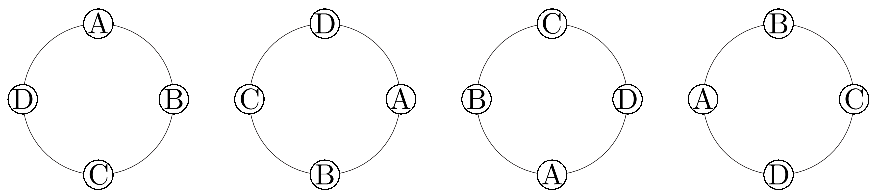
円順列 $=$ n 個のもの異なるを円形に並べる並べ方.

$$\boxed{(n-1)!}$$

[Ex] 3.　A, B, C, D の 4 人の子供が手をつないで輪をつくるつくり方.

$$(4-1)! = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = \underline{\underline{6\text{ 通り}}}, \qquad \frac{{}_4P_4}{4} = 3!$$

この場合，回転させると一致する並べ方は同じものである．つぎのページの図の 4 個は同じもの.



★ 重複順列

じゅうふくじゅんれつ
重複順列 $= n$ 個の異なるものを，くり返して用いることを許して r 個とった並べ方.

$$\boxed{n^r}$$

[Ex] 4. A, B, C, D の文字をくり返して用いたときできる 3 列の文字列..

$4^3 = \underline{\underline{64\text{ 通り}}}$

$$\boxed{4\text{ 通り}}\times\boxed{4\text{ 通り}}\times\boxed{4\text{ 通り}}$$

★ 同じものを含む順列

同じものを含む順列 = a が p 個，b が q 個，c が r 個の合計 n 個のものがあるとき，これらすべてを 1 列に並べる並べ方.

$$\boxed{\frac{n!}{p!q!r!} \qquad (p+q+r=n)}$$

[Ex] 5 a，a，b，b，b の 5 文字を並べた順列.

$$\frac{5!}{2!3!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = \underline{\underline{10\text{ 通り}}}$$

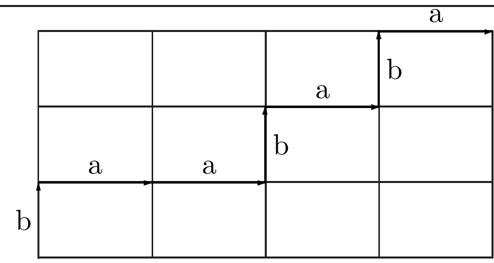
$aabbb$,　$ababb$,　$abbab$,　$abbba$

$baabb$,　$babab$,　$babba$

$bbaab$,　$bbaba$,　$bbbaa$

例 44

右の図のような道のある町がある．この町の A 地点から B 地点へ行く最短の道順は何通りあるか．



【解】 前ページの図で，右へ 1 区画進む道筋を a，上へ 1 区画進む道筋を b で表す．例えば図の矢印で示した道順は $baababa$ という順列で表せる．したがって，A から B にいたる道順の総数は a 4 個，b 3 個を並べた順列の数に等しい．

$$\frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\underline{35 \text{ 通り}}}$$

★　二項定理

二項定理（にこうていり）

$$(x+y)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1}y + {}_nC_2 x^{n-2}y^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} xy^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^{n-k} y^k$$

ただし，${}_nC_0 = 1$

展開公式

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1 \\
(x+y)^1 &= x+y \\
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 * y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4
\end{aligned}$$

パスカルの三角形

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

例 45 次の問題文中の **A** から **B** には，それぞれ –（負号，minus sign）か 0 ∼ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

整式

$$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^7$$

において x^3 の係数（coefficient）は $\boxed{\mathbf{AB}}$ であり，x^6 の係数は **C** である．

（日留試）

【解】 (i) x^3 の係数は

$$
\begin{aligned}
1+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3 &= 1+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1}+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} \\
&= 1+4+10+20+35=\underline{\underline{70}}
\end{aligned}
$$

パスカルの三角形の上から 4 段目の 1 から斜め下に足していけばよい．
(ii) x^6 の係数は

$$1+7=\underline{8}$$

これもパスカルの三角形の上から 7 段目の 1 から斜め下に足していく．

（AB の【答】70，C の【答】8）

9–2　確率

≪ この節で学ぶこと ≫

[**起こり得る場合の数，確率，マトリックス型確率，ツリー型確率，重複試行の確率，期待値**]

★　起こり得る場合の数

図や表をうまく利用して数える．

例 46　次の問題文中の **A** から **D** には，それぞれ –（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

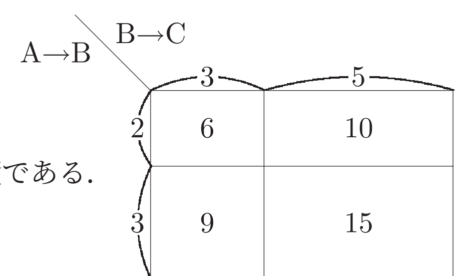
A 市と B 市を結んでいる鉄道は 2 路線，バスは 3 路線ある．また，B 市と C 市を結んでいる鉄道は 3 路線，バスは 5 路線ある．

(1)　A 市から B 市を経て C 市まで行く行き方は $\boxed{\textbf{AB}}$ 通りある．

(2)　A 市から B 市を経て C 市まで行くとき，少なくとも 1 回はバスに乗る行き方は $\boxed{\textbf{CD}}$ 通りである．

（日留試）

【解】 A→B の路線のとり方と B→C の路線のとり方は**独立**（それぞれの結果の起こり方は互いに影響されない）であるから，何通りかは，それぞれ，縦と横の辺の長さで表せる．A→B→C は面積で表せる．



(1) すべての場合であるから，長方形全体の面積である．

$$5 \times 8 = \underline{\underline{40\text{ 通り}}}$$

(2) 全くバスを使わない場合以外（**余事象**という）である．

A→B も B→C も鉄道の場合が左上に分割された長方形，面積 6 であるから，

$$40 - 6 = \underline{\underline{34\text{ 通り}}}$$

（AB の【答】40，CD の【答】34）

★ 確率

事象 A の起こり得る確率（かくりつ）

$$P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こり得る場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

★ マトリックス型の確率

起こり得る場合の数を調べるのに，縦横の表を書くとよいとき．

例 47 次の問題文中の **A** から **E** には，それぞれ –（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

一つのサイコロ（dice）を 2 回投げる．

(1) 2 回とも同じ目が出る確率は $\dfrac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}}$ である．

(2) 出る目の数の最大値が 3 となる確率は $\dfrac{\boxed{\mathbf{C}}}{\boxed{\mathbf{DE}}}$ である．ただし，2 回とも 3 が出る場合も含める．

（日留試）

【解】 (1)

1 回目 ＼ 2 回目	1	2	3	4	5	6
1	○		×			
2		○	×			
3	×	×	⊗			
4				○		
5					○	
6						○

1 回目と 2 回目に出る目の組合せを表にすると，さいの目の出方は 36 通り．同じ目になる場合に○印を記入すると左表になる．(○印は 6 個)

求める確率は，表より

$$\frac{6}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

(A の【答】1，B の【答】6)

(2) 最大が 3 となる場合を × 印で記入すると，左の表のようになる．(× 印の数は 5 個)
求める確率は，表より

$$\underline{\underline{\frac{5}{36}}}$$

(C の【答】5，DE の【答】36)

問 50　次の問題に対して，選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい．

2 個のサイコロ（dice）を同時に投げるとき，1 か 2 の目（pip）が少なくても一つは出る確率（probability）は $\boxed{\mathbf{A}}$ である．

① $\frac{7}{18}$　② $\frac{4}{9}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{11}{18}$

（日留試試行）

★　ツリー型の確率

起こり得る場合の数を調べるのに，ツリーを書くとよいとき．

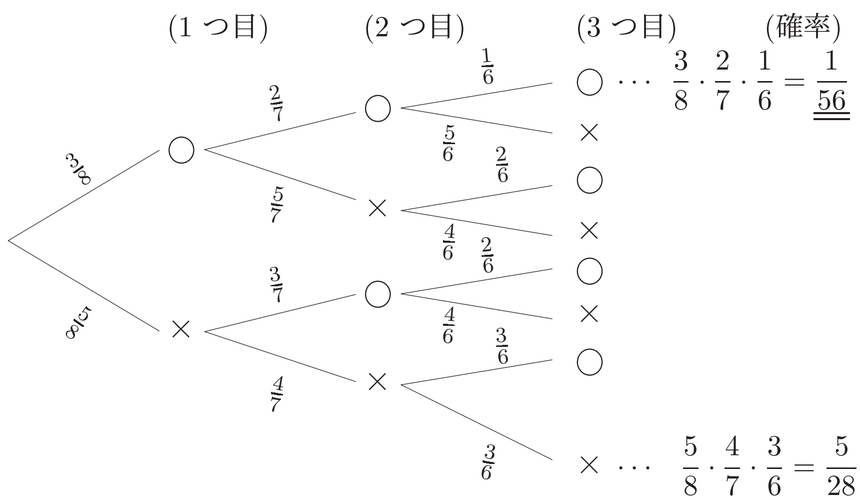
例 48　次の問題文中の **A** から **G** には，それぞれ –（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

白球 5 個と赤球 3 個が入っている袋から，3 個の球を同時に取りだす．

(1)　3 個とも赤球である確率（probability）は $\dfrac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{BC}}}$ である．

(2)　少なくとも 1 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\mathbf{DE}}}{\boxed{\mathbf{FG}}}$ である．

【解】 赤球を ◯，白球を × で表し，Tree を描くとつぎのページの図となる．



(1) Tree の 1 番上の確率：$\underline{\underline{\frac{1}{56}}}$

(2) Tree の 1 番下が余事象であるから，求める確率は

$$1-\frac{5}{28}=\underline{\underline{\frac{23}{28}}}$$

（A の【答】1，BC の【答】56，DE の【答】23， FG の【答】28）

問 51 次の問題に対して，選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい．

赤い球（ball）2 個と白い球 3 個が入った箱から，球を一つずつ取りだす取り出す操作を 4 回くり返す．ただし，一度取り出した球は箱には返さないものとする..

(1) 取り出した球の中に，赤い球が 2 個含まれている確率（probability）は $\boxed{\textbf{A}}$ である．

(2) 最初に取り出した球が白い球であるという条件の下で，取り出した 4 個の球の中に赤い球が 2 個含まれている「条件つき確率（conditional probability）は $\boxed{\textbf{B}}$ である．

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{2}{3}$

（日留試試行）

★　重複試行の確率

重複試行 = 同じ操作をくり返し行うこと.

重複試行の確率
${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$

[Ex] 1.　サイコロを 5 回投げて，3 以上の数が 2 回出る確率.

$$ {}_5C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{40}{243}}} $$

★　期待値

期待値（きたいち）$= \sum_k kp_k$ (得点 $X = k$ の確率 p_k)

[Ex] 2.　くじの総本数は 1 万本．当たりくじの賞金と本数は表の通り.

	賞金（円）	本数
1 等	100 万	1
2 等	50 万	2
3 等	10 万	5

このくじを 1 本引くときの賞金の期待値.

$$ 100\text{ 万} \times \frac{1}{1\text{ 万}} + 50\text{ 万} \times \frac{2}{1\text{ 万}} + 10\text{ 万} \times \frac{5}{1\text{ 万}} = \underline{\underline{250\text{ 円}}} $$

解答

第 1 章

問 1

(1) $A+B=11x^2-6x-4$, $A-B=-3x^2+2x+12$

(2) $A+B=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{6}$, $A-B=-\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{6}$

問 2

(1)(a) $x^3-6x^2+12x-8$ (b) $x^5-9x^4+31x^3-50x^2+36x-8$

(2)(c) x^2-a^2 (d) $x^6-3a^2x\ 4+3a^4x^2-a^6$

(3)(e) $y-z$ (f) $y^2-2yz+z^2$ (g) $x^2-y^2+2yz-z^2$

問 3

(1) $(3x-4)(x+2)+9$ (2) $(x^2+2x-1)(2x+1)$ (3) $4(x+2)-13$

問 4

(1) $\dfrac{3x}{(x-2)(x+1)}$ (2) $\dfrac{1}{x+1},\ (x\neq 1)$ (3) $x(x-4),\ (x\neq -1)$ (4) $\dfrac{x+7}{x},\ (x\neq -2,\ 7)$

問 5

(1) $\dfrac{11}{3}$ (2) -13

問 6

(1) $\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{15}+\sqrt{5}}=2\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2$, $\sqrt{x^2+y^2}=4\sqrt{7}$

問 7

(1) $(a+c)(a-b-c)$ (2) $(ab-1)^2$ (3) $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

(4) $(x-3)(6x+5)$ (5) $(x-3)(x^2+3x+9)$ (6) $(x+1)(x+2)(x-3)$

第 2 章

問 8

(1) AB：-1, C：4, DE：-3, F：1 (2) G：1, H：4, I：3

問 9

A：②, B：①, C：①, D：③

$\boxed{\textbf{問 10}}$

max：$f(4) = 6$,　min：$f(1) = -3$

$\boxed{\textbf{問 11}}$

A：①

$\boxed{\textbf{問 12}}$

$\dfrac{1}{2}(3 + \sqrt{7}i)$

$\boxed{\textbf{問 13}}$

$\alpha + \beta = -\dfrac{3}{2}$,　$\alpha\beta = -\dfrac{7}{2}$,　$D > 0$,　$\alpha\beta < 0$ より，1 つの解は負，他の解は正.

第 3 章

$\boxed{\textbf{問 14}}$

(1)　$-2 < x < 3$　　(2)　$x \leqq -2$　or　$x \geqq 3$

$\boxed{\textbf{問 15}}$

$3a^2(a-b) - (a^3 - b^3) = 3a^2(a-b) - (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
$= (a-b)(2a^2 - ab - b^2) = (a-b)^2(2a+b) \geqq 0$

$$\therefore\ a^3 - b^3 \leqq 3a^2(a-b),\ \text{等号の成立は}\ a = b \quad (\text{Q. E. D.})$$

$\boxed{\textbf{問 16}}$

A：②，B：③，C：①

第 4 章

$\boxed{\textbf{問 17}}$

$\boxed{\text{Ex}}$ 1：n,　$\boxed{\text{Ex}}$ 2(a)：$2n-1$,　(c)：n^2,　$\boxed{\text{Ex}}$ 4(a)：2^{n-1},　$\boxed{\text{Ex}}$ 5：$\dfrac{100}{n+1}$

$\boxed{\textbf{問 18}}$

$\boxed{\text{Ex}}$ 1：$a_1 = 1$,　$d = 1$,　$\boxed{\text{Ex}}$ 2(a)：$a_1 = 1$,　$d = 2$

$\boxed{\textbf{問 19}}$

$a_1 = 256$,　$r = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\textbf{問 20}}$

$\boxed{\text{Ex}}$ 1：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$,　$\boxed{\text{Ex}}$ 2：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$,　$\boxed{\text{Ex}}$ 3：$\displaystyle 2560\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$\boxed{\textbf{問 21}}$

$\dfrac{1}{2}N\{1 + (2N-1)\} = N^2$

問 22

$\dfrac{3}{4}(5^n-1)$

問 23

AB：41,　CDE：546

問 24

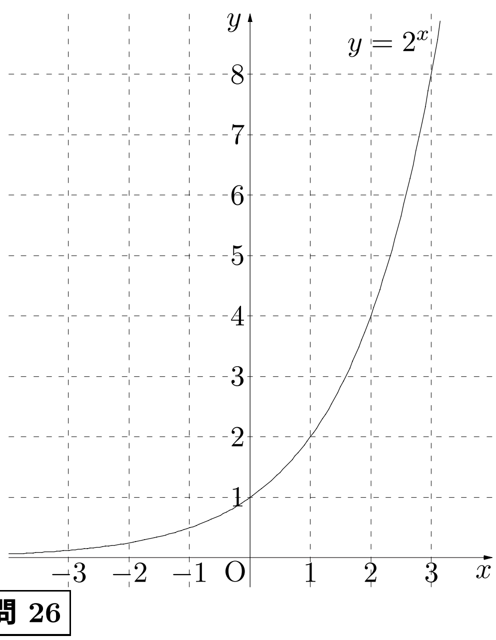
$$\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=4$$

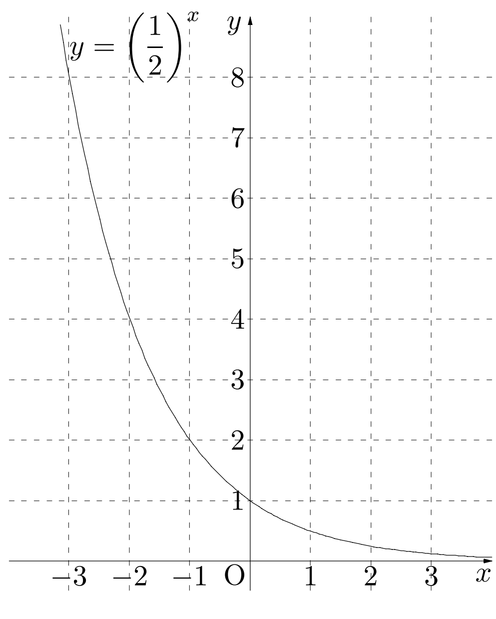
第 5 章

問 25

[表]

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=2\ -x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$





問 26

A：2,　BC：-1

問 27

(1) 27　(2) $\dfrac{3}{4}$　(3) 6　(4) $\dfrac{7}{3}$

問 28

$x=3$

第 6 章

問 29

[表 1]

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$0°$	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	∞

問 30

ABC：153,　DE：19,　FG：57

問 31

[表 2]

x 度	x 度	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$-360°$	$0°$	0	1	0
$-330°$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$-315°$	$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$-300°$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$-270°$	$90°$	1	0	$\pm\infty$
$-240°$	$120°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$-225°$	$135°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$-210°$	$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$-180°$	$180°$	0	-1	0
$-150°$	$210°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$-135°$	$225°$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$-120°$	$240°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$-90°$	$270°$	-1	0	$\pm\infty$
$-60°$	$300°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$-45°$	$315°$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$-30°$	$330°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$0°$	$360°$	0	1	0

問 32

$x=210°$　or　$330°$

問 33

(1) $z = 1 + i,\ |z| = \sqrt{2},\ 45°$ [図 1]

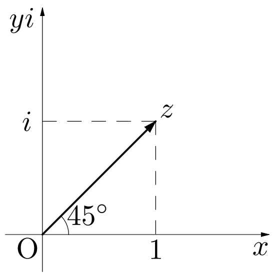


図 1：z の図

(2)(a) $2z$ [図 2]

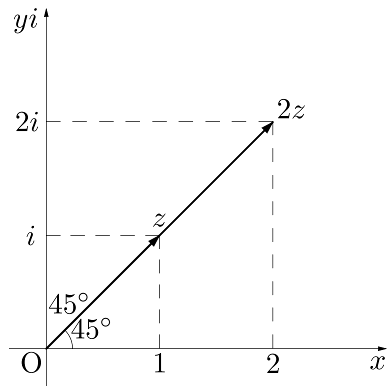


図 2：$2z$ の図

(b) $z + \overline{z} = 2$ [図 3]

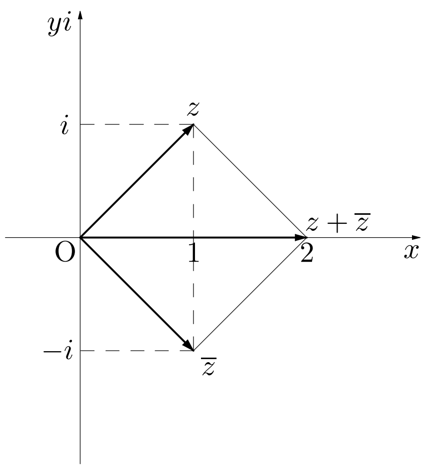


図 3：$z + \overline{z}$ の図

(c) $z^2 = 2i$ [図 4]

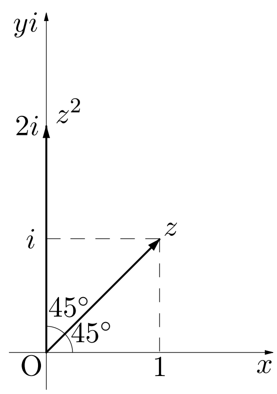


図 4：z^2 の図

(d) $\dfrac{z}{\overline{z}} = i$ [図 5]

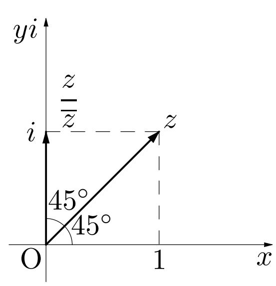


図 5：$\dfrac{z}{\overline{z}}$ の図

問 34

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

問 35

A 2, BC 60, DE 30, F 2

第 7 章

問 36

(1) $6\sqrt{2}$ (2) $(1,\,6)$ (3) $(0,\,5)$ (4) $(10,\,15)$

問 37

(1) $y = \sqrt{3}x + 1 - 3\sqrt{3}$ (2) $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$

問 38

(1) $y = -3x + 1$ (2) $y = 2x - 4$

問 39

$$\frac{2}{5}$$

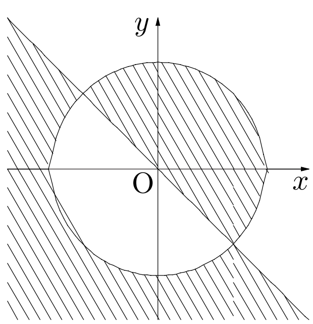
問 40

$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

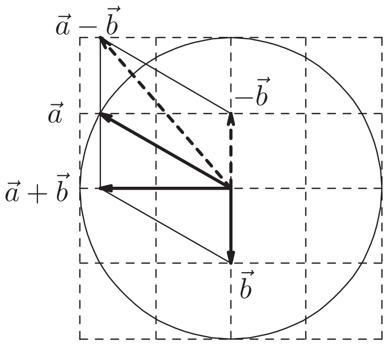
問 41

ABC 435, DEF 321

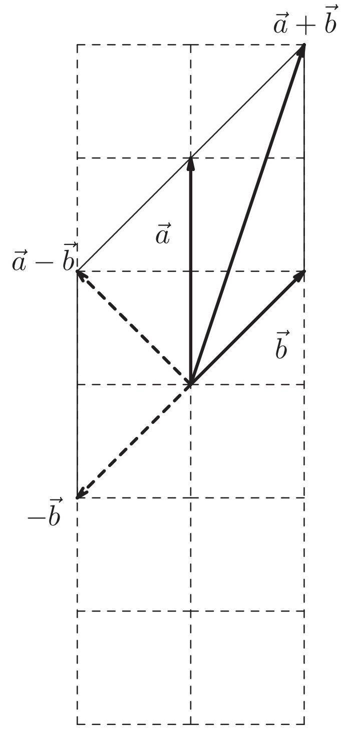
問 42



問 43



(a)



(b)

問 44

(a)(1) $(-\sqrt{3},\ 0)$ (2) $(-\sqrt{3},\ 2)$ (3) $(-1,\ \sqrt{3})$

(b)(1) $(1,\ 3)$ (2) $(-1,\ 1)$ (3) $(1,\ 0)$

第 8 章

問 45

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$(x+h)^3 - x^3 = (x^3+3hx^2+3h^2x+h^3) - x^3 = 3hx^2+3h^2x+h^3$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(3x^2+2hx+h^2) = 3x^2 \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

問 46

AB -3 CD 24 E 1 FG -8

問 47

$$\int_0^h f(x)dx = \int_0^h \left(\frac{b-a}{h}x + a\right) dx$$

$$= \left[\frac{b-a}{2h}x^2 + ax\right]_0^h = \frac{1}{2}(a+b)h \quad \text{(Q. E. D.)}$$

問 48

A 3

問 49

$$\int_{-1}^3 \{(2x-1) - (x^2-4)\}dx = \frac{32}{3}$$

第 9 章

問 50

A ④

問 51

A ④　B ③