トレーニング

$\boxed{1}$ 3 点 A(0,0)，B(1,0)，C(2,2) からなる $\triangle$ABC について，次の点を作図して求めよ．また，計算により，これらの点の座標を求めよ．

(1) **外心** O：3 角形の 3 つの辺の垂直 2 等分線は 1 点で交わる．また，この点 O を中心として頂点 A，B，C を通る 3 角形に外接する円が描ける．

(2) **重心** G：3 角形の各頂点と対辺の中点を結んだ線分は 1 点で交わる．また，点 G はこれらの線分を，頂点から中点を見て，2：1 に内分する．

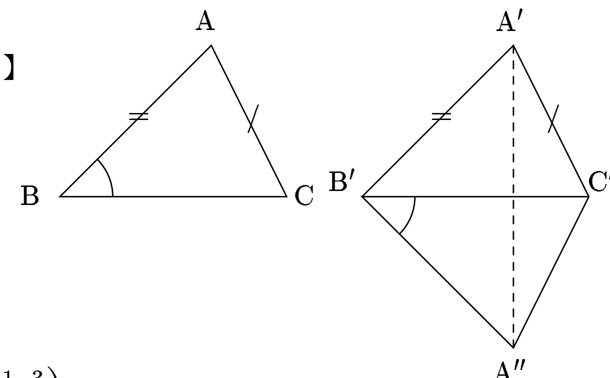
(3) **垂心** H：3 角形の各頂点から対辺，あるいは，対辺の延長におろした垂線は 1 点で交わる．

(4) **内心** I：3 角形の各内角の 2 等分線は 1 点で交わる．また，この点 I を中心として各辺 BC，CA，AB 上に接点を持ち 3 角形に内接する円が描ける．

(5) **傍心** $\mathrm{I_{BC}}$，$\mathrm{I_{CA}}$，$\mathrm{I_{AB}}$，：3 角形の 1 つの内角の 2 等分線と他の 2 つの外角の 2 等分線は 1 点で交わる．この点は 3 つある．また，例えば点 $\mathrm{I_{BC}}$ を中心として辺 BC および 辺 CA の延長，辺 AB の延長上に接点を持ち 3 角形に接する円が描ける．点 $\mathrm{I_{BC}}$ のみを求めよ．†

$\boxed{2}$ 次の定理を,「図形を重ねることができる.」ことを使わないで証明せよ．

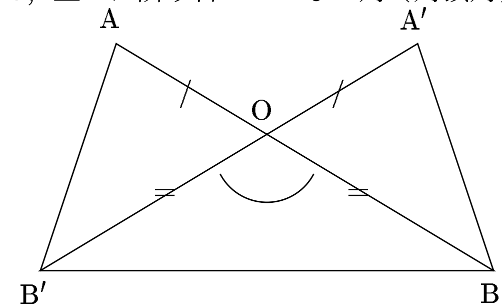
(1) **【3 角形の第 III 合同定理（ 3 辺）】**
$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ において，
$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}, \mathrm{AC} = \mathrm{A'C'}, \mathrm{BC} = \mathrm{B'C'}$
$\Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC} \cong \triangle\mathrm{A'B'C'}$
（$\mathrm{A''B'} = \mathrm{A'B'}, \angle\mathrm{A''B'C'} = \angle\mathrm{B}$
となる補助線 $\mathrm{A'B''}$ を引くとよい．）
‡



† $\boxed{1}$ の答：(1) 垂直 2 等分線の作図から．$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ (2) 中点の作図より．重心の座標は，まず，$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ を示すとよい．$\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$ この位置は各頂点に等質量の粒子を置いたときの質量中心に一致するし，薄くて一様な 3 角形の板の質量中心でもある．後者は定積分によって求める． (3) 1 点から直線へ垂線をひく作図より．直交する 2 直線：$y = px+q$ と $y = p'x+q'$ の関係は $pp' = -1$ を使う．(2,-1) (4),(5) 角の 2 等分の作図より．まず，点 (x_1, y_1) から直線 $ax+by+c=0$ 間での距離：$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を示して使う．BC:$2x-y-2=0$，CA:$x-y=0$，AB:$y=0$．内接円の半径:$r = -\dfrac{2x_1-y_1-2}{\sqrt{5}} = \dfrac{x_1-y_1}{\sqrt{2}} = \dfrac{y_1}{1}$．これを解いて，$x_1 = \dfrac{1}{6}(3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}), y_1 = \dfrac{1}{6}(\sqrt{2}-1)(3+2\sqrt{2}-\sqrt{5})$．傍心円の半径:$R = \dfrac{2x_2-y_2-2}{\sqrt{5}} = \dfrac{x_2-y_2}{\sqrt{2}} = \dfrac{y_2}{1}$．これを解いて，$x_2 = \dfrac{1}{2}(1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}), y_2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)(1+2\sqrt{2}+\sqrt{5})$

‡ $\boxed{2}$(1) の答： $\triangle\mathrm{A''B'C'} \cong \triangle\mathrm{ABC}$（ 2 辺夾角）．$\therefore \mathrm{A''C'} = \mathrm{AC}$．仮定より， $\mathrm{A''B'} = \mathrm{A'B'}, \mathrm{A''C'} = \mathrm{A'C'}$．**【2 等辺 3 角形の底角定理】**より，$\angle\mathrm{B'A''A'} = \angle\mathrm{B'A'A''}, \angle\mathrm{C'A'A'} = \angle\mathrm{C'A'A''}$．$\therefore \angle\mathrm{B'A''C'} = \angle\mathrm{B'A''A'} + \angle\mathrm{C'A''A'} = \angle\mathrm{B'A'A''} + \angle\mathrm{C'A'A''} = \angle\mathrm{B'A'C'}$．**合同公理【3】**より，$\angle\mathrm{A''B'C'} = \angle\mathrm{A'B'C'}$，$\therefore \triangle\mathrm{ABC} \cong \triangle\mathrm{A'B'C'}$

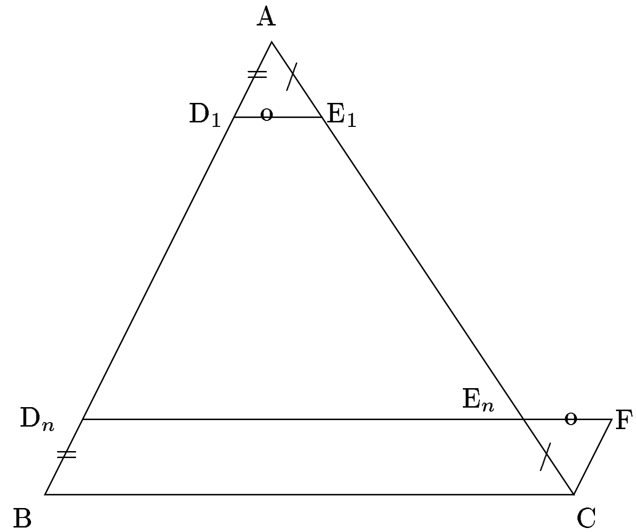
(2) **【対頂角の定理】**「2 直線が交わってつくる角で，互いに隣り合っていない角（対頂角）は合同である.」
直線 AB，$A'B^{|prime}$ の交点を O として，
$\angle AOB' = \angle A'OB$
（A，B，A'，B' 点を $OA = OA', OB = OB'$ となるようにとる.）[§]



$\boxed{3}$ △ABC において，辺 AB，AC 上の点を，それぞれ，D_1，E_2 とすると，n を自然数として，

$$AD_1 : D_1B = AE_1 : E_1C = 1 : n \Longrightarrow \overline{D_1E_1} \parallel \overline{BC}, D_1E_1 = \frac{1}{n}BC$$

を，数学的帰納法を用いて証明せよ．ただし，3 角形の相似条件は証明されていないとする．$AD_1 = D_nB, AE_1 = E_nB$ を満たすような点　D_n, E_n をとり，補助線 D_nE_n，および，直線 D_nE_n の延長上に $D_1E_1 = E_nF$ となる点 F をとる．[¶]



[§] $\boxed{2}$(2) の答：$\triangle B'OB$ に**【2 等辺 3 角形の底角定理】**を適用して，$\angle ABB' = \angle A'B'B$．$\triangle ABB' \cong \triangle A'B'B$（2 辺夾角）．$\therefore AB' = A'B$．$\triangle AB'O \cong \triangle A'BO$（3 辺）．$\therefore \angle AOB' = \angle A'OB$

[¶] $\boxed{3}$の答：$n = 1$ のときは，**中点連結の定理**だから，成り立つ．n のとき成立を仮定して，$n+1$ の場合を示す．$E_1A = E_nC, E_1D_1 = E_nF, \angle AE_1D_1 = \angle CE_nF$（2 辺夾角）$\therefore \triangle E_1AD_1 \cong \triangle E_nCF$．$\triangle E_1AD_1 \cong \triangle E_nCF_n$ より，$AD_1 = CF, \angle AD_1E_1 = \angle CFE_n$．この 2 つの角は**錯角**の関係にあるから，$\overline{AD_1} \parallel \overline{FC}$，すなわち，$\overline{BA} \parallel \overline{CF}$．$CD_n$は平行線 BA, CF　に交わる直線だから，錯角の関係より,$\angle BD_nC = \angle FCD_n$．$D_nB = AD_1 = CF, \overline{CD_n}$ は共通辺.$\angle BD_nC = \angle FCD_n \therefore \triangle D_nBC \cong \triangle CFD_n$．よって，$\angle D_nBC = \angle CFD_n (= \angle CFE_n) = \angle AD_1E_1$．
$\angle D_nBC = \angle AD_1E_1$ は同位角だから，$\overline{D_1E_1} \parallel \overline{BC}$【平行の証明終】また，$\triangle D_nBC \cong \triangle CFD_n$ より，$BC = FD_n$．$\therefore BC = D_nC_n + E_nF = (n+1)D_1C_1$【$\dfrac{1}{n+1}$ の証明終】この議論は，線分の比例，相似についての基礎，のみならず，単元 II でやる実数の話につながる．