第5章 3 次元ベクトル・行列

5–1　2 次元ベクトルから 3 次元ベクトルへ

≪ この節で学ぶこと ≫

[3 次元ベクトル，内積，空間座標]

★　3 次元ベクトル

3 次元ベクトルの成分表示：$\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z),\ \vec{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z),\ \cdots$

内積：$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$

ベクトルの大きさ：$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

2 つのベクトルの間の角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$

$(a = |\vec{a}|,\ b = |\vec{b},\ |\theta$:$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角) は 2 次元のときと同じ．ただし,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

★　空間座標

空間における点 P は 3 つの実数の組 $(x,\ y,\ z)$ で表す.

位置ベクトル：$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{r} = (x,\ y,\ z)$

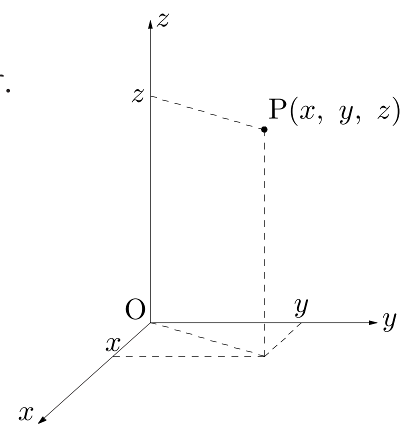


図 5.1:

【1】始点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，終点 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ のベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

【2】**内分点・外分点**：P

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n} = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1 + my_2}{m+n},\ \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}\right)$$

P が AB の中点のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2},\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

【3】**直線**：$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{x}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，

$$\vec{x} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

は同じ，ただし，この式を媒介変数表示になおすと，

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = (1-t)z_1 + tz_2 = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

★　平面の方程式と球の方程式

同じベクトル式でも 2 次元と 3 次元では意味が変わる場合.

【1】**直線の方程式** $\longmapsto$ **平面の方程式**

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0,\quad \vec{p}\text{: 定点},\ \vec{n}\text{: 法線ベクトル}$$

(i) 2 次元：$\vec{n} = (a,\ b)$，$\vec{p} = (x_0,\ y_0)$，$\vec{x} = (x,\ y)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad c = -(ax_0 + by_0) \text{ とおくと，}$$

直線の方程式：$ax + by + c = 0$

(ii) 3 次元： $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$, $\vec{p} = (x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\vec{x} = (x,\ y,\ z)$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ とおくと，

平面の方程式：$ax + by + cz + d = 0$

【2】円の方程式 $\longmapsto$ 球の方程式

$|\vec{x} - \vec{c}| = r \iff (\vec{x} - \vec{c}) \cdot (\vec{x} - \vec{c}) = r^2$,$\vec{c}$: 中心，$r$：半径

(i) 2 次元： $\vec{c} = (x_0,\ y_0)$, $\vec{x} = (x,\ y)$

円の方程式：$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

(ii) 3 次元： $\vec{c} = (x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\vec{x} = (x,\ y,\ z)$

球の方程式：$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

例 15

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 1,\ 2)$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ -1,\ 0)$ を 2 辺とする三角形 ABC について，頂角 A の角度（∠BAC）と，中線 AM の長さを求めよ．

（岐阜大）

【解】 $\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC}}$

$$= \frac{-2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

頂角：$\angle\mathrm{BAC} = \underline{\underline{\dfrac{3}{4}\pi}}$

（三角形の頂点と対辺の中点を結んだ直線を**中線**という．）

BC の中点を M とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

$$= \frac{1}{2}(-2 + 1,\ 1 - 1,\ 2 - 0) = \frac{1}{2}(-1,\ 0,\ 2)$$

$$\mathrm{AM} = |\overrightarrow{\mathrm{AM}}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}$$

中線の長さ：AM$=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}}$

例 16　$\vec{a}=(3,\ 1,\ -2)$,$\vec{b}=(s+1,\ -t+3,\ -2t-2)$,$\vec{c}=(1-u,\ u^2+1,\ u-1)$ とする．このとき以下に答えよ．
(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行となるように s と t の値を定めよ．
(2) $\vec{a}$ を $\vec{c}$ が垂直となるように u の値を定めよ．

（青山学院大）

【解】　(1) $\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a},\quad (k：定数)$

$$\iff \begin{cases} s+1=3k \\ -t+3=k \\ -2t-2=-2k \end{cases}$$

$$\iff k=2,\ \underline{\underline{t=1,\ s=5}}$$

(2) $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\iff 3(1-u)+(u^2+1)-2(u-1)=0 \iff (u-2)(u-3)=0$$

$$\iff \underline{\underline{u=2,\ \text{or } 3}}$$

例 17

次の問題文中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ニ}}$ には，それぞれ，英文字，–（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る。適するものを選びなさい.

一辺の長さが 1 の図 2 のような立方体 ABCD–A'B'C'D' において，AB, CC', D'A' を $a : 1-a$ に内分する点をそれぞれ P, Q, R とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{x}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{y}$, $\overrightarrow{\mathrm{AA'}} = \vec{z}$ とおく．ただし，$0 < a < 1$ とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(\boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\right)\vec{x} + \vec{y} + \boxed{\text{ウ}}\,\vec{z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \boxed{\text{エオ}}\,\vec{x} + (1-a)\vec{y} + \vec{z}$$

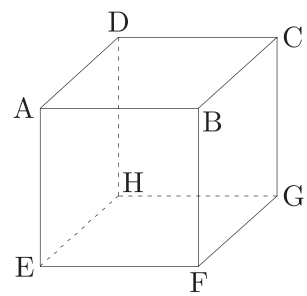


図 5.2:

となる．したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| : |\overrightarrow{\mathrm{PR}}| = 1 : \boxed{\text{カ}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = \boxed{\text{キ}}\left(a^2 - a + \boxed{\text{ク}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} = a^2 - a + \boxed{\text{ケ}}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ のなす角は $\boxed{\text{コサ}}^\circ$ である.

(2) 三角形 PQR の重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}} = \frac{\boxed{\text{シ}} + \boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}(\vec{x} - \vec{y} + \vec{z})$$

である.
いま，辺 C'D' 上に SQ=SR となるように点 S をとる.
このとき $\overrightarrow{\mathrm{C'S}} = \boxed{\text{ソ}}\,\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{SD}} = \left(\boxed{\text{タ}} - \boxed{\text{チ}}\right)\vec{x} - \vec{z}$$

である.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{SG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ が垂直であるとき，a の値は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ であり，

$\angle\mathrm{QSR} = \boxed{\text{トナニ}}^\circ$ となる.

【解】　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = a\vec{x}$（図 3）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{x} + \vec{y} \\ \overrightarrow{\mathrm{AC'}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CC'}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AA'}} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\end{aligned}$$

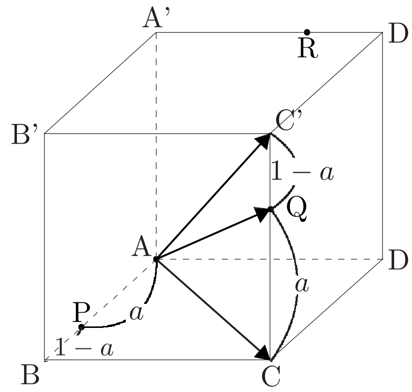


図 5.3:

点 Q は CC' の内分点（図 3）.

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{AC}} + a\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$$

$$= (1-a)(\vec{x}+\vec{y}) + a(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}$$

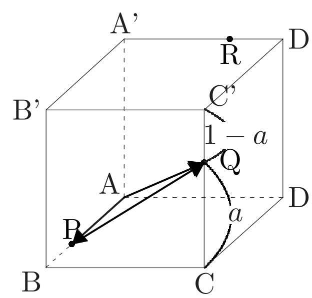


図 5.4:

図 4 より,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$= (\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}) - a\vec{x} = \underline{\underline{(1-a)\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}}}$$

同様に,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD'}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DD'}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AA'}} = \vec{y} + \vec{z}\end{aligned}$$

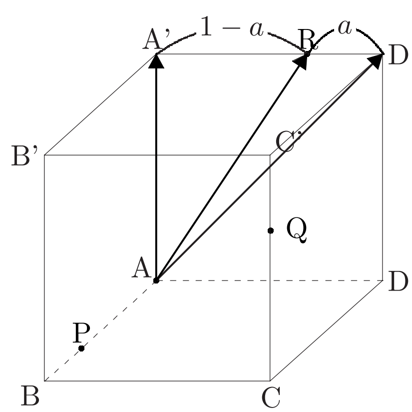


図 5.5:

点 R は D'A' の内分点（図 5）.

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{AD'}} + a\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$$

$$= (1-a)(\vec{y}+\vec{z}) + a\vec{z} = (1-a)\vec{y}+\vec{z}$$

図 6 より,

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{AR}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$= \{(1-a)\vec{y}+\vec{z}\} - a\vec{x} = \underline{\underline{-a\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}}}$$

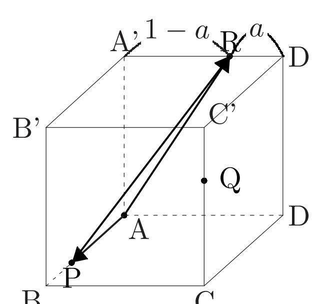


図 5.6:

$\triangle$APQ $\equiv$ $\triangle$APR より，PQ=PR.

$$\therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| : |\overrightarrow{\mathrm{PR}}| = 1 : \underline{\underline{1}}$$

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= \{(1-a)\vec{x}\}^2+\{\vec{y}\}^2+\{a\vec{z}\}^2=(1-a)^2\cdot 1+1+a^2\cdot 1\\
&= (1-2a+a^2)+1+a^2=\underline{\underline{2(a^2-a+1)}} \ = \ |\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \{(1-a)\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}\}\cdot\{-a\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}\}\\
&= -a(1-a)\{\vec{x}\}^2+(1-a)\{\vec{y}\}^2+a\{\vec{z}\}^2\\
&= -a(1-a)+(1-a)+a \ = \ \underline{\underline{a^2-a+1}}
\end{aligned}
$$

$$
\cos\angle\mathrm{QPR}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\frac{a^2-a+1}{2(a^2-a+1)}=\frac{1}{2}
$$

$$
\therefore\ \angle\mathrm{QPR}=\underline{\underline{60^\circ}}
$$

（**ア** $-$ **イ** の【答】$1-a$, **ウ** の【答】a, **エオ** の【答】$-a$, **カ** の【答】1
キ $(a^2-a+$**ク**$)$ の【答】$2(a^2-a+1)$, **ケ** の【答】 1, **コサ** の【答】60）

(2) △PQR は (1) の答より正三角形だとわかるが，一般の三角形で頂点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とすると，△ABC の**重心**(じゅうしん)の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$
\boxed{\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}
$$

と表される．

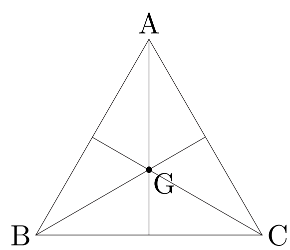


図 5.7: 三角形の重心

$$
\begin{cases}
\overrightarrow{\mathrm{AP}}=a\vec{x}\\
\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}\\
\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-a)\vec{y}+\vec{z}
\end{cases}
$$

より，点 A から見た △PQR の重心 G は

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})\\
&= \frac{1}{3}[a\vec{x}+(\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z})+\{(1-a)\vec{y}+\vec{z}\}]\\
&= \frac{1}{3}\{(a+1)\vec{x}+(2-a)\vec{y}+(a+1)\vec{z}\}
\end{aligned}
$$

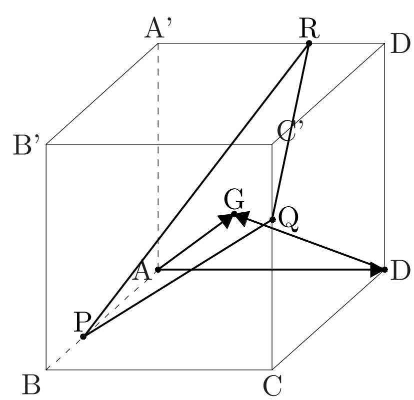


図 5.8:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DG}} &= \overrightarrow{\mathrm{AG}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \frac{1}{3}\{(a+1)\vec{x} + (2-a)\vec{y} + (a+1)\vec{z}\} - \vec{y} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}(a+1)(\vec{x} - \vec{y} + \vec{z})}}\end{aligned}$$

($\dfrac{\textbf{シ}+\textbf{ス}}{\textbf{セ}}$ の【答】$\dfrac{a+1}{3}$ or $\dfrac{1+a}{3}$)

直角三角形 $\triangle \mathrm{QC'S} \equiv \triangle \mathrm{RD'S}$ より，C'S=D'R$= a$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{C'S}} = \underline{\underline{a\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}}} = -a\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

図 9 より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{SD}} &= \overrightarrow{\mathrm{C'C}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{C'S}} \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AA'}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} + a\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= -\vec{z} - \vec{x} + a\vec{x} \ = \ \underline{\underline{(a-1)\vec{x} - \vec{z}}}\end{aligned}$$

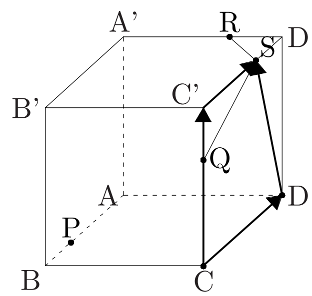


図 5.9:

(**ソ** の【答】a, **タ** – **チ**の【答】$a-1$)

(3) 前問 (2) の答より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{SG}} &= \overrightarrow{\mathrm{SD}} + \overrightarrow{\mathrm{DG}} \\ &= \{(a-1)\vec{x} - \vec{z}\} + \frac{1}{3}(a+1)(\vec{x} - \vec{y} + \vec{z}) \\ &= \frac{4a-2}{3}\vec{x} - \frac{a+1}{3}\vec{y} + \frac{a-2}{3}\vec{z}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{DG}} \iff \overrightarrow{\mathrm{SG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DG}} = 0$$

$$\begin{aligned}9\overrightarrow{\mathrm{SG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DG}} &= \{(4a-2)\vec{x} - (a+1)\vec{y} + (a-2)\vec{z}\} \cdot \{(a+1)(\vec{x} - \vec{y} + \vec{z})\} \\ &= (a+1)\{(4a-2) + (a+1) + (a-2)\} \\ &= 3(a+1)(2a-1) \ = \ 0, \quad (0 < a < 1)\end{aligned}$$

$$\therefore\ a = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{SQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{SC'}} + \overrightarrow{\mathrm{C'Q}} \\
&= -\overrightarrow{\mathrm{C'S}} + (1-a)\overrightarrow{\mathrm{C'C}} \\
&= -a\overrightarrow{\mathrm{AB}} - (1-a)\overrightarrow{\mathrm{AA'}} \\
&= a\vec{x} + (a-1)\vec{z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{SR}} &= \overrightarrow{\mathrm{SD'}} + \overrightarrow{\mathrm{D'R}} \\
&= (1-a)\overrightarrow{\mathrm{C'D'}} + a\overrightarrow{\mathrm{D'A'}} \\
&= -(1-a)\overrightarrow{\mathrm{AB}} - a\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\
&= (a-1)\vec{x} - a\vec{y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\angle\mathrm{QSR} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{SQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{SQ}}||\overrightarrow{\mathrm{SR}}|} \\
&= \frac{a(a-1)}{(a-1)^2+a^2}, \quad \left(a=\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\therefore\ \angle\mathrm{QSR} = \underline{\underline{120^\circ}}$

（$\dfrac{\text{ツ}}{\text{テ}}$ の【答】$\dfrac{1}{2}$, **トナニ** の【答】120）

5–2　行列

≪ この節で学ぶこと ≫

[$(m,\ n)$ **型行列，行列の演算，単位行列，逆行列，ケイレイ・ハミルトンの定理**]

★　(mn) 型行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

のように 6 個の数を 2 行 3 列に並べたものを (23) 型行列，一般に，mn 個の数を m 行 n 列に並べたものを (mn) **型行列**と呼ぶ．それぞれの数をその行列の**成分**という．その中で (nn) 型の行列を n **次正方行列**（せいほうぎょうれつ），$(m1)$ 型の行列を m 次元**縦**（たて）**ベクトル**，$(1n)$ 型の行列を n 次元**横**（よこ）**ベクトル**という.（これまで考えて来た数ベクトルを縦横 2 種類に分けて考える.）以下，ここではおもにその中で比較的かんたんな 2 次正方行列：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

を取りあつかう．大文字 $A, B, \cdots$ は行列を，小文字や添え字つき小文字は成分を表すのに使う.（i 行 j 列成分を a_{ij} と表す.）

★　行列の演算

【1】<u>行列の加法</u>

2 つの 2 次正方行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

と表したとき，

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

A と B の**和**と言う．

1° ゼロ行列 O

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は，

$$O + A = A$$

が成り立つ行列で，2 次正方行列の**ゼロ行列**である．
2° 行列の減法 $A - B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{に対して,} \quad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

は**負の行列**であり，これを用いると**行列の減法**は，

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$$

【2】行列の実数倍
　k を実数として，

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

問 11　つぎの計算をせよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

【3】行列の積
1°　(12) 型行列，すなわち，2 次元横ベクトルと (21) 型行列，すなわち，2 次元縦ベクトルの積は

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

これは，ベクトルの**内積**のことである．

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

2°　2 次正方行列 A と 2 次元縦ベクトル $\vec{b}$ の積は，

$$A\vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}$$

掛け算の約束は，答のベクトルの第 1 成分は，A の第 1 行と $\vec{b}$ の第 1 列（1 列しかないが) の積を加える．答のベクトルの第 2 成分は，A の第 2 行と $\vec{b}$ の第 1 列の同様な積算である．

3°　2 次正方行列 A と 2 次正方行列 B の積は，

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

例えば，AB の (21) 成分は，A の第 2 行と B の第 1 列の積を加える．

　これで一般の行列の積の約束もわかったと思うが，もう 1 例見ておこう．

4°　(23) 型行列 A と (32) 型行列 B の積は (22) 型行列となる．

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例えば，AB の (12) 成分は，A の第 1 行と B の第 2 列の積を加える．

　行列の型の組み合わせによっては掛け算の約束が実行できないこともある．

問 12 つぎの計算をせよ.

(1) $(1,\ 2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

（京都産業大）

例 18 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して $L_1 = A$,
$L_n = L_{n-1}B - BL_{n-1}$ $(n = 2,\ 3,\ \cdots)$ とする.

(1) $L_2,\ L_3$ を求めよ.
(2) n が偶数，奇数の場合に応じて，L_n を求めよ.

（都立大）

【解】 (1) $L_2 = L_1B - BL_1 = AB - BA$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{pmatrix}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= L_2B - BL_2 \\
&= \begin{pmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & d-a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d-a & c-b \\ b-c & a-d \end{pmatrix} = \underline{\underline{2\begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & d-a \end{pmatrix}}} = 2L_2B
\end{aligned}$$

(2) $L_4 = L_3B - BL_3 = 2(L_2B - BL_2)B = 2L_3B = 2^2L_2B^2 = 2^2L_2$

$$L_5 = L_4B - BL_4 = 2(L_3B - BL_3)B = 2L_4B = 2^2L_3B,\ \cdots$$

$$\begin{cases} n\text{：偶数のとき}\quad L_n = 2^{n-2}L_2 = \underline{\underline{2^{n-2}\begin{pmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{pmatrix}}} \\ n\text{：奇数のとき}\quad L_n = 2^{n-2}L_2B = \underline{\underline{2^{n-2}\begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & d-a \end{pmatrix}}} \end{cases}$$

[注] 交換法則の不成立 **例 18** で，$AB - BA \neq O$ だったように，行列の積では，一般に

$$AB \neq BA$$

つまり，乗法についての交換法則は成り立たない．

★　単位行列

：E

2 次正方行列において，

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

また，

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

となる．

$$EA = AE = A$$

が成り立つ行列であるので，2 次正方行列の**単位行列**と呼ぶ．数の掛け算の 1 に相当する行列である．

問 13　つぎの行列 J から J^2 および J^{10} を計算をせよ．

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

★　2 元連立 1 次方程式と逆行列

$ad - bc \neq 0$ のとき,

$$2\text{ 元連立 }1\text{ 次方程式}:\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

の解は,

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}, \quad y = \frac{-cp + aq}{ad - bc}$$

であった.

この関係を行列の表記によって見て行こう．2 次正方行列と 2 つの 2 次元縦ベクトルを,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

とおくと，上の連立方程式は 1 つの式で表すことができる.

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

この式は見かけ上，整式による 1 次方程式：$ax = b, (a \neq 0)$ と似ている．1 次方程式であれば，両辺に $a^{-1}\left(= \dfrac{1}{a}\right)$ を掛けることによって，すぐに解：$x = a^{-1}b\left(= \dfrac{b}{a}\right)$ が得られる．対応して，ここで行列 A の **逆行列** A^{-1} を考えてみよう．A^{-1} がどんな行列かは，すでに連立方程式の解から形がわかっている．すなわち,

$$\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} dp - bq \\ -cp + aq \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

であるから,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$A^{-1}A = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

($AA^{-1} = E$ も成り立つ．確めてみよ.）$A\vec{x} = \vec{b}$ の両辺に左から A^{-1} を掛ける.

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}, \quad E\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\therefore \quad \vec{x} = \underline{\underline{A^{-1}\vec{b}}}$$

まとめると,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対する**逆行列**は,

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ のなる行列に対する逆行列は存在しない.

問 14

(1)　つぎの行列の逆行列を求めよ.

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(2)　行列を使ってつぎの連立方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

★　ケイレイ・ハミルトンの定理

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$$

が成り立つ.

例 19 次の問題文中の **A** ～ **H** には，それぞれ，–（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る。適するものを選びなさい．

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

が $A^2 - 4A - E = O$ を満たすとき，$a = \boxed{\textbf{A}}$，$b = \boxed{\textbf{B}}$ である．ここで E は 2 次の単位行列（unit natrix），O は零行列（zero matrix）である．
このとき，A の逆行列 （inverse matrix）は

$$\begin{pmatrix} \boxed{\textbf{CD}} & \boxed{\textbf{E}} \\ \boxed{\textbf{F}} & \boxed{\textbf{GH}} \end{pmatrix}$$

である．

（日留試）

【解】 A にケイレイ・ハミルトンの定理を適用すると，

$$A^2 - (1+b)A + (b-2a)E = A^2 - 4A - E = O$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 + b = 4 \ \ \& \ \ b - 2a = -1$$

$$\Longleftrightarrow \quad a = \underline{\underline{2}} \ \ \& \ \ b = \underline{\underline{3}}$$

$A^2 - 4A - E = O$ に A^{-1} をかけると，

$$\begin{aligned} A^{-1}(A^2 - 4A - E) &= A^{-1}O \\ A - 4E - A^{-1} &= O \\ A^{-1} &= A - 4E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

（A の【答】2，B の【答】3，CD の【答】–3　E の【答】2，F の【答】2，GH の【答】–1）

問 15　次の問題文中の **A** ～ **D** には，それぞれ，－（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る。適するものを選びなさい.

正方行列（square matrix）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

が

$$A^2 + A + E = O$$

を満たすとき，$a = \boxed{\mathbf{AB}}$,　$b = \boxed{\mathbf{CD}}$ である．ただし，E は単位行列（unit natrix），O は零行列（zero matrix）である．
（日留試）

第6章 複素数の極形式

6–1 複素数の極形式と平面図形

≪ この節で学ぶこと ≫
[**極形式，アーギュメント，複素数平面上の距離と角，点の移動**]

★ 極形式

数学（基礎）第 6 章 §3（77 ページ）で複素指数関数を導入した．複素指数関数と三角関数の関係は,

オイラーの公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

指数法則：

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

より，三角関数の加法定理は

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

と指数の和の公式の実部と虚部となっている．

極形式(きょくけいしき)：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)(= re^{i\theta})$

OP$= r$ は複素数 z の絶対値 $|z|$，OP の $+x$ 軸となす角 θ を**アーギュメント** (argument)，あるいは，偏角と呼び

$$\theta = \arg z$$

で表す．複素数平面（ガウス平面）上の点 P の x 座標は $r\cos\theta$，y 座標は $r\sin\theta$ である．

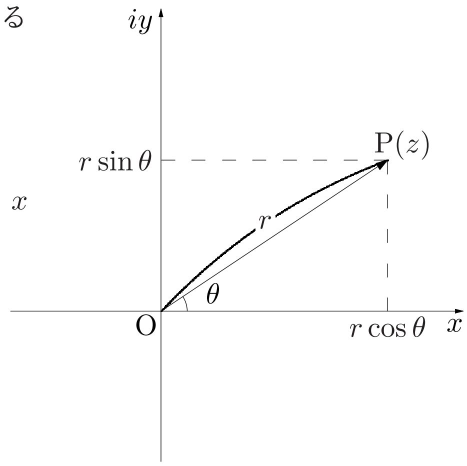


図 6.1: 複素数平面

問 16	次の複素数を極形式で表せ．

(1) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　(2) $1 + i$　　(3) $1 - i$　　(4) $-1 - i$

(5) -2　　(6) $\sqrt{3} - i$　　(7) $-2i$

極形式を用いると，複素数の積は

$$z = re^{i\theta}, \quad w = r'e^{i\theta'}$$

とすると，

$$zw = re^{i\theta} \cdot r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\boxed{|zw| = rr' = |z||w|, \qquad \arg zw = \theta + \theta' = \arg z + \arg w}$$

となる．

複素数平面で，図 2 の点 B(z) と A'(w)，および，B'(zw) の関係は，△OAB, △OA′B′ において，

$$\mathrm{OA} = 1,\ \mathrm{OB} = |z| = r$$
$$\mathrm{OA}' = |w| = r'$$
$$\angle\mathrm{AOB} = \theta,\ \angle\mathrm{AOA}' = \theta'$$
$$\mathrm{OB}' = |zw| = |z||w| = rr'$$
$$\angle\mathrm{AOB}' = \theta+\theta',\ \angle\mathrm{A'OB'} = \theta'$$

だから，z に w を乗じるという操作は，z と 1 とで作られる △OAB を，A′ を w の位置として相似比　r' の相似三角形 △OA′B′ をつくり，B′ 点を求めることに相当する．

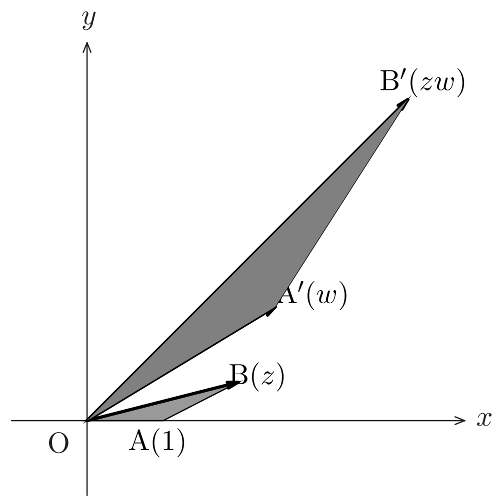


図 6.2: 複素数の乗法

一方，複素数 z の逆数は

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}, \qquad \arg\frac{1}{z} = -\theta = -\arg z}$$

したがって，複素数の商では

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}, \qquad \arg\frac{w}{z} = \arg w - \arg z$$

★　距離と角

【1】2 点 A(z)B(w) 間の距離

$$= |z - w|$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は引き算 $z - w$ に相当するから，その絶対値．

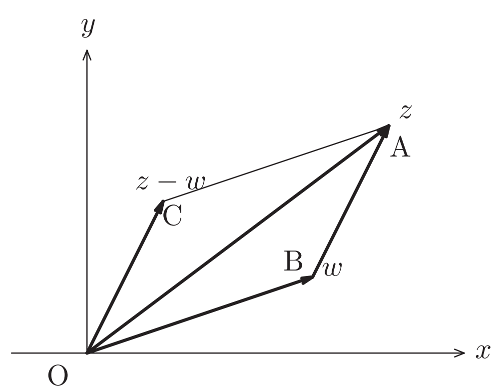


図 6.3: 距離 BA=OC

【2】角 $\angle\mathrm{A}(z)\mathrm{O}(0)\mathrm{B}(w) = \arg\dfrac{z}{w}$

$\angle\mathrm{AOB} = \theta - \theta'$ だから．

★　点の移動

【1】O(0)A(z) を k 倍拡大：kz.（図 4 (a)）
【2】点 A(z) を実軸に関して線対称移動：$\overline{z}$.（図 4 (b)）
【3】点 A(z) を実軸方向に a，虚軸方向に b だけ平行移動：$z+c$，($c=a+bi$).（図 4 (c)）
【4】点 A(z) を原点 O に関して角 α だけ回転：wz，($w=e^{i\alpha}$).（図 4 (d)）

$$wz = re^{i(\theta+\alpha)},\ \ |wz| = |z|,\ \ \arg wz = \theta + \alpha$$

[注] 角 $\angle \mathrm{A}(z)\mathrm{C}(c)\mathrm{B}(w) = \arg \dfrac{w-c}{z-c}$

角 に関する【2】と平行移動 【2】を組み合わせる.（図 4 (e)）

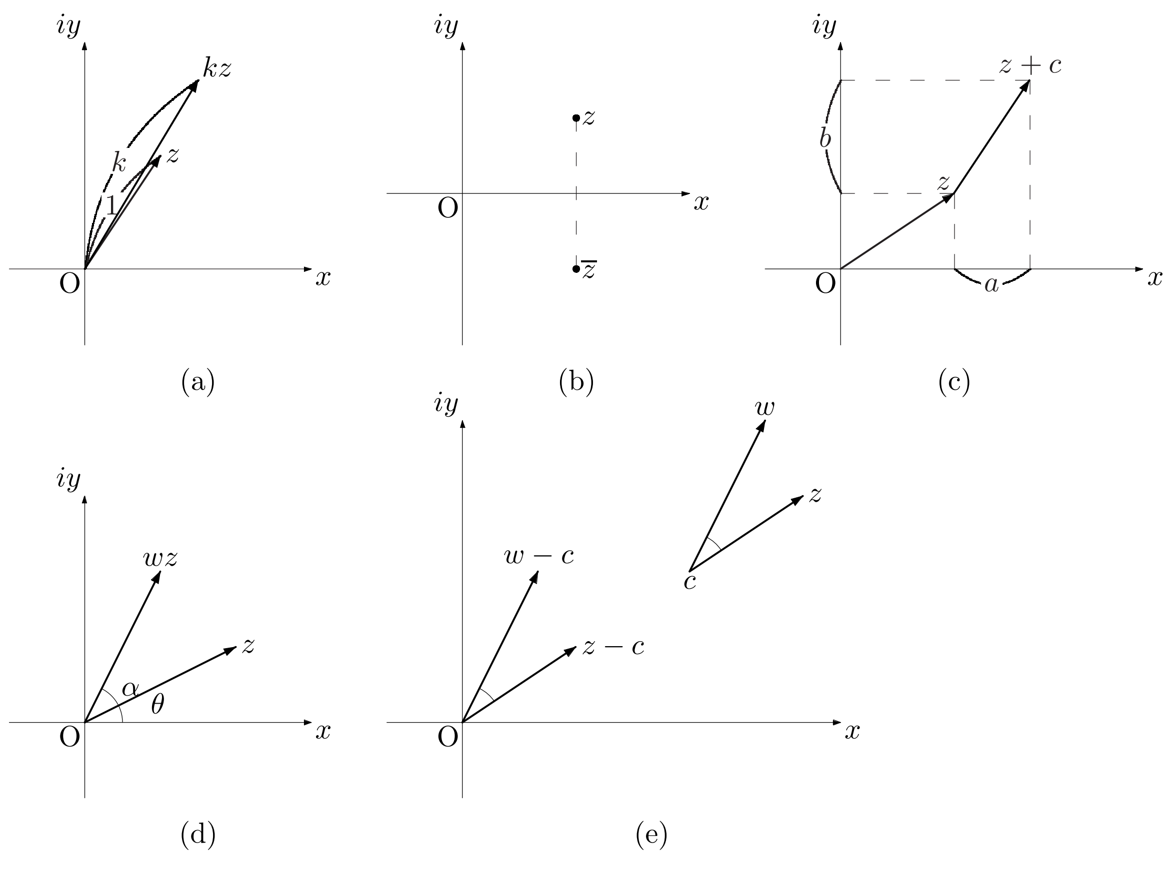


図 6.4:

例 20 複素平面上の 2 点 $\alpha=\sqrt{3}i$, $\beta=1+i$ に対して，点 α を点 β のまわりに 90° だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ.

（東京農工大）

【解】 [注] より，

$$\arg\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=90^\circ$$

$$\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i$$

$$\gamma-\beta=(\alpha-\beta)\times i$$

$$\gamma=\alpha i+\beta(1-i)=\sqrt{3}i^2+(1^2-i^2)=\underline{\underline{2-\sqrt{3}}}$$

6–2　n 次方程式の解

≪ この節で学ぶこと ≫
[**ドゥ・モアブルの定理，1 の n 乗根**]

★　ドゥ・モアブルの定理

$|z| = 1$ の複素数を考える．n を整数として

$$z^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

であるが，これを三角関数の記号を用いて書くと，

ドゥ・モアブルの定理：$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

★　1 の n 乗根

1 の n 乗根（じょうこん）：$z^n = 1$ を満たす複素数.（n：自然数）

Ex $z^3 = 1$ の解.

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$$

であり，2 次方程式 $z^2 + z + 1 = 0$ の解は，解の公式を用い，

$$z = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}i\right)$$

これを用いて，右辺を因数分解して，

$$(z-1)\left\{z - \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}i\right)\right\}\left\{z - \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}i\right)\right\} = 0$$

したがって，この 3 次方程式の解は，

$$z = 1, \quad \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}i\right), \quad \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}i\right)$$

となる．虚数解を極形式で表すと，

$$\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)=\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

$$\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)=\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ$$

であるから，$z^3=1$ の解（1 の 3 乗根）は図 5 のように複素数平面上の単位円に内接する正三角形の頂点になっている．

同様に，$z^n=1$ の解（1 の n 乗根）は複素数平面上の単位円に内接する正 n 角形の頂点になる．

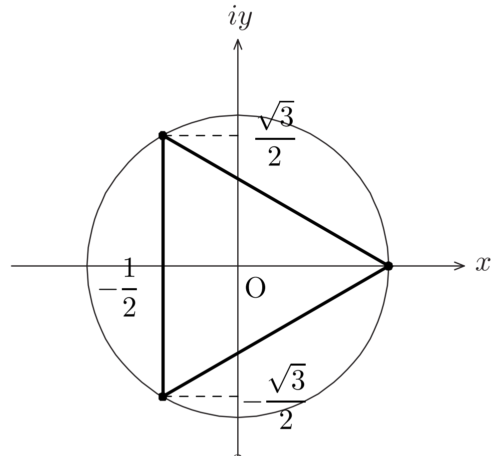


図 6.5: $z^3=1$ の解

例 19

次の問題文中の **A** ∼ **J** には，それぞれ，−（負号，minus sign）か 0 ∼ 9 の数字のいずれか一つが入る。適するものを選びなさい．

方程式

$$z^3 = 2+2i \qquad \cdots ①$$

を解こう
複素数 $2+2i$ を極形式で表すと

$$2+2i=\boxed{\mathbf{A}}\sqrt{\boxed{\mathbf{B}}}\left(\cos\boxed{\mathbf{CD}}^\circ + i\sin\boxed{\mathbf{CD}}^\circ\right)$$

となる．

$$z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおき，① を満たす $r,\ \theta(r>0,\ 0^\circ<\theta\leqq 360^\circ)$ を求めると

$$r=\sqrt{\boxed{\mathbf{E}}}$$

$$\theta = 15^\circ,\ \boxed{\mathbf{FGH}}^\circ,\ 255^\circ$$

となる．
したがって，複素平面上の第 2 象限にある ① の解は $\boxed{\mathbf{IJ}}+i$ である．

【解】　極形式

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}}$$

ドゥ・モアブルの定理：$z^n = r^n(\cos\ n\theta + i\sin\ n\theta)$ を使う。

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$$r^3 = 2\sqrt{2} \quad \therefore\ r = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

$$3\theta = 45^\circ + 360^\circ n, \quad (0^\circ < 3\theta \leqq 3 \times 360^\circ)$$

$$\theta = \underline{\underline{15^\circ,\ 135^\circ,\ 255^\circ}}$$

第 2 象限$\cdots 90^\circ < 135^\circ < 180^\circ$

$$z = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) = \underline{\underline{-1 + i}}$$

（A$\sqrt{\text{B}}$ の【答】$2\sqrt{2}$,　CD の【答】45，E の【答】2　FGH の【答】135
IJ の【答】-1)

第7章 微分法と積分法

7–1　微分法とその応用

≪ この節で学ぶこと ≫

[**積の微分，合成関数の微分，いろいろな関数の導関数，媒介変数表示の関数の導関数，接線の方程式，法線の方程式，関数の増減**]

★　積の微分

$$\boxed{y = f(x)g(x) \text{ のとき，} \quad y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

★　合成関数の微分

$$\boxed{y = f(u),\ u = g(x) \text{ のとき，} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$$

$y = \dfrac{1}{g(x)}$ は，$y = \dfrac{1}{u}$，　$u = g(x)$ とおいて，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du^{-1}}{du}\frac{du}{dx} = -u^{-2}g'(x)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{g(x)} \text{ のとき，} \quad y' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

★　逆関数の微分

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}},\ \text{ただし，}\ \frac{dx}{dy} \neq 0}$$

★　いろいろな関数の導関数

【1】三角関数の導関数

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

【2】指数関数の導関数

$$\boxed{(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \log a}$$

【3】対数関数の導関数

$$\boxed{(\log|x|)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x\log a}, \qquad \textbf{対数微分法}\text{: } (\log|y|)' = \frac{y'}{y}}$$

証明は【2】の第 1 式から $\dfrac{de^{ix}}{dx} = ie^{ix}$

$$(\cos x)' + i(\sin x)' = i(\cos x + i\sin x) = -\sin x + i\cos x$$

$$(\tan x)' = \frac{d}{dx}\{\sin x \cdot (\cos x)^{-1}\} = \cos x \cdot (\cos x)^{-1} + \sin x \cdot \{-(\cos x)^{-2}\} \cdot \{-\sin x\}$$

$$= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

【3】の第 1 式の証明は，逆関数の微分を使って，

$x > 0$ のとき，$y = \log x \iff x = e^y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$x < 0$ のとき，$y = \log(-x) \iff x = -e^y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{-e^y} = \frac{1}{x}$$

【3】の第 3 式は，合成関数の微分を使って，

$$(\log|y|)' = \frac{d\log|y|}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{y}$$

【2】の第 2 式は，

$$y = a^x \iff \log y = x\log a$$

$$(\log y)' = \frac{y'}{y} = \log a$$

$$y' = y\log a = a^x\log a$$

【3】の第 2 式は，逆関数 $x = a^y$ を使って，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y\log a} = \frac{1}{x\log a}$$

例 20 つぎの関数を微分せよ．

(1) $(2x^2+3x+1)^3$

(2) $\left(x\sqrt{x^2+1} + \log_e|x+\sqrt{x^2+1}\right)$

（埼玉大）

(3) $\log x^2 \quad (x>0)$

(4) $\dfrac{1}{\sin x} \quad (0 < x < \pi)$

(5) $\dfrac{\sin 2x}{2^x}$

（東京理科大）

【解】 (1) $\dfrac{d}{dx}(2x^2+3x+1)^3 = \underline{\underline{3(4x+3)(2x^2+3x+1)^2}}$

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + \log_e|x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}|\right)$

$$= (x^2+1)^{\frac{1}{2}} + x\cdot 2x\cdot \tfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + \left\{1+2x\cdot\tfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}\left\{x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-1}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \left\{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{x^2+1}}}$$

(3) $\dfrac{d}{dx}\log x^2 = 2x\cdot\dfrac{1}{x^2} = \underline{\underline{\dfrac{2}{x}}}$

(4) $\dfrac{d}{dx}(\sin x)^{-1} = -(\sin x)^{-2}\cos x = \underline{\underline{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}}$

(5) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\sin 2x}{2^x} = \dfrac{d}{dx}2^{-x}\sin 2x$

$$= -2^{-x}\log 2\sin 2x + 2^{-x}\cdot 2\cos 2x = \underline{\underline{\frac{1}{2^x}\{-\log 2\sin 2x + 2\cos 2x\}}}$$

問 17　次の問題に対して，選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい．

関数

$$y = e^{2x}\log(2x+1)$$

の導関数（derivative）は $\boxed{\mathbf{A}}$ である．ただし，$\log x$ は x の自然対数を表し，e をその底とする．

① $e^{2x}\log(2x+1)+\dfrac{e^{2x}}{2x+1}$　② $e^{2x}\log(2x+1)+\dfrac{2e^{2x}}{2x+1}$

③ $2e^{2x}\log(2x+1)+\dfrac{e^{2x}}{2x+1}$　④ $2e^{2x}\log(2x+1)+\dfrac{2e^{2x}}{2x+1}$

（日留試）

★ 媒介変数で表された関数の導関数

$x = f(t)$, $y = g(t)$, $(f'(t) \neq 0)$ のとき,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

★ 接線の方程式

接線の方程式： $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

法線の方程式： $x = a - f'(a)\,(y - f(a))$

接線：関数 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ を通る傾き $f'(a)$ の直線.
法線：関数 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ を通る傾き $-\dfrac{1}{f'(a)}$ の直線. 上の式は

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

を変形してある.

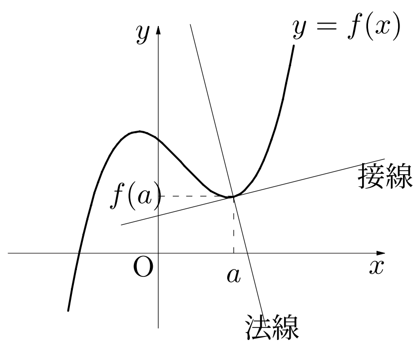


図 7.1:

例 21　次の問題文中の **A** から **G** には，それぞれ $-$（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

関数

$$y = \frac{x^2+1}{x+1} \cdots\cdots ①$$

に対して，その導関数（derivative）は

$$y' = \frac{x^2 + \boxed{\mathbf{A}}\,x - \boxed{\mathbf{B}}}{(x+1)^{\boxed{\mathbf{C}}}}$$

である．また，曲線 ① の $x=1$ における接線の傾きは $\dfrac{\boxed{\mathbf{D}}}{\boxed{\mathbf{E}}}$ である．したがって，接線は $\left(0,\ \dfrac{\boxed{\mathbf{F}}}{\boxed{\mathbf{G}}}\right)$ を通る．ただし，$\dfrac{\boxed{\mathbf{D}}}{\boxed{\mathbf{E}}}$, $\dfrac{\boxed{\mathbf{F}}}{\boxed{\mathbf{G}}}$ は既約分数とする．

（日留試）

【解】 $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1} = (x^2+1)(x+1)^{-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+1)' \cdot (x+1)^{-1} + (x^2+1) \cdot [(x+1)^{-1}]' \\ &= 2x(x+1)^{-1} + (x^2+1)[-(x+1)^{-2}] \\ &= \{2x(x+1) - (x^2+1)\}(x+1)^{-2} \\ &= \underline{\underline{\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}}} \end{aligned}$$

$$f'(1) = \frac{1+2-1}{2^2} = \frac{1}{\underline{\underline{2}}}$$

接線の方程式：$y = f'(1)(x-1) + f(1)$,　$f(1) = 1$

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 \iff y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$x = 0$ のとき $y = \dfrac{1}{\underline{\underline{2}}}$　　（ABC の【答】212，DE の【答】12　FG の【答】12）

★ 関数の増減

第 2 次導関数による極大・極小
【1】$f'(c)=0$ & $f"(c)<0$ のとき $f(c)$：極大値.
【2]】$f'(c)=0$ & $f"(c)>0$ のとき $f(c)$：極小値.

曲線 $y=f(x)$ の凹凸
【1】ある区間で $f"(x)>0$ ならば，$y=f(x)$ はその区間で**下に凸**.
【2】ある区間で $f"(x)<0$ ならば，$y=f(x)$ はその区間で**上に凸**.

例 22 $f(x)=(2x+1)e^{-x}$ とする.

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線と x 軸との交点の x 座標を求めよ.
(2) $4f(x)$ の増減表を書き，曲線 $y=f(x)$ の概形を描け.

（法政大）

【解】 (1) $f'(x)=2e^{-x}-(2x+1)e^{-x}=(1-2x)e^{-x}$

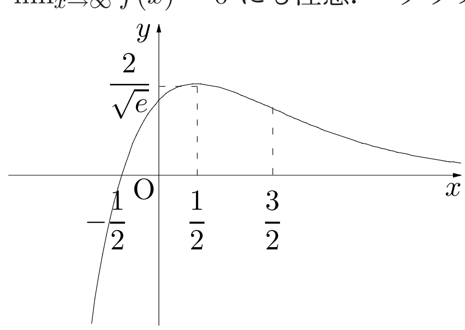
接線：$y=f'(1)(x-1)+f(1) \iff \underline{\underline{y=-\dfrac{1}{e}x+\dfrac{4}{e}}}$

交点の x 座標：$y=0=-\dfrac{1}{e}x+\dfrac{4}{e} \implies x=\underline{\underline{4}}$

(2) 増減表

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f"(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘	↘	↘

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ にも注意. グラフは下の図のようになる。



7–2　積分法とその応用

≪ この節で学ぶこと ≫

[**いろいろな関数の不定積分，置換積分法，部分積分法，定積分と微分法，区分求積法，3 次関数の定積分，曲線の長さ，回転体の体積**]

★　いろいろな関数の不定積分

【1】x^α　(α: 有理数) **の不定積分**

$$\boxed{\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq 1), \qquad \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C}$$

【2】**三角関数の不定積分**

$$\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C}$$

【3】**指数関数の不定積分**

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a \neq 1,\ a > 0)}$$

【4】**対数微分法の逆演算**

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C}$$

★ 置換積分法

$$\boxed{x = g(t) \text{ とおくと,} \quad \int f(x)dx = \int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)dt}$$

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = g'(t)dt \quad \text{だから} \quad f(x)dx = f\left(g(t)\right)g'(t)dt$$

$\int f(x)dx = F(x) + C$ のとき，$t = ax + b$ とおくと

$$\int f(ax+b)dx = \int f(t)\frac{dx}{dt}dt = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad (a \neq 0)}$$

★ 部分積分法

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$$

$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ の両辺を積分する．

例 23 つぎの関数の不定積分を求めよ．

(1) $\int x^2 e^x dx$

(2) $\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$

（埼玉大）

(3) $\int \sin^2 x dx$

(4) $\int \log x dx$

（東京理科大改）

【解】　(1) $\dfrac{dx^2e^x}{dx} = 2xe^x + x^2e^x$ より

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

$\dfrac{dxe^x}{dx} = e^x + xe^x$ より

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - \left(2xe^x - 2\int e^x dx\right) = \underline{\underline{(x^2-2x+2)e^x + C}}$$

ただし，C は積分定数．

(2) $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$ を用いると，

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1}$$

右辺第 2 項は $t = x^2+1$，$dt = 2xdx$ より，

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \log x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log t + C = \log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C = \underline{\underline{\log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C}}$$

(3) $\sin^2 xdx = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ を用いる．

$$\int \sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C}}$$

(4) $\dfrac{d}{dx}x\log x = \log x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \log x + 1$ を両辺積分して

$$x\log x = \int \log xdx + \int 1dx$$

$$\therefore \int \log xdx = x\log x - \int 1dx = \underline{\underline{x\log x - x + C}}$$

★　定積分と微分法

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)}$$

例 24 次の問題に対して，選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい．

すべての x に対して，関数 $f(x)$ は

$$\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt = \sin^2 x$$

を満たしている．このとき

$$\int_0^x f(t)dt = \boxed{\mathbf{A}}, \qquad \int_0^x tf(t)dt = \boxed{\mathbf{B}}$$

である．

① $\sin 2x$ ② $x\cos 2x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$ ③ $\cos 2x$
④ $x^2\cos 2x - x\sin 2x + \sin^2 x$ ⑤ $x^2\sin 2x - x\cos 2x + \sin^2 x$

（日留試）

【解】 定積分と微分法の関係より，

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = f(x) \\ \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x tf(t)dt = xf(x) \\ \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x t^2 f(t)dt = x^2 f(x) \end{cases}$$

$$\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt = \sin^2 x$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2\int_0^x f(t)dt - 2x\int_0^x tf(t)dt + \int_0^x t^2 f(t)dt = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

両辺を x で微分すると，

$$2x\int_0^x f(t)dt + x^2\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt - 2\int_0^x tf(t)dt - 2x\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt + \frac{d}{dx}\int_0^x t^2 f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(1-\cos 2x)$$

$$\iff \quad 2x\int_0^x f(t)dt + x^2 f(x) - 2\int_0^x tf(t)dt - 2x\cdot xf(x) + x^2 f(x) = \sin 2x$$

$$\iff \quad 2x\int_0^x f(t)dt - 2\int_0^x tf(t)dt = \sin 2x \cdots\cdots ⓐ$$

両辺をもう一度 x で微分すると，

$$2\int_0^x f(t)dt + 2x\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt - 2\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = 2\cos 2x$$

$$\iff \quad 2\int_0^x f(t)dt + 2xf(x) - 2xf(x) = 2\cos 2x$$

$$\iff \quad \int_0^x f(t)dt = \underline{\underline{\cos 2x}}$$

ⓐ 式に代入すると，

$$2x\cdot\cos 2x - 2\int_0^x tf(t)dt = \sin 2x$$

$$\iff \quad \int_0^x tf(t)dt = \underline{\underline{x\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x}}$$

（A の【答】③，B の【答】②）

★　区分求積法

1°　曲線の面積を求める

無限級数を用いれば，式の分かっている曲線の面積を求めることができる．ここでは，まず，つぎの例を考えてみよう．

[Ex]　$y = x^2$ で表せる放物線と x 軸，および，$x = 1$ で囲まれた面積 S を求めよう．

【解】① 図 2 のように，放物線の内部を幅 $\dfrac{1}{N}$ の長方形に分けてその和 S_1 を求める．N を大きくすればより細かい幅の長方形に放物線が内接することになるからしだいに求める面積に近づくはずである．$N\to\infty$ として考えてみよう．図で，各長方形の高さは

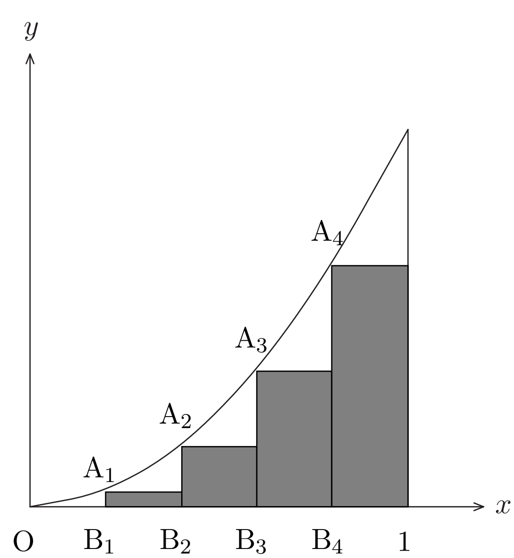


図 7.2: 内接長方形．$N = 5$ の場合

$$\mathrm{A_1B_1} = \left(\frac{1}{N}\right)^2, \quad \mathrm{A_2B_2} = \left(\frac{2}{N}\right)^2, \quad \cdots, \quad \mathrm{A_nB_n} = \left(\frac{n}{N}\right)^2, \quad \cdots, \quad \mathrm{A_{N-1}B_{N-1}} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^2$$

となり，それぞれの長方形の面積はこの高さに幅 $\dfrac{1}{N}$ を掛ければよいから，

$$S_1 = \lim_{N\to\infty} \left\{ \left(\frac{1}{N}\right)^2 + \left(\frac{2}{N}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{N}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 \right\} \times \frac{1}{N}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{n}{N}\right)^2 \frac{1}{N}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^3} \sum_{n=1}^{N-1} n^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{6} N(N-1)(2N-1) \frac{1}{N^3}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(2 - \frac{1}{N}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

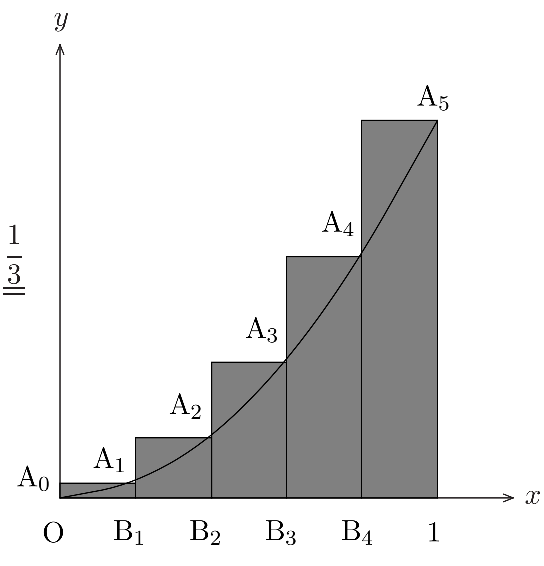


図 7.3: 外接長方形．$N = 5$ の場合

【解】② 今度は図 3 のように，放物線の外部をおおう幅 $\dfrac{1}{N}$ の長方形に分けてその和 S_2 を求める．N を大きくすればより細かい幅の長方形に放物線が外接することになる．この極限は ① と同じ値になるであろうか？ 図で，各長方形の高さは

$$\mathrm{A_1B_1} = \left(\frac{1}{N}\right)^2, \quad \mathrm{A_2B_2} = \left(\frac{2}{N}\right)^2, \quad \cdots, \quad \mathrm{A_nB_n} = \left(\frac{n}{N}\right)^2, \quad \cdots, \quad \mathrm{A_NB_N} = \left(\frac{N}{N}\right)^2 = 1$$

となり，それぞれの長方形の面積はこの高さに幅 $\dfrac{1}{N}$ を掛ければよいから，

$$S_2 = \lim_{N\to\infty} \left\{ \left(\frac{1}{N}\right)^2 + \left(\frac{2}{N}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{N}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{N}{N}\right)^2 \right\} \times \frac{1}{N}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{n}{N}\right)^2 \frac{1}{N}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^3} \sum_{n=1}^{N} n^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) \frac{1}{N^3}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{6} \left(1+\frac{1}{N}\right)\left(2+\frac{1}{N}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

N が有限の場合は内接と外接の関係から，求める面積 S は不等式：

$$S_1 < S < S_2$$

がつねに成り立つ．$N \to \infty$ では

$$S_1 = S = S_2 = \frac{1}{3}$$

となり，$S = \dfrac{1}{3}$ が正確な値であることがわかる．

2°　**区分求積法**

[**Ex**] の議論を一般化することはかんたんである．長方形の和は内接でも外接でもよいから，一方だけ（内接の方）だけ考える．まとめると，

> 関数 $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続なとき，曲線 $y = f(x)$ と $x = a$ と x 軸，および，$x = b$ で囲まれた面積 S は
>
> $$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x$$
>
> ただし，$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,　$x_n = a + n\Delta x$

★ 3 次関数とその接線で囲まれた面積

$$-x^3 + px^2 + qx + r = (x-\alpha)^2(\beta - x), \qquad \alpha < \beta$$
$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta - x)dx = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$
(図 4(a))

【証明】$t = x - \alpha$ とおく．$x = t + \alpha, \ \dfrac{dx}{dt} = 1, \ \ dx = dt$

$\beta - x = (\beta - \alpha) - t, \ \ (i9^x = \alpha$ のとき $t = 0, \ \ (ii)\ x = \beta$ のとき $t = \beta - \alpha$

$$\text{与式} = \int_\alpha^\beta t^2(\beta - \alpha - t)dt = \int_\alpha^\beta \{(\beta-\alpha)t^2 - t^3\}dt$$

$$= \left[\frac{\beta-\alpha}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_0^{\beta-\alpha} = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^4 - \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4 = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \quad \text{(Q.E.D.)}$$

図 7.4:

応用

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d(= f(x))$ の $x = \alpha$ での接線 $y = g(x)$ とする．
$y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた面積 S を求めよ．

① $a<0$ のとき．(図 4 (b)，(c))

$\alpha<\beta$ と $\beta<\alpha$ は同じ式．

$$S=\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_\beta^\alpha \{g(x)-f(x)\}\,dx$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c,\quad f'(\alpha)=3a\alpha^2+2b\alpha+c$$

接線：$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)=g(x)$

$$f(x)-g(x)=f(x)-\{f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)\}$$

$$=ax^3+bx^2+cx+d-\{(3a\alpha^2+2b\alpha+c)(x-\alpha)+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d\}$$

$$=a\{x^3-\alpha^3-3\alpha^2(x-\alpha)\}+b\{x^2-\alpha^2-2\alpha(x-\alpha)\}$$

$$=a\{(x-\alpha)(x^2+\alpha x-\alpha^2)-3\alpha^2(x-\alpha)\}+b\{(x-\alpha)(x+\alpha)-2\alpha(x-\alpha)\}$$

$$=(x-\alpha)\{a(x^2+\alpha x-2\alpha^2)+b(x-\alpha)\}$$

$$=(x-\alpha)\{a(x-\alpha)(x+2\alpha)+b(x-\alpha)\}$$

$$=(x-\alpha)^2(ax+2a\alpha+b)$$

$=-a(x-\alpha)^2(\beta-x)$，ただし，$a\beta+2a\alpha+b=0$

$$S=\underline{\underline{|a|\cdot\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4}},\qquad \beta=-\left(2\alpha+\frac{b}{a}\right)$$

② $a>0$ のとき．(図 4 (d)，(e))

$$S=\int_\alpha^\beta \{g(x)-f(x)\}\,dx=\int_\beta^\alpha \{f(x)-g(x)\}\,dx=a\cdot\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

同じ答．

例 25 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ のグラフを C とする．C 上の点 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{8}\right)$ で C に接線 l をひき，l と C とで囲まれる部分の面積を求めよ．

（東工大）

【解】 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$

$$\Longrightarrow\ f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \ \Longrightarrow\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = -\frac{1}{4}$$

$$l : y = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{8} \iff y = -\frac{1}{4}x$$

求める面積は図 5 の塗りつぶした部分．

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \left\{ f(x) - \left(-\frac{1}{4}x\right)\right\} dx = \frac{1}{12}\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \underline{\underline{\frac{27}{64}}}$$

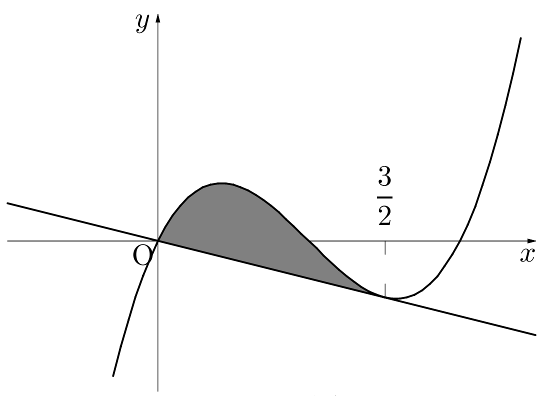


図 7.5:

問 18 次の問題文中の **A** から **B** には，それぞれ −（負号，minus sign）か 0 ∼ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

曲線 $y = x^3 - x$ と x 軸で囲まれた 2 つの領域の面積の和は $\dfrac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}}$ である．

（日留試）

★　曲線の長さ

曲線 $y=f(x)$ の区間 $[a,\ b]$ における長さ L は

$$\boxed{L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}$$

曲線 $x=f(t),\quad y=g(t),\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ の長さ L は

$$\boxed{L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt}$$

★　回転体の体積

立体の体積

x 軸に垂直な平面で切ったときの切り口の面積が $S(x)$ であるような立体の，区間 $[a,\ b]$ における体積 V は

$$\boxed{V=\int_a^b S(x)dx}$$

したがって，x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V は，切り口の面積が

$$S(x)=\pi y^2$$

だから，

$$\boxed{V=\pi\int_a^b y^2dx}$$

例 26 媒介変数 θ によって

$$x = \cos\theta,\quad y = \frac{\sqrt{2}}{8}\sin 2\theta \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表示される曲線 C は下の図のようになっている．このとき次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の長さ L を求めよ．
(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた面積 S を求めよ．
(3) 曲線 C を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を求めよ．

（愛知県立大）

【解】 (1) (i) $\theta = 0$ のとき，$x = \cos 0 = 1$，(ii) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき，$x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos 2\theta$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \sin^2\theta + \frac{1}{8}\cos^2 2\theta \\
&= \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) + \frac{1}{8}\cos^2 2\theta \\
&= \frac{1}{8}(4 - 4\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) \\
&= \frac{1}{8}(2-\cos 2\theta)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\pi}}
\end{aligned}$$

(2) $dx = -\sin\theta d\theta$

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 y dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2\theta(-\sin\theta)d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \sin\theta d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta d\theta
\end{aligned}
$$

$t = \sin\theta$ とおくと,$dt = \cos\theta d\theta$
(i) $\theta = 0$ のとき，$t = \sin 0 = 0$，(ii) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$t = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

$$
S = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^1 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{12}}}
$$

(3) 回転体の体積：

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 y^2 dx \\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\sin 2\theta\right)^2(-\sin\theta)d\theta \\
&= \frac{\pi}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\sin\theta d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\sin^2 2\theta = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = 4(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta
$$

$t = \cos\theta$ とおくと，$dt = -\sin\theta d\theta$
(i)　$\theta = 0$ のとき $t = 1$　(ii) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $t = 0$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{8}\int_1^0 (1-t^2)t^2(-dt) \\
&= \frac{\pi}{8}\int_0^1 (t^2 - t^4)dt \\
&= \frac{\pi}{8}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{60}}}
\end{aligned}
$$

第8章 解答

第 1 章

問 1

(1)(a) 1 (b) 5 (c) 6 (2)(d) 2 (e) 2

問 2

(1)(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{5}$ (2)(c) $\frac{1}{9}$ (d) 1

問 3

(1) $+\infty$ (2) $-\infty$

問 4

(1)(a) $-\infty$ (b) $+\infty$ (2)(c) 0 (d) $+\infty$ (3)(e) 0 (f) 0 (g) 2 (4)(h) $\frac{1}{2}$ (i) 0 (j) 1

第 2 章

問 5

(1) $x^3+2x^2-5x-6=(x+3)(x+1)(x-2)$ (2) $x^4-7x^2+12=(x+2)(x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ (3) $x^3-1=(x-1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

(4) $-3 \leqq x \leqq -1$ or $x \geqq 2$ (5) $x=-2,$ or 2 or $-\sqrt{3}$ or $\sqrt{3}$ (6) $x=1$ or $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ or $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

第 3 章

問 6

(1)(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$　　(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2$

(2)(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{100}{n+1} = 0$　　(d) $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{100}{n+1}\right) = 0$

(3)(e) $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$　　(f) $\lim_{n\to\infty} (n^2 - 2n) = +\infty$

(4)(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$　　(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = +\infty$

問 7

(1) $\lim_{n\to\infty} (-10 \cdot 2^{n-1}) = -\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 5^n}{2^n + 3^n} = -\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{3^n}$**:振動する.**

問 8

(1) **収束.** $\frac{256}{3}$　**(2)** **発散**　**(3)** **収束.** $\frac{4}{3}$　**(4)** **発散.**

第 4 章

問 9

AB **の【答】** 21**,**　CDE **の【答】** -22, F **の【答】** 1

問 10

(1) $y^2 = 3x$　**(2)** $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$　**(3)** $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

第 5 章

$\boxed{\textbf{問 11}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{問 12}}$

(1) $(1\ 2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (0\ 6)$, **(2)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{問 13}}$

$J^2 = -E,\ J^{10} = -E$

$\boxed{\textbf{問 14}}$

(1)(a)$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, **(b)** B^{-1} **は存在しない．**

(2) $x = 3,\ y = 2$

$\boxed{\textbf{問 15}}$

（AB の【答】-3**，** CD **の【答】**-2**）**

第 6 章

$\boxed{\textbf{問 16}}$

(1) $\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ **(2)** $\sqrt{2}(cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

(3) $\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$ **(4)** $\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$

(5) $2(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$ **(6)** $\sqrt{2}(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$

(7) $\sqrt{2}(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$

第 7 章

$\boxed{\textbf{問 17}}$

④

$\boxed{\textbf{問 18}}$

（AB の【答】12**）**