日本留学生のための数学

数学（発展）

—数学 III，数学 C—

クラス		番号		氏名	

目次

第1章 関数と極限

1–1　関数の極限

≪ この節で学ぶこと ≫
[**極限，収束する，定数関数の極限，無限大，発散する，左極限と右極限**]

★　極限の記号

関数 $f(x)$ の **極限**(きょくげん)：$A \cdots$ x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ が限りなく近づく一定値,

$$x \to a \text{ のとき } f(x) \to A \quad \text{または} \quad \lim_{x \to a} f(x) = A$$

A が有限の値のとき **収束する**(しゅうそく)という.

★　定数関数の極限

$$\lim_{x \to a} c = c, \quad (c\text{：定数})$$

問 1　つぎの極限を求めよ.

(1)　(a) $\lim_{x \to 1} x^2$　(b) $\lim_{x \to 1} 5x$　(c) $\lim_{x \to 1} 6$

(2)　(d) $\lim_{x \to 1}(x^2 - 5x + 6)$　(e) $\lim_{x \to 1}(x-3)(x-2)$

問 2 つぎの極限を求めよ.

(1) (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+5}{x(x+1)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ (岐阜)

(2) (c) $\displaystyle\lim_{x\to -2}3^x$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

例 1 極限

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

が成り立つような定数 a および b の値を定めよ.

【解】 分母のみの極限は 0, 有限の極限 $\frac{1}{3}$ となるためには, 分子

$$\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$$

$b=-(a+1)$ を分母に代入.

$$x^2+ax-(a+1)=(x-1)(x+a+1)$$

分子：

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+a+1}{x+2} = \frac{a+2}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore\ a=-1,\quad b=-(a+1)=0$$

a=-1, b=0【答】

★ 無限大という記号

A が $+\infty$ あるいは $-\infty$ となるとき発散（はっさん）**する**という．

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

無限大と演算記号を合わせて使ってはならない．

ここで，∞ は数字ではなく，単に十分大きい状態（$-\infty$ は絶対値が大きい状態）を示す記号であるから，lim 記号を伴わないところで，$x = \infty$ としたり，$\infty + \infty$ というように演算記号と合わせて用いたり，$\dfrac{1}{\infty}$ と分数中で使ったりしてはならない．

> **問 3**　つぎの極限を求めよ．
>
> (1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$　　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x^2+3}{x^4-x^2}$

★ 左極限と右極限

$x \to a+0$，$x \to a-0$ と片側からのみ近づける場合もある．$x \to \infty$，$x \to -\infty$ の場合もある．

$$\lim_{x\to a-0} f(x), \quad \lim_{x\to a+0} f(x), \quad \lim_{x\to -0} f(x), \quad \lim_{x\to +0} f(x), \quad \lim_{x\to +\infty} f(x), \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

と書く．

> **問 4**　つぎの極限を求めよ．
>
> (1)　(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2-0} \frac{3}{x-2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2+0} \frac{3}{x-2}$
>
> (2)　(c) $\displaystyle\lim_{x\to -0} 10^{\frac{1}{x}}$　　(d) $\displaystyle\lim_{x\to +0} 10^{\frac{1}{x}}$
>
> (3)　(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}$　　(f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x}$　　(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$
>
> (4)　(h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$　　(i) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} 2^x$　　(j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

1–2　分数関数・無理関数

≪ この節で学ぶこと ≫
[**分数関数のグラフ，漸近線，平行移動，逆関数，無理関数のグラフ**]

★　分数関数のグラフ

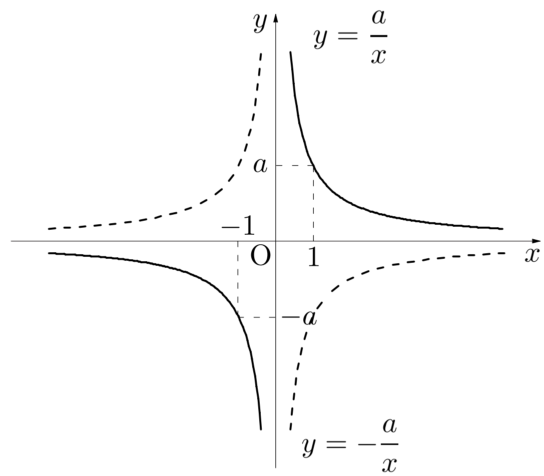


図 1.1: 分数関数の基本型

基本型：　$y = \dfrac{a}{x}, \quad (a > 0)$

$x > 0$ の部分が反比例の式となっているもの．
図 1 の実線．
定義域：$x \neq 0$，　値域：$y \neq 0$

漸近線（ぜんきんせん）＝ 曲線が限りなく近づく直線．

$y = \dfrac{a}{x}$ の漸近線：

$$x \text{ 軸 } (y=0) \cdots\cdots \lim_{x \to -\infty} \frac{a}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0$$

$$y \text{ 軸 } (x=0) \cdots\cdots \lim_{x \to -0} \frac{a}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = +\infty$$

線対称移動型：　$y = -\dfrac{a}{x}, \quad (a > 0)$

x 軸，あるいは，y 軸に対称な曲線．
図 1 の点線．

平行移動型： $y = \dfrac{a}{x-p} + q, \quad (a \neq 0)$

基本型，あるいは，線対称型を x 軸方向に p，y 軸方向に q 移動したもの．

一般型型： $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, \quad (c \neq 0)$

平行移動型に変形できる．

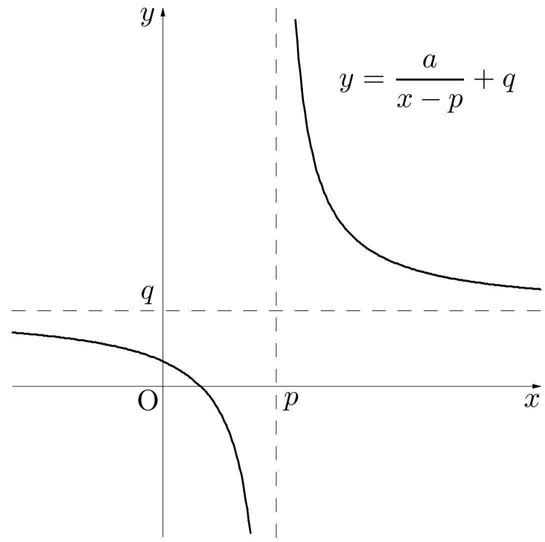


図 1.2: 分数関数の平行移動型

例 2

次の問題に対して，それぞれの選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい..

分数関数（fractional function）$y = \dfrac{x}{x-2}$ のグラフは $y = \dfrac{2}{x}$ のグラフを平行移動（parallel displacement）して得られる．この平行移動は $\boxed{\mathbf{A}}$ である．

① x 軸（x–axis）の正（positive）の方向に 2 だけ平行移動したもの．
② x 軸の負（negaitive）の方向に 2 だけ平行移動したもの．
③ x 軸の正の方向に 2，y 軸の正の方向に 1 だけ平行移動したもの．
④ x 軸の正の方向に 2，y 軸の負の方向に 1 だけ平行移動したもの．
④ x 軸の負の方向に 2，y 軸の正の方向に 1 だけ平行移動したもの．
④ x 軸の負の方向に 2，y 軸の負の方向に 1 だけ平行移動したもの．

（日留試試行）

【解】

$$y = \frac{x}{x-2} = \frac{x-2+2}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}$$

$$y-1=\frac{2}{x-2}$$

$$x \longrightarrow x-2, \quad y \longrightarrow y-1$$

（A の【答】③）

★　逆関数

1 対 1 対応 $\cdots$ $y=f(x)$ において，異なる x の値に対して異なる y の値が対応する場合.

$$\Big[x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)\Big] \iff \Big[f(x_1)=f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1=x_2\Big]$$

[**1 対 1 対応でない例**]　定義域が実数全体とした場合の $f(x)=x^2$：$f(-2)=f(2)=4$ となってしまう.

逆関数（ぎゃくかんすう）：f^{-1} で表す. $y=f(x)$ が 1 対 1 対応の関数に対して，

$$y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$$

じっさいにこの関数を用いるときには，x と y とを入れかえて，

$$y=f^{-1}(x)$$

と表す.

$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して線対称である.

この線対称移動は，$y=f(x)$ の x, y を，

$$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases}$$

とおきかえる操作によって実行できる. 操作後の式が $y=f^{-1}(x)$ である.

例 3 次の問題文中の **A** から **B** には，それぞれ −（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

関数

$$y = f(x) = \frac{(2a-1)x+1}{x-a}$$

のグラフを，x 軸の正方向へ $\boxed{\mathbf{A}}$ ，さらに y 軸の負方向に 5 だけ平行移動したら，もとの関数の逆関数のグラフに一致した．このとき $a = \boxed{\mathbf{B}}$ である．

【解】

$$\begin{aligned} \frac{(2a-1)x+1}{x-a} &= \frac{(2a-1)(x-a)+a(2a-1)+1}{x-a} \\ &= (2a-1)+\frac{2a^2-a+1}{x-a} \end{aligned}$$

であるから，

$y = f(x)$ の漸近線は，$x = a$ ＆ $y = 2a-1$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = f^{-1}(x) \text{ の漸近線：} & y = a \ \& \ x = 2a-1 \\ x \text{ 軸方向へ } p,\ y \text{ 軸方向へ} & \\ -5 \text{ 平行移動した漸近線：} & x = a+p \ \& \ y = 2a-1+(-5) \end{array}\right.$$

$$\therefore \quad a+p = 2a-1 \ \& \ 2a-1+(-5) = a$$

$$\Longleftrightarrow a = 6 \ \& \ p = 5$$

（A の【答】5，B の【答】6）

★ 無理関数のグラフ

$y = ax^2$, $(a>0)$ を直線 $y = x$ に関して線対称移動をすることを考えてみる．この移動は，$y = ax^2$ の x, y を，

$$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases}$$

とおきかえる操作によって実行できる．操作後の式は，

$$x = ay^2$$

となるが，この式は y が x の関数であることを示すものではない．関数の定義の **「x に対して，ただ 1 つの要素 y を対応させる」** ということに違反するからである．つまり，$b = \dfrac{1}{a}$ とおいて，

$$bx = y^2, \ (b > 0)$$

を y について解くと，

$$y = +\sqrt{bx} \quad \& \quad y = -\sqrt{bx}$$

となって，x が 2 通りの y に対応することがわかる.（図 3 の実線部と点線部を合わせた関係.）

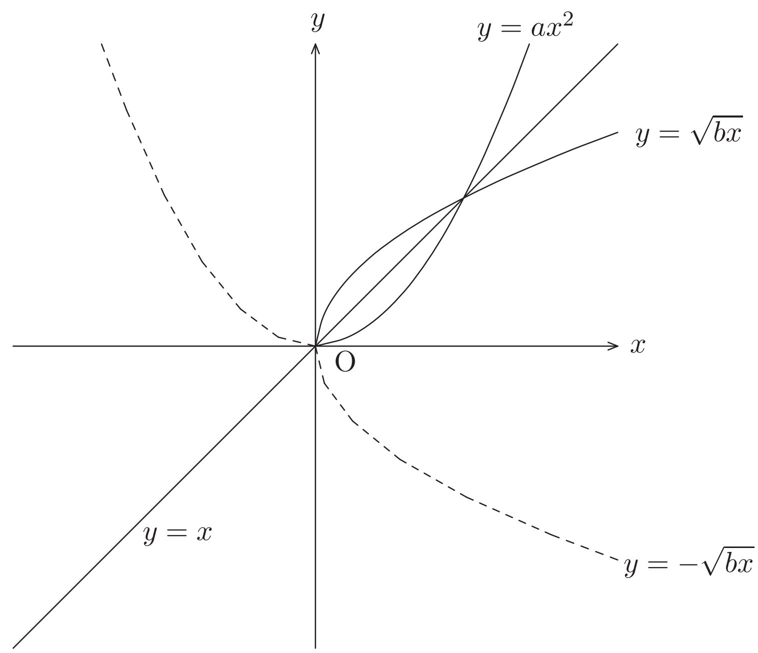


図 1.3: 無理関数 $y = \pm\sqrt{bx}$

このようなことにならないように，もとの関数 $y = ax^2$,　$(a > 0)$ の定義域を $x \geqq 0$（図 3 の実線部）に制限し，1 対 1 対応の関数とした上で，その逆関数を考える．これがつぎの式である．

無理関数（むりかんすう）：

$\boxed{\text{基本型} \quad y = \sqrt{bx}, \quad (b > 0)}$

定義域：$x \geqq 0$,　　値域：$y \geqq 0$
グラフは放物線の上半分（図 3 の実線）．

$\boxed{y \text{ 軸に関して線対称型} \quad y = \sqrt{-bx}, \quad (b > 0)}$

定義域：$x \leqq 0$,　　値域：$y \geqq 0$

$\boxed{\text{一般型} \quad y = p \pm \sqrt{bx + c}, \quad (b \neq 0)}$

定義域：$x | bx + c \geqq 0$,　　値域：$y \geqq p$ or $y \leqq p$
どの場合も，点 $\left(-\dfrac{c}{b},\ p\right)$ を頂点とし，$y = p$ を軸とする放物線の半分である．

例 4

次の問題文中の **A** から **F** には，それぞれ –（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

関数 $y = f(x) = x^2 - 2x.\ (x \geqq 1)$ の逆関数は

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{\boxed{\mathbf{A}}x + \boxed{\mathbf{B}}} + \boxed{\mathbf{C}}$$

であり，その定義域は $\boxed{\mathbf{DE}}$，値域は $\boxed{\mathbf{F}}$ である．

【解】 $x = f(y),\ (y \geqq 1)$ を y について解く．

$$x = y^2 - y = (y-1)^2 - 1, \quad (y \geqq 1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad (y-1)^2 = x + 1, \quad (y - 1 \geqq 0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y - 1 = \sqrt{x+1}$$

$$\therefore\ y = f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 1, \quad (x \geqq -1)$$

（A の【答】1，B の【答】1，C の【答】1，DE の【答】-1，F の【答】1）

第 2 章　高次方程式の解

2–1　3 次関数のグラフ

≪ この節で学ぶこと ≫
[**極大，極小，変曲点，3 次関数のグラフの基本型**]

★　極大，極小，変曲点

$x = a$ で**極大**(きょくだい)= 関数 $f(x)$ が $x = a$ の前後で増加から減少に変わる点.
$x = a$ で**極小**(きょくしょう)= 関数 $f(x)$ が $x = a$ の前後で減少から増加に変わる点.
$x = a$ が**変曲点**(へんきょくてん)= 関数 $f(x)$ が $x = a$ の前後で曲線の凹凸が変わる点.

★　3 次関数の 3 つの基本型

定数および x の 2 次の項の係数 0 の 3 次関数：

基本型：　$y = ax^3 + bx, \quad (a > 0)$

グラフは $x = 0$ を境に，$x < 0$ では上に凸，$x > 0$ では下に凸と変化する.
【1】 $b = 0$ のとき.
$y = ax^3$ は原点 O で接線の傾きが 0 であるが，極大でも極小でもない**変曲点**をもつ.

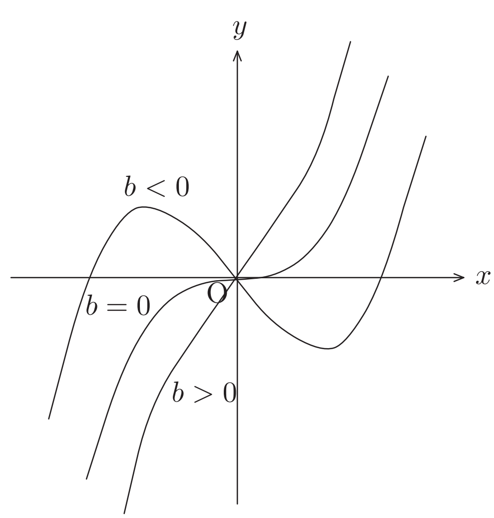


図 2.1: 3 次関数の基本型

【2】 $b > 0$ のとき．

全域で増加関数となるが，原点 O で**変曲点**をもつ．

【3】 $b < 0$ のとき．

$\sqrt{\dfrac{-b}{a}} = \alpha > 0$ とおくと，

$$y = ax\left(x^2 + \frac{b}{a}\right) = ax(x^2 - \alpha^2) = ax(x+\alpha)(x-\alpha)$$

と実数の範囲で因数分解できるから，$-\alpha < x < 0$ で極大，$0 < x < \alpha$ で極小となるグラフとなる．

一般の 3 次関数のグラフは,【1】,【2】,【3】を x 軸に関して線対称移動したり，平行移動したりして得られる．

一般型：　$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (a \neq 0)$

2–2　高次方程式

≪ この節で学ぶこと ≫
[n **次方程式の解，3 次方程式の解と係数の関係**]

★　n 次方程式の解

因数分解・因数定理を利用して解く.
複素数の範囲で考えると，どのような n 次整式も 1 次式の積に分解できる.

$$a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

したがって，m 重解を m 個の解と数えるならば，<u>n 次方程式は n 個の解をもつ.</u>

問 5　つぎの各設問に答えよ.

(1)　整式 x^3+2x^2-5x-6 を有理数の範囲で因数分解せよ.
(2)　整式 x^4-7x^2+12 を実数の範囲で因数分解せよ.　（日留試改）
(3)　整式 x^3-1 を複素数の範囲で因数分解せよ.
(4)　不等式 $x^3+2x^2-5x-6 \geqq 0$ を解け.
(5)　方程式 $x^4-7x^2+12=0$ を解け.
(6)　方程式 $x^3=1$ を解け.

★　3 次方程式の解と係数の関係

$ax^3+bx-2+cx+d=0,\ (a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とおくと，

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$= a\left\{x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma\right\}$$

例 5

次の問題文中の **A** から **H** には，それぞれ −（負号，minus sign）か 0 〜 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

p，q を実数（real number）とするとき，x の 3 次方程式

$$x^3 + 4x^2 + px + q = 0$$

が $1-3i$ を解にもつとする．

$$p = \boxed{\mathbf{AB}}, \quad q = \boxed{\mathbf{CD}}$$

であり，残りの解は，$\boxed{\mathbf{EF}}$ と $\boxed{\mathbf{G}} + \boxed{\mathbf{H}}$ である．

（日留試）

【解】 複素数解を α，β，実数解を γ とおく．

$\alpha = 1-3i$ とすると，$\beta = \overline{\alpha} = 1+3i$

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\overline{\alpha}) + \alpha\overline{\alpha} = x^2 - 2x + 10$$

$(x^3+4x^2+px+q) \div (x^2-2x+10)$ を直接筆算する．

$$\begin{array}{rllll}
 & x & +\ 6 & & \\ \cline{2-5}
x^2-2x+10 \big) & x^3 & +4x^2 & +px & +\ q \\
 & x^3 & -2x^2 & +10x & \\ \cline{2-5}
 & & 6x^2 & +(p-10)x & +\ q \\
 & & 6x^2 & -12x & +60 \\ \cline{3-5}
 & & & (p+2)x & +(q-60)
\end{array}$$

$$\gamma = -6 \ \& \ p+2=0 \ \& \ q-60=0 \iff \underline{\underline{\gamma = -6 \ \& \ p=-2 \ \& \ q=60}}$$

【別解】 複素数解を α，β，実数解を γ とおく．

$\alpha = 1-3i$ とすると，$\beta = \overline{\alpha} = 1+3i$

3 次方程式の解と係数の関係より，

$$\left[\begin{array}{l}
\alpha+\beta+\gamma = 2+\gamma = -4 \\
\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta) = 10+2\gamma = p \\
\alpha\beta\gamma = 10\gamma = -q
\end{array}\right.$$

$$\iff \underline{\underline{\gamma = -6 \ \ \& \ \ p = -2 \ \ \& \ \ q = 60}}$$

（AB の【答】-2，CD の【答】60，EF の【答】-6，G の【答】1，H の【答】3）

第3章 数列の極限・級数

3–1　数列の極限

≪ この節で学ぶこと ≫
[単調な数列，数列の収束・発散，振動，極限の計算，等比数列の極限]

★　単調増加，単調減少の数列

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **1** 数列

$$\frac{0}{1},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \cdots,\quad \frac{n-1}{n},\quad \cdots$$

図 1 のようになり，グラフはしだいに 1 に 1 より小さい値から近づく．

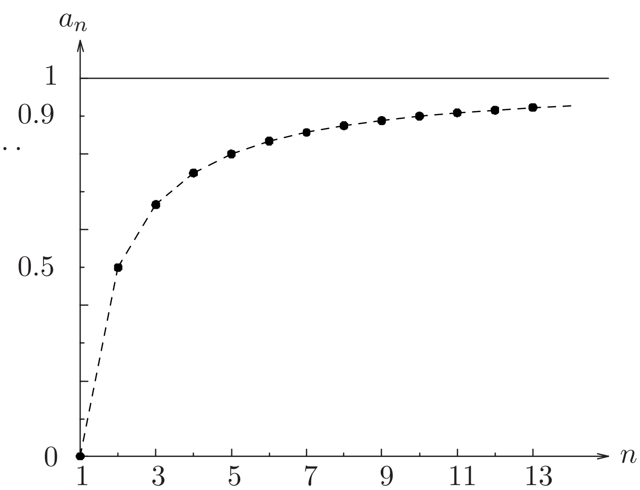


図 3.1: $\boxed{\textbf{Ex}}$ **1** の図

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**　数列:

$$\frac{100}{2},\quad \frac{100}{3},\quad \frac{100}{4},\quad \cdots,\quad \frac{100}{n+1},\quad \cdots$$

図 2 のように，n が大きくなると，a_n はしだいに 0 に近づく．

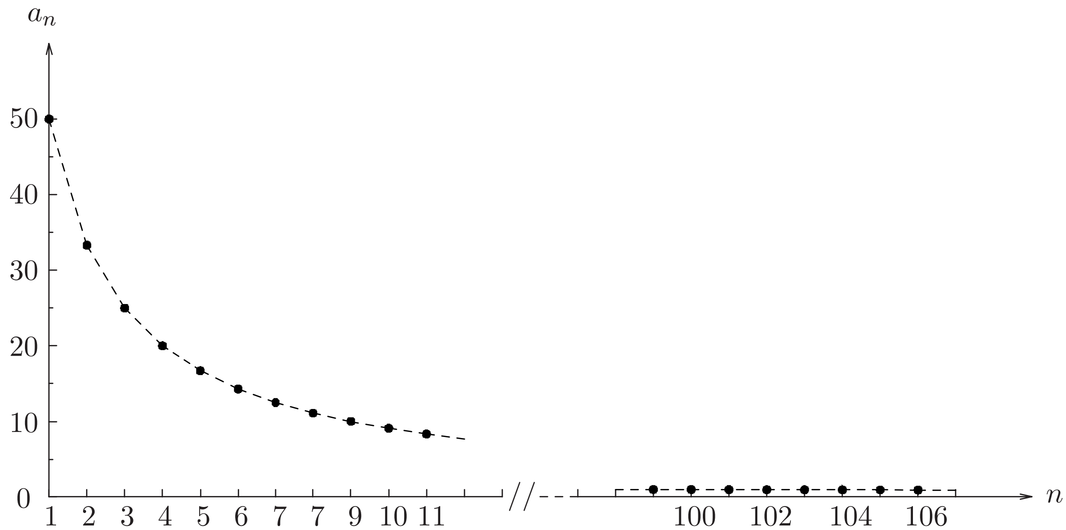


図 3.2: $\boxed{\textbf{Ex}}$ **2** の図

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **3** の数列：

$$1,\quad 4,\quad 9,\quad 16,\quad \cdots,\quad n^2,\quad \cdots$$

図 3 のように，項数が大きくなるにつれ，項の値は限りなく大きくなる．

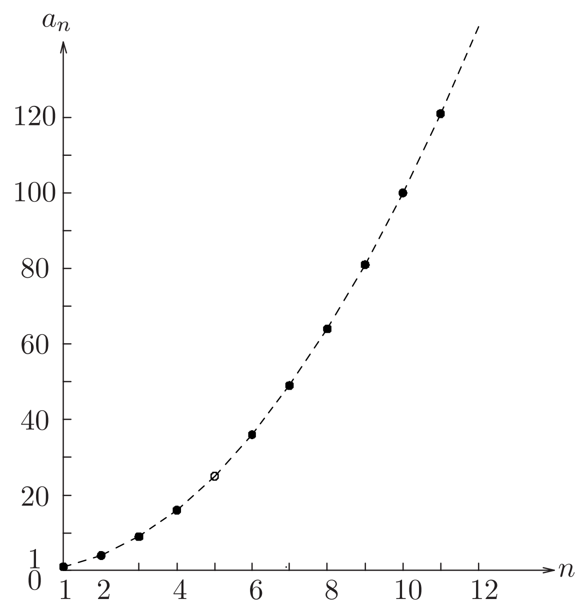


図 3.3: $\boxed{\textbf{Ex}}$ **3** の図

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **4** 等比数列：

$$-20,\ \ -40,\ \ -80,\ \ \cdots,\ \ -10\cdot 2^n,\ \ \cdots$$

図 4 のように，項数が大きくなるにつれ，項の値は限りなく小さくなる．つまり，値は負でその絶対値は限りなく大きくなる．

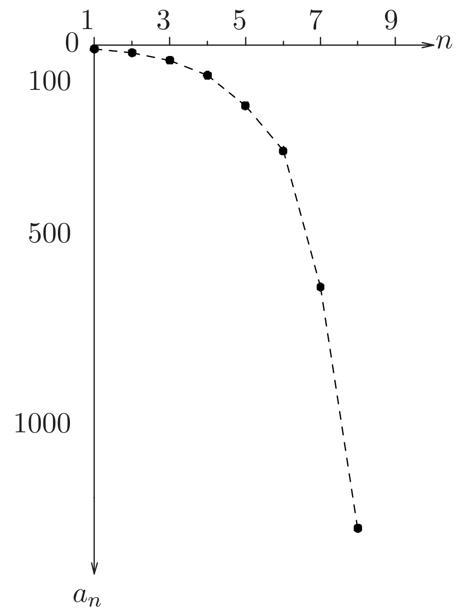


図 3.4: $\boxed{\textbf{Ex}}$ **4** の図

★ 収束する数列，極限

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **1**，$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**，が収束する数列である．
単調に変動せずに収束する数列もある．
$\boxed{\textbf{Ex}}$ **5** 等比数列：

$$8,\ \ -4,\ 2,\ \ -1,\ \ \cdots,\ 8\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \ \cdots$$

図 5 のように，a_n は正負に振 動しながらしだいに 0 に近づく．

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **1**，$\boxed{\textbf{Ex}}$ **2**，$\boxed{\textbf{Ex}}$ **5** のように，数列 $\{a_n\}$ において，項番号 n を十分大きくするとき，項の値 a_n が一定値 α に限りなく近づくとき，

$$\boxed{\begin{array}{c} n\to\infty \text{ のとき } a_n\to\alpha \\ \text{または,} \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \end{array}}$$

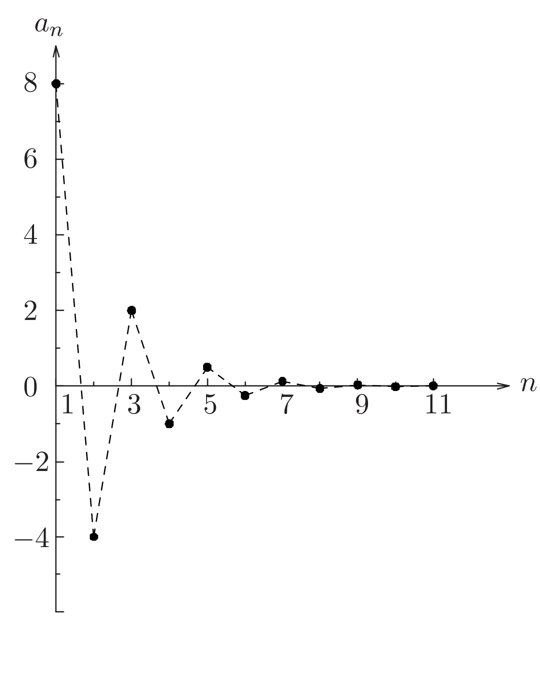


図 3.5: $\boxed{\textbf{Ex}}$ **5** の図

と書き，α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**と呼び，
極限値をもつ数列を**収束する数列**と言う．

★ 発散する数列

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **3** のように，数列 $\{a_n\}$ において，項番号 n を十分大きくするとき，項の値 a_n が収束せずに限りなく大きくなるとき，

$$\boxed{\begin{array}{c} n \to \infty \text{ のとき } \ a_n \to +\infty \\ \text{または,} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \end{array}}$$

と書き，数列は**正の無限大に発散する**と言う．

また，同じように考えると，$\boxed{\textbf{Ex}}$ **4** は，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

が成り立ち，数列は**負の無限大に発散する**と言う．

★ 振動する数列

数列が収束しない場合は，すべて「**発散する**」というが，発散する数列には，正負の無限大に発散する場合以外に，**振動する**場合がある．

$\boxed{\textbf{Ex}}$ **6** 数列：

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots,$$

図 6 のように振動する．発散の例である．

[注] $\boxed{\textbf{Ex}}$ **5** の数列は極限値に至る項の値が振動しているが，収束する数列なので振動する数列ではない．

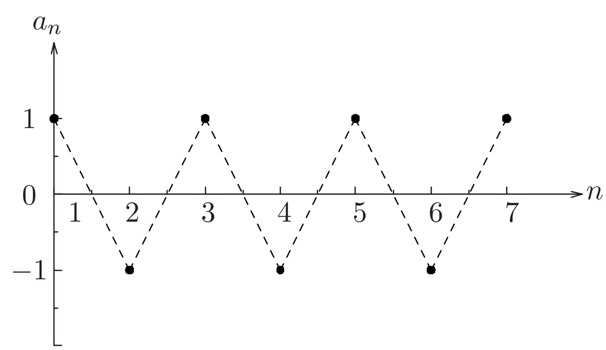


図 3.6: $\boxed{\textbf{Ex}}$ **6** の図

★ 有理数列の極限を求めるための基礎公式

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

問 6 つぎの極限を求めよ.

(1)(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}$　　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}$

(2)(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{100}{n+1}$　　(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{100}{n+1}\right)$

(3)(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2$　　(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-2n)$

(4)(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}$　　(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}$

★　等比数列の極限

等比数列 $\{a_1r^{n-1}\}$ で $a_1=1$ の場合を考える．$a_1\neq 1$ のときは，結果を a_1 倍すればよい.

公比 r の値による等比数列の極限

$$\begin{cases} |r|<1 & \text{のとき} \quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \\ r=1 & \text{のとき} \quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 1 \\ r>1 & \text{のとき} \quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = \infty \\ r \leqq -1 & \text{のとき} \quad \{r^n\}\text{ は振動する.} \end{cases}$$

問 7 つぎの極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-10\cdot 2^{n-1})$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{2^n+3^n}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{3^n}$

例 5

次の問題文中の **A** から **E** には，それぞれ −（負号，minus sign）か 0 〜 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

$a_1 = 1$，$a_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{2}a_k$ によって定義される数列を $\{a_n\}$ とする．数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_n - 2$ と定義するとき，$\{b_n\}$ は初項 $\boxed{\mathbf{AB}}$，公比（common ratio）$\dfrac{\boxed{\mathbf{C}}}{\boxed{\mathbf{D}}}$ の等比数列（geometric progression）となる．したがって，$n \to \infty$ のとき収束（converge）し，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\mathbf{E}}$$

となる．

【解】　$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1 \implies a_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{2}(a_n - 2),\quad (a_1 = 1)$

$$\implies b_n = a_n - 2 \;\;\&\;\; b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n,\quad (b_1 = a_1 - 2 = -1)$$

$\{b_n\}$ は初項 -1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比級数.

$$b_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = b_n + 2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 = \underline{\underline{2}}$$

（AB の【答】−1，C の【答】1，　D の【答】2，　E の【答】2）

3–2　無限級数

≪ この節で学ぶこと ≫

[**無限級数，部分和，等比級数の収束・発散，循環小数，その他の無限級数**]

★　級数・部分和

ある数列 $\{a_n\}$ の各項を加えていった和を

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

とおくとき，$\{S_n\}$ の極限，すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

を**無限級数**(むげんきゅうすう)，あるいは，**級数**と呼ぶ．また，S_n のことを**部分和**(ぶぶんわ)と言う．

★　等比級数

第 3 章 §2 等比数列の極限のまとめを用いれば，無限等比級数の値はかんたんに求められる．ここでも初項 1 の場合としよう．ここで，以下のまとめは

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + \cdots = \sum_{n-1}^{\infty} r^{n-1} = \sum_{n-0}^{\infty} r^n$$

とずらしてあることに注意.

$$\begin{cases} |r| < 1 & \text{のとき} \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \\ r \geqq 1 & \text{のとき} \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \infty \\ r \leqq -1 & \text{のとき} \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{N} r^n \text{は振動する.} \end{cases}$$

[注 1] $r = 1$ のときの証明.

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} 1^n = \lim_{N\to\infty}(N+1) = \infty$$

[注 2] 数学（基礎）第 4 章 §2 の $\boxed{\textbf{Ex}}$ **3** (42 ページ）水槽を満たす操作をどこまでも繰り返したとき，最終的に水槽 B にたまる水の量は

$$1280\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1280 \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2580\ l}}$$

問 8　つぎの等比級数の収束・発散を調べ，収束する場合にはその和を求めよ.

(1)　$64 + 16 + +4 + 1 + \cdots$　　(2)　$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

(3)　$2 - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \cdots$　　(4)　$1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \cdots$

例 6　次の問題文中の **A** から **I** には，それぞれ −（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい.

初項（first term）2，公比（common ratio）$-\dfrac{2}{3}$ の等比数列（geometric progression）$\{a_n\}$ を考える．このとき $b_n = a_{n+1}a_n$ $(n \geqq 1)$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は，

$$\text{初項} = \frac{\boxed{\textbf{AB}}}{\boxed{\textbf{C}}}, \quad \text{公比} = \frac{\boxed{\textbf{D}}}{\boxed{\textbf{E}}}$$

の等比数列になる．したがって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{\boxed{\textbf{FGH}}}{\boxed{\textbf{I}}}$$

である.

（日留試）

【解】

$$a_n = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1}a_n \\ &= 2^2\left(-\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \\ &= 4\left(-\frac{2}{3}\right)^{2(n-1)+1} \\ &= 4\left(-\frac{2}{3}\right)\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right\}^{n-1} \\ &= -\frac{8}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

したがって，

初項：$b_1 = \underline{\underline{-\frac{8}{3}}}$　（AB の【答】-8，C の【答】3）

公比：$r = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$　（D の【答】4，E の【答】9）

等比級数で，$|r| < 1$ だから収束し，

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{-\frac{8}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \underline{\underline{-\frac{24}{5}}}$$

（FGH の【答】 −24， I の【答】 5）

例 7　$x \neq \dfrac{1}{2}$ であるとき，次の無限級数

$$\frac{x}{1-2x} + \frac{x^2}{(1-2x)^2} + \frac{x^3}{(1-2x)^3} + \cdots$$

が収束する x の範囲を求めなさい．

（東京理科）

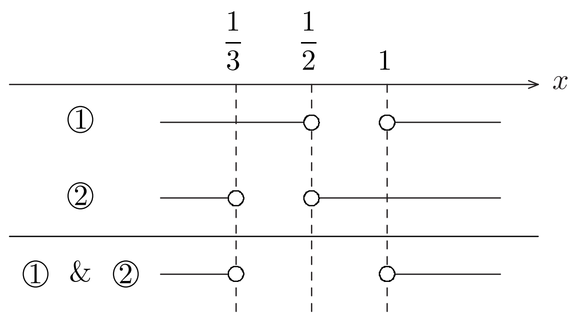
【解】 公比 $\dfrac{x}{1-2x}$ の等比級数の収束条件

$$\iff -1 < \frac{x}{1-2x} < 1 \iff \frac{x}{1-2x}+1>0 \ \ \& \ \ \frac{x}{1-2x}-1<0$$

$$\iff \frac{1-x}{1-2x}>0 \ \ \& \ \ \frac{-1+3x}{1-2x}<0$$

$$\iff (x-1)(2x-1)>0 \cdots ① \ \ \& \ \ (3x-1)(2x-1)>0 \cdots ①$$

収束条件：$\underline{\underline{x<\dfrac{1}{3} \ \text{ or } \ x>1}}$



★　循環小数

- 実数
  - 有理数
    - 整数
      - 正の整数
      - 0
      - 負の整数
    - 整数でない有理数（既約分数）$\cdots$
      - 有限小数
      - 循環小数
  - 無理数　$\cdots$循環しない小数

例 8　つぎの循環小数を分数で表せ．

(1)　$3.\dot{3}$　　　(2)　$0.\dot{4}2857\dot{1}$

【解】(1) つぎのように分解する．

$$
\begin{aligned}
3.\dot{3} &= 3.333\cdots \\
&= 3 + 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots \\
&= 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = 3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k
\end{aligned}
$$

これは初項 3，公比 $\dfrac{1}{10}$ の無限等比級数であって収束し，その極限値は

$$
3.\dot{3} = 3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 3\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}
$$

(2) 同様に，

$$
\begin{aligned}
0.\dot{4}2857\dot{1} &= 0.428571 + 0.000000428571 + 0.000000000000428571 + \cdots \\
&= \frac{428571}{10^6} + \frac{428571}{10^{12}} + \frac{428571}{10^{18}} + \cdots = \frac{428571}{10^6} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^6}\right)^k
\end{aligned}
$$

これは初項 $\dfrac{428571}{10^6}$，公比 $\dfrac{1}{10^6}$ の無限等比級数であるから収束するから，

$$
0.\dot{4}2857\dot{1} = \frac{428571}{10^6}\frac{1}{1-\frac{1}{10^6}} = \frac{428571}{999999} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}
$$

★　その他の無限級数

方針として差の形に直す．

例 9　数列（sequence）$\{a_n\}$ について

$$
a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{4}{3}n(n+1)(n+2)
$$

が成り立つ．このとき

(1) a_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ．

（千葉大）

【解】

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= \frac{4}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{4}{3}(n-1)n(n+1) = \underline{\underline{4n(n+1)}}$$

(2)

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rcl} \dfrac{4}{a_n} & = & \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \\ \dfrac{4}{a_{n-1}} & = & \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{4}{a_{n-2}} & = & \dfrac{1}{n-2} - \dfrac{1}{n-1} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{4}{a_2} & = & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{4}{a_1} & = & \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

辺々加えて

$$\Longrightarrow \quad 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_n} = \frac{n}{4(n+1)}}}$$

第4章 いろいろな関数表現

4–1　2 変数関数

≪ この節で学ぶこと ≫
[**不等式の表す領域，最大値・最小値問題**]

★　最大値・最小値

1 変数関数 $f(x)$ の最大値・最小値問題は，数学（基礎）第 2 章 §1（17 ページ）でやった．
2 変数関数 $f(x,\ y)$ の最大値・最小値問題の基本形式もほとんど同じで，

関数 $f(x,\ y)$ の**値域**	$\min \leqq f(x,\ y) \leqq \max$
変数 $x,\ y$ の**定義域**	$x,\ y$ の不等式が表す領域

問 9　次の問題文中の **A** から **F** には，それぞれ –（負号，minus sign）か 0 ∼ 9 の数字のいずれか一つが入る．適するものを選びなさい．

整式（polynomial）$P = 2x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 5$ は，

$$P = (x+y)^2 + \left(x + \boxed{\mathbf{A}}\right)^2 + \boxed{\mathbf{B}}$$

と変形できるので，$x = \boxed{\mathbf{CD}}$，$y = \boxed{\mathbf{E}}$ のときに最小値（minimum value）$\boxed{\mathbf{F}}$ をとる．

（日留試試行）

例 10

次の問題文中の **A** ～ **I** には，それぞれ，–（負号，minus sign）か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る。適するものを選びなさい.

$0 \leqq x+y \leqq 2,\ 0 \leqq x-y \leqq 2$ のとき, xy は

$$xy = \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{\boxed{\mathbf{A}}}$$

と変形できるから，$x = \boxed{\mathbf{B}}$,　$y = \boxed{\mathbf{C}}$ のとき最大値 $\boxed{\mathbf{D}}$ をとり，$x = \boxed{\mathbf{E}}$, $y = \boxed{\mathbf{FG}}$ のとき最小値 $\boxed{\mathbf{HI}}$ をとる.

【解】　式の計算

$$\begin{aligned}(x+y)^2-(x-y)^2 &= (x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)\\ &= 4xy\end{aligned}$$

$$xy = \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{\underline{\underline{4}}}$$

$u = x+y,\ \ v = x-y$ とおき，$xy = \dfrac{1}{4}(u^2-v^2) = f(u,v)$ とする.

また，$0 \leqq u \leqq 2,\ \ 0 \leqq v \leqq 2$

ここで，変数 $u,\ v$ についての関数 $f(u,v)$ について最大値・最小値を求める。

最大値・最小値を求めるには，きまった《手順》がある．まず，<u>定義域</u> と <u>値域</u> を明らかにする.

$$\left[\begin{array}{ll} f(u,v) = \dfrac{1}{4}(u^2-v^2) & \max \leqq f(u,\ v) \leqq \min \\ 0 \leqq u \leqq 2\ \&\ 0 \leqq v \leqq 2 & \text{（不等式の表す領域）}\end{array}\right.$$

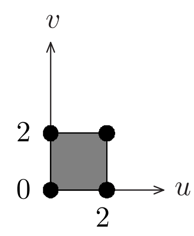


図 4.1:

$u,\ v$ の値域の範囲は上の図の斜線部（周を含む）v を固定すると，$f(u,v)$ は u を小さくすると小さくなり，u を大きくすると大きくなる.

（uv– 図で黒丸を付けた端の値が，最大・最小の候補である.）

$$f(u,v)=\frac{1}{4}(u^2-v^2)\ \&\ 0 \leqq u \leqq 2\ \&\ 0 \leqq v \leqq 2$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(u,v) \leqq f(2,v)=\frac{1}{4}(4-v^2) & \leqq f(2,0)=1 \\ f(u,v) \geqq f(0,v)=-\frac{1}{4}v^2 & \geqq f(0,2)=-1 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{lll} \text{最大値} & \underline{\underline{1}} & (u,v)=(2,0)\text{ のとき} \\ & & \text{すなわち } (x,y)=\underline{\underline{(1,\ 1)}}\text{のとき} \\ \text{最小値} & \underline{\underline{-1}} & (u,v)=(0,2)\text{ のとき} \\ & & \text{すなわち } (x,y)=\underline{\underline{(1,\ -1)}}\text{のとき} \end{array}\right.$$

（A の【答】4, B の【答】1 C の【答】1 D の【答】1, E の【答】1,
FG の【答】−1, HI の【答】−1）

4–2　指数関数・対数関数

≪ この節で学ぶこと ≫
[**オイラーの数，指数関数，自然対数**]

★　オイラーの数

オイラーの数：$e=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=2.718\cdots$（無理数）

例えば放射性原子核の数：$N=N_0e^{-\lambda t}$ というような関数形になる.

$$e^x=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{x}{k}}=\lim_{l\to 0}(1+lx)^{\frac{1}{l}},\ (k=lx)$$

指数関数：$y=e^x$

自然対数関数：$y=\log x$（底 e を省略. $y=e^x$ の逆関数.）

★　関数の極限

$$\lim_{x\to e}\log x=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\log x=+\infty$$

例 11　つぎの式を示せ.

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{x}$$

【証】 (1) $\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$

$$\iff \lim_{k\to 0}\log(1+k)^{\frac{1}{k}}=\log e=1$$

$$\iff \lim_{k\to 0}\frac{\log(1+k)}{k}=1$$

$h=\log(1+k)$ とおくと，$e^h=1+k$,　$k=e^h-1$

$$\iff \lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}=1$$

$$\iff \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \qquad \text{(Q, E, D)}$$

(2) 対数の定義より，$x>0$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}\\ &= \lim_{h\to 0}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\\ &= \lim_{h\to 0}\log e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \quad \text{(Q, E, D)}\end{aligned}$$

4–3　三角関数

≪ この節で学ぶこと ≫

[弧度法，倍角の公式，半角の公式]

★　弧度法

弧度法（こどほう）：$x\ [\mathrm{rad}] = \dfrac{\theta^\circ}{180^\circ} \times \pi$（$\pi$ は無理数）

$y = \sin\theta$ （θ は度）のグラフは，三角関数以外の関数 $y = f(x)$ と同じ xy 座標の平面上にグラフに描くことができない．理由は，θ が実数ではないからである．そこで度をやめて角度の測り方を実数に変えることにする．実数とは，数直線の原点からの長さで表すことができるものであるから，角度 x を長さで表すことを考える．角の大きさを長さで表すには，円を描いたときの，その角に対応する弧の長さを使えばよい．

しかし，弧の長さは円の大きさによって異なるから，半径 1 の円のときの弧の長さと定める．半径 1 の円周の長さは 2π であるから，いろいろな角度を弧度法で表すと，

180°	は	π
90°	は	$\dfrac{\pi}{2}$
60°	は	$\dfrac{\pi}{3}$
45°	は	$\dfrac{\pi}{4}$
30°	は	$\dfrac{\pi}{6}$

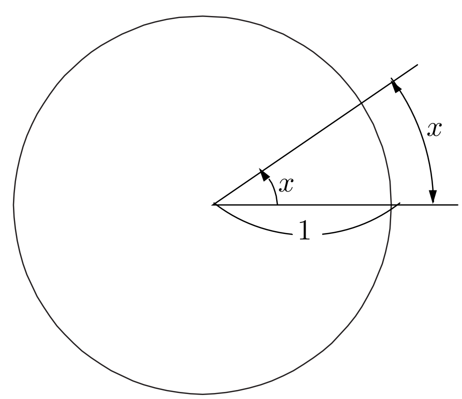


図 4.2:

Ex　$y = \sin x$ と直線 $y = x$ のグラフを同じ座標に描く.

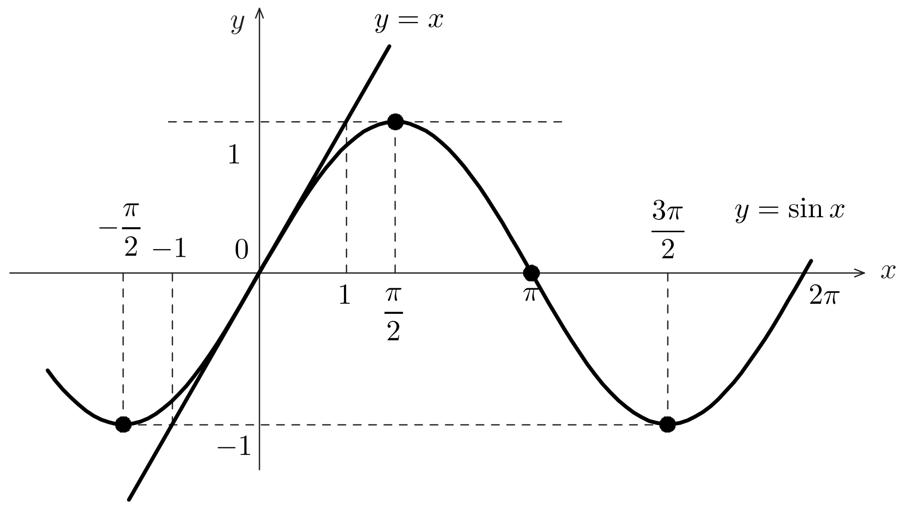


図 4.3:

★　関数の極限

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

例 12　つぎの極限を求めよ.

(1)(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\sin 2x}{x}$

(2)(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$　　(d) $\displaystyle\lim_{x \to x} \frac{1 - \cos x}{x}$

【解】(1)(a) $2x = y$ とおくと，$x \to 0$ のとき $y \to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} &= 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\\ &= 2\cdot 1 = \underline{\underline{2}}\end{aligned}$$

(b) $-1 \leqq \sin 2x \leqq 1 \quad \& \quad x > 0$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin 2x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \leqq \lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x} \leqq \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leqq \lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x} \leqq 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x} = \underline{\underline{0}}$$

(2)(c) $1 - \cos x = \dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\\ &= \frac{1}{1+1}\times 1^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

(d) (c) より，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{x^2}\cdot x\\ &= \frac{1}{2}\times 0 = \underline{\underline{0}}\end{aligned}$$

★　倍角の公式

数学（基礎）第 6 章 §3（77 ページ）で習った

$\sin$，$\cos$ の加法定理

【1】 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
【2】 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

で $\beta=\alpha$ とおくと，

$\sin$，$\cos$ の倍角（ばいかく）の公式

【1】 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
【2】 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

★　半角の公式

倍角の公式【2】で $\alpha\to\dfrac{\alpha}{2}$ とおきかえて式を変形すると，

$\sin$，$\cos$ の半角（はんかく）の公式

【1】 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)$
【2】 $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)$

例 13　$\sin\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

【解】

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\pi}{12} &= \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{8}\\ &= \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}+1^2\right) \ = \ 2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$\sin\dfrac{\pi}{12}>0$ であるから，

$$\therefore \quad \sin\frac{\pi}{12}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}}}$$

4–4　二次曲線

≪ この節で学ぶこと ≫

[**陽関数表示と陰関数表示，楕円，双曲線，双曲線の漸近線，放物線，パラメーター表示，サイクロイド**]

★　陽関数表示と陰関数表示

陽関数表示（ようかんすうひょうじ）：$y=f(x)$ の形．
陰関数表示（いんかんすうひょうじ）：$f(x,\ y)=0$ の形．

2 次曲線：$ax^2+hxy+by^2+fx+gy+c=0,\ (a\neq 0\ \text{ or }\ b\neq 0\ \text{ or }\ h\neq 0)$

グラフは $x,\ y$ の 1 次式の積に因数分解できて 2 直線となるときの他は，楕円，双曲線，放物線となる．

★　楕円

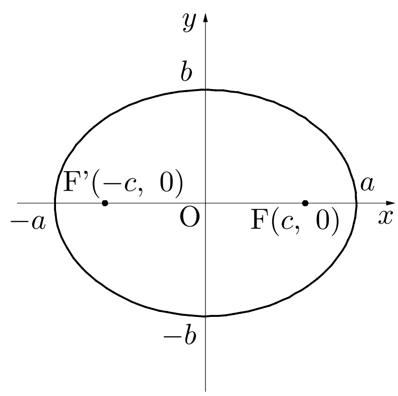


図 4.4:

楕円の方程式：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

楕円の接線の方程式：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

ただし，接点 $(x_0,\ y_0)$：$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$

【1】$a>b>0$ のとき, $c=\sqrt{a^2-b^2}$,
　焦点：$\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$,
　軌跡 $\mathrm{P}(x,\ y)\ |\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$（横長の楕円，図 4）

【2】$b>a>0$ のとき, $c=\sqrt{b^2-a^2}$,
　焦点：$\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F'}(0, -c)$,
　軌跡 $\mathrm{P}(x,\ y)\ |\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2b$（縦長の楕円）

★　双曲線

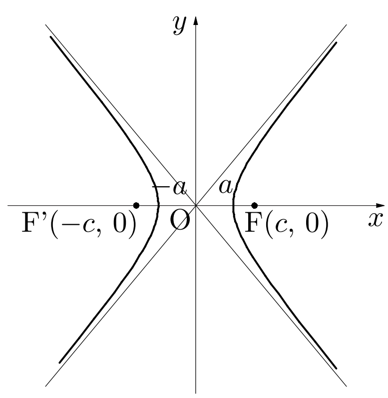


図 4.5:

双曲線の方程式：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 　or　 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

漸近線の方程式：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$

$$\left(\lim_{x\to\infty}\frac{y^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{b^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)=\frac{b^2}{a^2}\right)$$

【1】$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のとき, $c=\sqrt{a^2+b^2}$,
　焦点：$\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$,
　軌跡 $\mathrm{P}(x,\ y)\ ||\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|=2a$（左右の双曲線，図 5）

【2】$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ のとき, $c=\sqrt{a^2+b^2}$,
　焦点：$\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F'}(0, -c)$,
　軌跡 $\mathrm{P}(x,\ y)\ ||\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|=2b$（上下の双曲線）

★　放物線

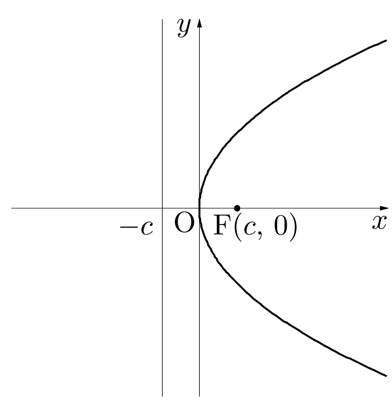


図 4.6:

放物線の方程式：$y^2-4cx=0$ 　or　 $x^2-4cy=0$

【1】$y^2-4cx=0$ は $c\neq0$ のとき,
　焦点：$\mathrm{F}(c, 0)$, **準線**：$x=-c$.
　軌跡 $\mathrm{P}(x,\ y)\ |\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$, $(\mathrm{H}(-c,\ y))$
　（左に凸の放物線，図 6）

【2】$x^2-4cy=0$ は $c\neq 0$ のとき，
焦点：$\mathrm{F}(0,\ c)$，**準線**：$y=-c$.
軌跡 $\mathrm{P}(x,\ y)\ |\mathrm{PF}=\mathrm{PH},\ \mathrm{H}(x,\ -c)$（下に凸の放物線)）

問 10 つぎの条件を満たす 2 次曲線の方程式を求めよ.

(1) 軸が x 軸，頂点が原点で，点 $(1,\ \sqrt{3})$ を通る放物線.
(2) 2 点 $(0,\ \sqrt{3})$，$(0,\ -\sqrt{3})$ を焦点とし，点 $(1,\ 0)$ を通る楕円.
(3) 2 点 $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$ を焦点とし，$y=\pm 2x$ を漸近線とする双曲線.

例 14 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$ の接線が両座標によって切り取られる線分の長さの最小値を求めよ.

（埼玉大）

【解】 図のように，両軸で切り取られる同じ長さの線分は x，y 軸に関して線対称な 4 本があるが，接点 $(x_0,\ y_0)\ \ (x_0>0,\ y_0>0)$ の場合を調べる.

接線の方程式：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$, ただし，$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$
両軸で切り取られる長さ：l

$$l=\sqrt{\left(\frac{a^2}{x_0}\right)^2+\left(\frac{b^2}{y_0}\right)^2}$$

相加平均 $\geqq$ 相乗平均の関係より，

$$\frac{1}{2}l^2=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a^2}{x_0}\right)^2+\left(\frac{b^2}{y_0}\right)^2\right\}\geqq\frac{a^2b^2}{x_0y_0}$$

等号の成立は，$\left(\dfrac{a^2}{x_0}\right)^2=\left(\dfrac{b^2}{y_0}\right)^2\ \ \&\ \ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$

$$\Longleftrightarrow\quad x_0=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \ \&\ \ y_0=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\min[l]=\underline{\underline{\sqrt{2(a^2+b^2)}}}$$

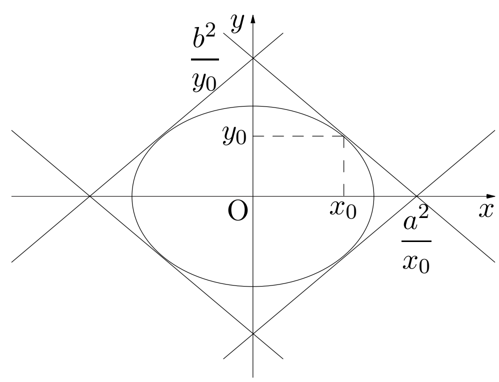


図 4.7:

そのときの接点の座標は，上記の x_0，y_0 の値を用いて，
$(x,\ y)=(x_0,\ y_0)$ or $(x_0,\ -y_0)$ or $(-x_0,\ y_0)$ or $(-x_0,\ -y_0)$

★　パラメーター表示

パラメーター表示（**媒介変数表示**）：曲線 C 上の点 P$(x,\ y)$ を

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

と表すこと．t：パラメーター（媒介変数）．

★　2 次曲線のパラメーター表示

【1】楕円：$x = a\cos t,\quad y = b\sin t.\ \ (0 \leqq t < 2\pi)$
【2】双曲線：$x = \dfrac{a}{\cos t},\quad y = b\tan t,\quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$
【3】放物線：$x = \dfrac{c}{t^2},\quad y = \dfrac{2c}{t}$

★　サイクロイド

サイクロイド：$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)$ で表せる曲線.

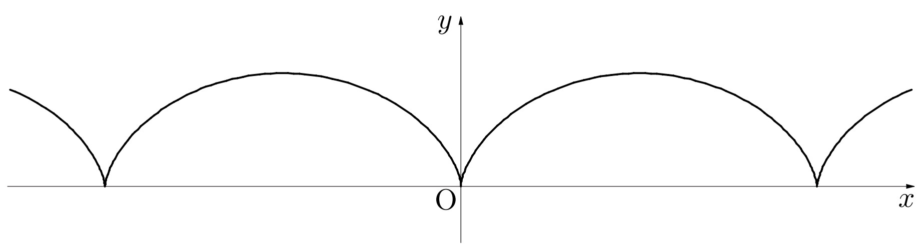


図 4.8: