1–3　幾何学と証明

≪ この項で学ぶこと ≫

[**定理と証明，幾何学の定理・公理，合同公理，命題の逆と必要条件・十分条件，条件と集合，証明法，3 角形の合同定理，平行線公理，解析幾何学，**]

★　定理と証明

前節では，点，角，図形を平面内で変換するというやや抽象的な操作を，作図によって具体的に実行できることとして考え，いろいろな図形の性質を示して来た．しかし例えば平行移動の作図法自体は，その手続きによって確かに平行移動の定義を満たすような点の移動が行われたかどうか，証明を必要とする．これは，他の作図法についても同様である．

しかし証明をする前に，まず,「証明をするということはどういうことなのか」について考えてみる．一般に，正しいか正しくないかを考えることのできる式や文を**命題**と言う．[*]ある命題が正しいとき，その命題は**真**である，あるいは,「成り立つ.」と言う．正しくない式や文も命題として取り上げられる．このような命題は**偽**であると言う．

2 つの命題 p,q を合成して,「p ならば q である.」，すなわち，
$p \Longrightarrow q$ の構造となっている式や文を**条件文**と呼ぶ．条件文も命題である．この命題を A とする．A の中で，p を命題 A の**仮定**，q を**結論**と言う．A を証明するとは，仮定 p に基づき結論 q を導く推論することである．また，こうして得られた真である命題 A を**定理**と呼ぶ．[†]

ある命題が真であるかは，その論証に誤りがないからその結論が真であるとするだけでなく，その仮定が正しいかどうかも検討をしてみることが大切である．

命題 $p \Longrightarrow q$ を，集合を使って表してみよう．

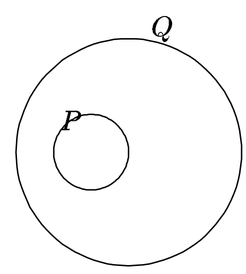

図 1.32: 命題 $p \Longrightarrow q$

例 1　(1) 命題　$x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$

(2) 命題 $\triangle$ABC は正 3 角形
　$\Longrightarrow \triangle$ABC において，AB $=$ AC

[*]IA-1-1 のトレーニング $\boxed{3}$ でも「命題」を試みに取り上げている．

[†]定理を得る推論を無限回重ねることは許されない．さらに，証明された命題の中の特別なものだけを定理と呼ぶ習慣もあるが，ここでは定理をより広い意味で使用する．

(1) では，

$$P = \{1\},\quad Q = \{1, -1\} \text{ とおくと}, P \subset Q$$

の関係が，命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることを表している．

(2) では，P を正 3 角形の集合，Q を 2 等辺 3 角形の集合とすると，$P \subset Q$ の関係が，命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることを表している．

一般に，条件 p を満たす要素の集合を P，条件 q を満たす要素の集合を Q とすると，「命題 $p \Longrightarrow q$ が成り立つことと，$P \subset Q$ は同じことである.」

問 1　$p \Longrightarrow q$ の形の，真の命題と偽の命題の例をあげよ．

★　幾何学の定理・公理

前節にある「平行移動の作図」の【1】の部分を，証明すべき命題として考察する．この命題をまとめると，

△CPQ において，CP，CQ 上の点を，それぞれ，A，B とすると，

$$\mathrm{CA} = \mathrm{AP},\ \mathrm{CB} = \mathrm{BQ} \quad \Longrightarrow \overline{\mathrm{AB}} \parallel \overline{\mathrm{PQ}}$$

となる．この内容は,「中点連結の定理」と名付けられた命題の結論の 1 つであるので，点の呼び名を付け替えて，この定理の証明を見て行こう．

例 2　中点連結の定理

「*3 角形の 2 つの辺の中点を結ぶ線分は，他の 1 辺に平行であり，その辺の半分に等しい.*」

すなわち，△ABC において，辺 AB，AC 上の点を，それぞれ，D，E とすると，

$$\mathrm{AD} = \mathrm{DB},\ \mathrm{AE} = \mathrm{EC} \Longrightarrow \overline{\mathrm{DE}} \parallel \overline{\mathrm{BC}},\ \mathrm{DE} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} \quad (1.14)$$

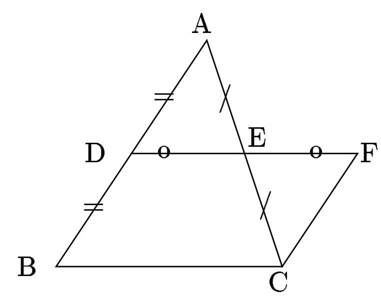

図 1.33: 中点連結の定理

この定理では，まず，

「△ABC において，辺 AB，AC 上の点を，それぞれ，D，E とする.」

も仮定のうちであるが，全体にかかる仮定なので，以下ではこの枠内で考察することにする．その下での仮定は，

【仮定 1】 AD = DB

【仮定 2】 AE = EC

という 2 つの部分にである．この定理の結論も 2 つあって，

【結論 1】 $\overline{\mathrm{DE}} \parallel \overline{\mathrm{BC}}$

【結論 2】 $\mathrm{DE} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$ である．

【証明】直線 DE（線分 $\overline{\mathrm{DE}}$ の延長線）上に，$\mathrm{DE} = \mathrm{EF}$ となる点 F をとる．別の言い方をすれば，この条件にしたがう線分 $\overline{\mathrm{EF}}$ と $\overline{\mathrm{CF}}$ の**補助線**を引く．

$\triangle\mathrm{EAD}$ と $\triangle\mathrm{ECF}$ に，前節でやった **3 角形の合同条件 I（ 2 辺夾角）**を適用する．すなわち，

$$\mathrm{EA} = \mathrm{EC},\ \mathrm{ED} = \mathrm{EF},\ \angle\mathrm{AED} = \angle\mathrm{CEF} \Longrightarrow \triangle\mathrm{EAD} \cong \triangle\mathrm{ECF}$$

が成り立つ．2 辺が等しいことは,**【仮定 2】**と補助線の関係より明らかである．$\angle\mathrm{AED}$ と $\angle\mathrm{CEF}$ は**【対頂角の定理】**（後で証明する．）なので等しい．

$\triangle\mathrm{EAD} \cong \triangle\mathrm{ECF}$ より，$\mathrm{AD} = \mathrm{CF}, \angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{CFE}$．この 2 つの角は**錯角**の関係にあるから,**【錯角の定理】**（後で証明する．）より，$\mathrm{AD} \parallel \mathrm{FC}$，すなわち，$\overline{\mathrm{BD}} \parallel \overline{\mathrm{CF}}$

次に，点 C と点 D を結んでできる $\triangle\mathrm{DBC}$ と $\triangle\mathrm{CFD}$ に，再び，**3 角形の合同条件 I（ 2 辺夾角）**を適用する．すなわち，$\overline{\mathrm{CD}}$は平行線 BD,CF　に交わる直線だから,**【錯角の定理】**より,$\angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{FCD}$

$$\mathrm{DB} = \mathrm{AD} = \mathrm{CF}\text{【仮定 2】},\overline{\mathrm{CD}}\text{は共通辺}.\angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{FCD} \Longrightarrow \triangle\mathrm{DBC} \cong \triangle\mathrm{CFD}$$

よって，$\angle\mathrm{DBC} = \angle\mathrm{CFD}(= \angle\mathrm{CFE}) = \angle\mathrm{ADE}$．　$\angle\mathrm{DBC}$ と $\angle\mathrm{ADE}$ は**【同位角の定理】**（後で証明する．）より，で等しいから，$\overline{\mathrm{DE}} \parallel \overline{\mathrm{BC}}$ **【結論 1 の証明終】**

また，$\triangle\mathrm{DBC} \cong \triangle\mathrm{CFD}$ より，$\mathrm{BC} = \mathrm{FD} = 2\mathrm{DE}$．故に，$\mathrm{DE} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$ **【結論 2 の証明終】**

証明のやり方は 1 通りではなく，別の方法もある．

問 2　中点連結の定理を，3 角形の相似条件を使って証明せよ．[‡]

推論に誤りがなければ，全体の論理が正しいと考えてしまいがちであるが，推論の中でどのような定理を使ったか，証明すべき命題に掲げられている以外の仮定も使っていないか，に注意を向ける必要がある．

例 1　の証明では，まず，3 角形の合同条件 I（ 2 辺夾角）を 2 度使っている．この条件は前節で，一方の 3 角形を移動して他方の 3 角形に重ね合わせることができることから，正しいと考えた．ところが，図形の移動を具体的に実行するための作図法の 1 つを証明するためには，中点連結の定理を必要とした．そして，その中点連結の定理を証明するために 3 角形の相似条件 I を使ったのである．このような推論を**循環論法**と言い，誤った論理の代表的なものである．[§]つまり，仮定が真であることが，けっきょくは結論が真で

[‡] 問 2 の答：$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{ADE}$ に，**3 角形の相似条件 I（ 2 辺の比と夾角）を適用する．**$\angle\mathrm{ABC}$ **と** $\angle\mathrm{ADE}$ **は同位角で等しいから，**$\mathrm{DE} \parallel \mathrm{BC}$．相似比が $\dfrac{1}{2}$ だから，$\overline{\mathrm{DE}} = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$．ただし，いろいろな相似定理はこの節のトレーニングで触れるように，実は中点連結の定理を出発点としている公理系が多いから，これも循環論の可能性がある例である．

[§] ニュートンの運動法則の中で，質量を定めることと，力を定めることが循環論法の傾向をもっていることはよく問題となる．

あることに依存し，相互に堂々めぐりをしている偽の論証なのである.「キミの家はどこにあるか.」と言う問いに対して,「八百屋さんの隣.」「じゃあ，八百屋さんはどこにあるの.」「ボクの家の隣.」という会話の類である.

一般に，ある定理を証明するには，いくつかの定理を使う．使った定理は，その前に証明されていなければならないものである．このようにさかのぼって行ったとき，出発点に証明を必要としないいくつかの命題なしには，推論の体系を考えることは不可能であることが分かる．出発点に選ぶべき命題を**公理**と呼ぶ．公理は相互に矛盾のないもの，他の公理からこれを導くことのできないような独立なものであって，少数であることが望ましいが，幾何学なら幾何学のすべての定理がこれらの公理系（前提として選ばれた公理の集まり）から証明できなければならない．しかし，どの公理系から出発するかは研究の余地があるものである.

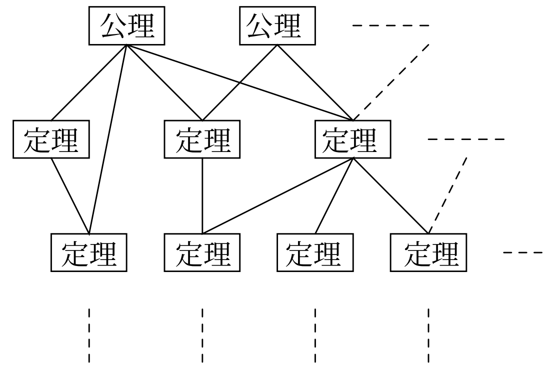

図 1.34: 公理系

★　合同公理

ヒルベルト（1862-1943）の採用した幾何学の公理系の中には，一群の**合同公理**と呼ばれるものがある．[¶]

【1】線分 $\overline{\mathrm{AB}}$ と $\mathrm{A'}$ を始点とする半直線 l が与えられたとき，$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ となる点 $\mathrm{B'}$ がただ 1 つ存在する.

【2】O を始点とする 2 つの半直線 OA，OB と，$\mathrm{O'}$ を始点とする半直線 $\mathrm{O'A'}$ が与えられたとき，$\mathrm{O'A'}$ を延長した直線の与えられた側にあり，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{A'O'B'}$ となる半直線 $\mathrm{O'B'}$ がただ 1 つ存在する．[‖]

【3】2 つの 3 角形 $\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ において

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'},\ \mathrm{AC} = \mathrm{A'C'},\ \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A'} \Longrightarrow \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B'},\ \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{C'} \tag{1.15}$$

【1】は線分の合同,【2】は角の合同について規定したものであるが，点，直線，平面という幾何学的対象を天下りに（無定義で）認めているが，それ以外は図をまったく使わなくても証明できる，つまり，人の持つ図形的な直観を推論の中に交えることを排除した．[**]前節の等長変換が出発する立場は，作図法を証明なしに認める訳ではなく，もっと直観的な「図形の移動」を公理として認め，

[¶]合同公理の中には，以下の【1】,【2】,【3】以外にも，線分について，和を保証するもの，反射律，対称律，推移律等も含まれるが，厳密な議論をするのがここでの目的ではないので，取り上げない.

[‖]線分や角の大きさの計量が，まだ，できるかどうか決まっていない段階では，$\overline{\mathrm{AB}} \cong \overline{\mathrm{A'B'}}$，および，$\angle\mathrm{AOB} \cong \angle\mathrm{A'O'B'}$ と書くべきであるが，ここでは，単に ＝ としておく.

[**]「点や直線の代わりに，机やいすとしてもよい.」（ヒルベルトの言葉）

「図形は，大きさや形を変えずに移動することができる.」
ことを出発点の 1 つとする別の立場であり，前者が静的な幾何学とすれば，後者は動的な幾何学と言えるだろう.

どの立場であろうと，数学は実験科学ではないのだから，幾何学が物理的な空間や形を変えない物体である剛体の運動とか，実際の自然現象のおこる空間やその中の物体をその基礎においている訳ではないことに注意しよう．原子の世界では物体は形を変えずに運動してはいない．ガモフの「不思議の国のトムキンス」という本には，光速を時速 20 キロメートル（実際の約 5 千万分の 1）としたため，自転車とこれに乗って走る人が運動方向に平たくなっている世界が書かれている.

【3】からすぐ証明できる定理が **2 等辺 3 角形の底角の定理**である．2 等辺 3 角形は，2 辺が合同な 3 角形であり，その底角とは，合同な 2 辺にはさまれている以外の角である.

例 3　2 等辺 3 角形の底角の定理

「2 等辺 3 角形の 2 つの底角は互いに等しい.」

$\triangle$ABC において，

【仮定】 AB $=$ AC

【結論】 $\angle B = \angle C$

【証明】 2 つの 3 角形 $\triangle$ABC，$\triangle$A$'$B$'$C$'$ がともに 2 等辺 3 角形であるとする.

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'} < \mathrm{AC} = \mathrm{A'C'},\ \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A'} \Longrightarrow \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B'},\ \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{C'}$$

は，上の**合同公理**【3】をそのまま述べたものである．ここで，AB $=$ AC（**【仮定】**）であるから，再び，**合同公理**【3】より，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'C'},\ \mathrm{AC} = \mathrm{A'B'},\ \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A'} \Longrightarrow \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C'},\ \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{B'}$$

故に，$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B'} = \angle\mathrm{C}$【**結論**の証明終】

問 3　正 3 角形とは,3 辺が合同な 3 角形のことである．命題

「 正 3 角形の 3 つの角はすべて等しい.」

ことを証明せよ．[††]

さらに,【3】から，前節で「 3 角形の合同条件 I，II，III」としていた命題を証明することができるのであるが，その前に論証の方法について，いくつかのことを学んでおこう.

★　命題の逆と必要条件・十分条件

命題 $p \Longrightarrow q$ に対して，仮定と結論を入れ換えてつくられる命題 $q \Longrightarrow p$ を命題 $p \Longrightarrow q$ の**逆**と呼ぶ.

[††] 問 3 の答：合同定理【3】をもう一度使うか，例 3 の定理を使う.

$\boxed{\text{例}}$ 1 (1),(2) の逆は，共に偽であることは，集合の図より明らかであろう．一般に，「$p \Longrightarrow q$ が真であっても，その逆 $q \Longrightarrow p$ は必ずしも真ではない.」

命題 $p \Longrightarrow q$　が成り立つとき，すなわち，$P \subset Q$ のとき，p を q の**十分条件**,，q を p の**必要条件**と呼ぶ．また，$p \Longrightarrow q$ と $q \Longrightarrow p$ がともに成り立つ，すなわち，$P \subset Q$ かつ $P \supset$ だから，$P = Q$ のときを **必要十分条件**, あるいは，**同値**と言い，記号 $p \Longleftrightarrow q$ で表す.

例 **4**　(1)　命題「$x = 0 \Longrightarrow xy = 0$」が成り立つから，

$xy = 0$ は $x = 0$ であるための必要条件．$x = 0$ は $xy = 0$　であるための十分条件.

(2) 逆命題「$xy = 0 \Longrightarrow x = 0$」は成り立たない.

(3)　命題「$xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ または $y = 0$」が成り立つから，

$x = 0$ または $y = 0$ は $xy = 0$ であるための必要十分条件.

例 **5**　$\boxed{\text{例}}$ 2 の中点連結の定理において，

「△ABC において，辺 AB,AC 上の点を，それぞれ,D,E とする.」

に加えて,【**仮定** 1】AD = DB を命題全体のかかる仮定と考え，

(1)　【**仮定** 2】AE = EC　$\Longrightarrow$【**結論** 1】$\overline{\mathrm{DE}} \parallel \overline{\mathrm{BC}}$

この命題を文章にすると，

「△ABC の辺 AB 上の中点 D から，辺 AC 上の中点 E を結ぶ直線 DE は，底辺 BC に平行である.」

（これを，以下，命題 $p_2 \Longrightarrow q_1$ と呼ぶ.）となり，この逆の命題は，

「△ABC の辺 AB 上の中点 D から，底辺 BC に平行に引いた直線は，辺 AC の中点 E を通る.」

（これを，以下，命題 $q_1 \Longrightarrow p_2$ と呼ぶ.）となる．この場合，逆命題も成り立つ.

(2)　【**仮定 2**】AE = EC　$\Longrightarrow$【**結論 2**】DE = $\dfrac{1}{2}$BC

この命題を文章にすると，

「△ABC の辺 AB 上の中点 D から，辺 AC 上の中点 E を結ぶ線分 $\overline{\mathrm{DE}}$ は，線分 $\overline{\mathrm{BC}}$ の半分に等しい.」

（これを，以下，命題 $p_2 \Longrightarrow q_2$ と呼ぶ.）となり，この逆の命題は，

「△ABC の辺 AB 上の中点 D から，引いた直線が辺 AC と交わる点 E としたとき，線分 $\overline{\mathrm{DE}}$ が線分 $\overline{\mathrm{BC}}$ の半分に等しいならば，点 E は辺 AC 上の中点である.」

（これを，以下，命題 $q_2 \Longrightarrow p_2$ と呼ぶ.）となる．この場合は，逆命題は真ではない．このことは作図をしてみれば，辺 AC 上に $\overline{\mathrm{DE}}$ が $\overline{\mathrm{BC}}$ の半分の距離であっても，AC の中点とはならない点 E が選べるからである．この点は DE が BC に平行でない点でもある.

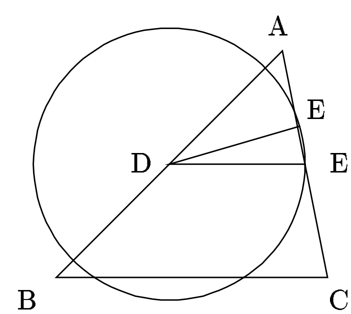

図 1.35: 命題 $p_2 \Longrightarrow q_2$

問 **4** 以下で，p は q であるための必要条件か，十分条件か，あるいは，必要十分条件か．

(1) p ：x は 12 の倍数，　q：x は 6 の倍数．
(2) p ：$3x-2=1$，　q：$x=1$ ．
(3) 2 つの 3 角形において，　p ：面積が等しい，　q：合同である．
(4) △ABC において，p ：$\angle \mathrm{A} < \dfrac{\pi}{2}$ ，　q：鋭角 3 角形．
(5) △ABC において，　p ：$\angle \mathrm{A} > \dfrac{\pi}{2}$ ，　q：鈍角 3 角形．*†

★　条件と集合

命題 p に対して，その**否定**，つまり,「p でない.」という命題を $\neg p$ という記号で表す．
「 命題 p について，p または $\neg p$ のどちらかが真であり，他は偽である．どちらも成り立つということはない.」

命題 p を満たすものの集合を P，命題 q を満たすものの集合を Q，全体集合を U とすると，
【1】「p でない」($\neg p$）と $\overline{P}$ は，同じことである．
【2】「p かつ q」 と $P\cap Q$ は，同じことである．
【3】「p または q」 と $P\cup Q$ は，同じことである．

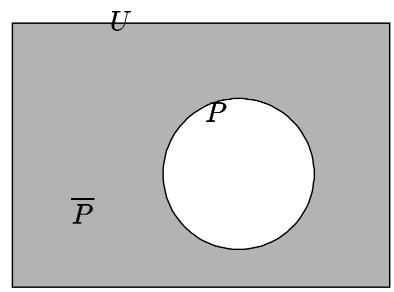

図 1.36: p でない

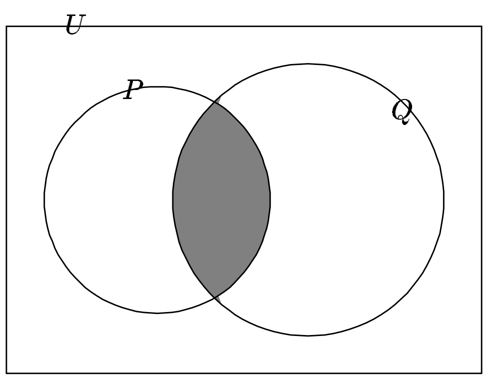

図 1.37: p かつ q

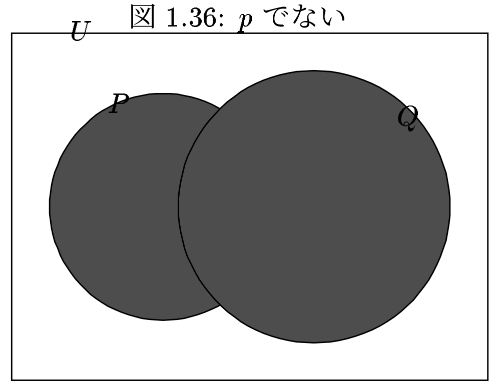

図 1.38: p または q

例 **6** 例 2 の中点連結の定理では，
「△ABC において，辺 AB，AC 上の点を，それぞれ，D，E とする.」

---

*この節の公理系では，まだ，長さも直角も定義していない．したがって，面積，鋭角も鈍角も説明できないのだが，ここでは思考訓練として便宜的に使う．

†問 4 の答：(1) 十分条件 (2) 必要十分条件 (3) 必要条件 (4) 必要条件 (5) 十分条件

言い換えれば,「任意の 3 角形に直線が交わっている図」の集まりが，全体集合 U であるが，$\boxed{\text{例}}$ 4 のような解釈をすれば,「直線が 3 角形の 1 辺の中点と交わる図」の集まり P_1 を全体集合と考えていることになる．すでに見たように，問題の条件を落としたりしない限り，考える範囲，つまり，全体集合をできるだけ狭く選ぶのが取り扱いのこつである．しかしここでは，元に戻って以下の集合を考える．

U ···3 角形に直線が交わっている図の集合
P_1 ···直線が 3 角形の 1 辺の中点を通る図の集合
P_2 ···直線が 3 角形の 2 辺の中点を通る図の集合
Q_3 ···3 角形の 1 辺に平行な直線が他の 2 辺と交わっている図の集合
Q_4 ···3 角形と直線の 2 交点間の距離が，直線と交わらない辺の長さの半分となっている図の集合

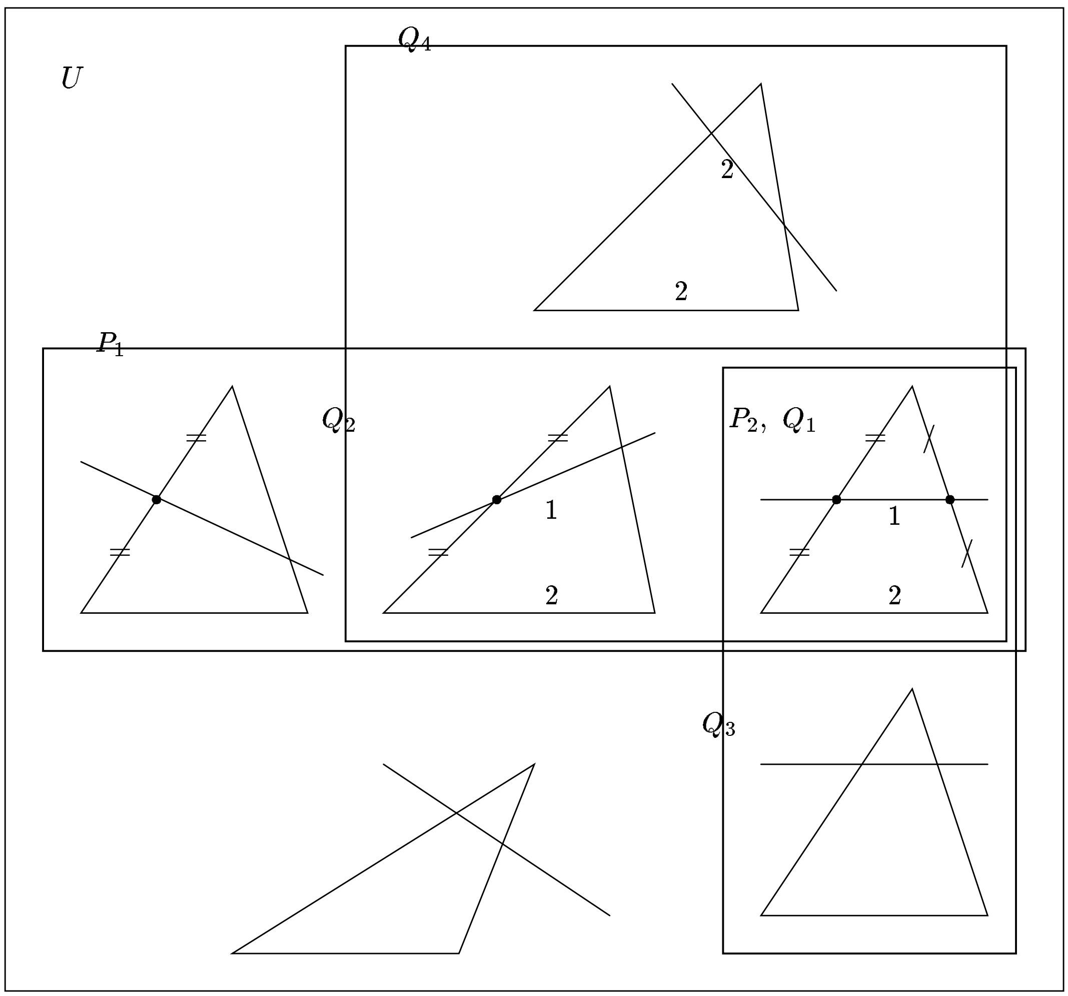

図 1.39: 中点連結の定理の構造

この場合，$P_2 \subset P_1$ であり，$P_2 = P_1 \cap P_2$ となっているから，この定理の仮定は，P_2 である．結論の一つは，Q_3 であり，もう一つの結論は Q_4 である．証明すべき命題は「**【仮定 】**AD = DB かつ AE = EC $\Longrightarrow$ **【結論 1】**$\overline{\mathrm{DE}} \parallel \overline{\mathrm{BC}}$ 」が成り立つのは，$P_2 \subset Q_3$. および,「**【仮定 】**AD = DB かつ AE = EC $\Longrightarrow$ **【結論 2】**DE = $\frac{1}{2}$BC 」が成り立つのは，$P_2 \subset Q_4$ の関係があるということである．また，必要十分条件の証明問題とするなら，$P_2 = Q_3 \cup Q_4$ で，$\boxed{\text{例}}$ 2 ではまだ逆は証明していない．

集合を表す図が成り立つならば，命題「△ABC の辺 AB 上の中点 D から，底辺 BC に平行に引いた直線は，辺 AC の中点 E を通り，DE = $\frac{1}{2}$BC である.」も，$P_1 \cap Q_3 \subset P_2 \cup Q_4$ も証明できるはずである．

$\boxed{\textbf{問}}$ **5** 中点連結の定理を $\boxed{\text{例}}$ 4 のように解釈し，$P_1 \cap Q_3 = Q_1$，$P_1 \cap Q_4 = Q_2$ とおいて，集合の図を描き直し，P_2, Q_1, Q_2 の間に成り立つ関係を示せ．‡

$\boxed{\boxed{\textbf{例}}}$ **7** 次の関係と $\boxed{\text{問}}$ 5 の関係を，ド・モルガンの法則と呼ぶ.

$$\neg\{p \text{ かつ } q\} \Longleftrightarrow \neg p \text{ または} \neg q$$

は，集合の関係では，

$$\overline{P \cap Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \cup \overline{Q}$$

上左の図で白い部分を表すのに，2 通りの表現が同値であることが分かる．

$\boxed{\textbf{問}}$ **6** 次の関係を，集合の記号で表せ．§

$$\neg\{p \text{ または } q\} \Longleftrightarrow \neg p \text{ かつ} \neg q$$

★ 証明法

【1】対偶を証明する 命題 $p \Longrightarrow q$ に対して，命題 $\neg q \Longrightarrow \neg p$ をその**対偶**と言う．¶

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$$

の関係があることは，

$$P \subset Q \Longleftrightarrow \overline{Q} \subset \overline{P}$$

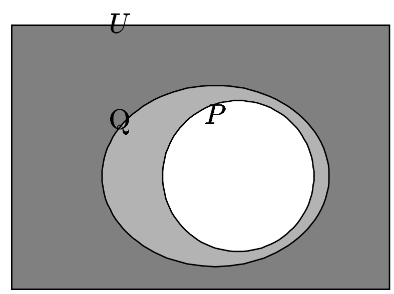

図 1.40: 対偶

を図で調べればよい．ある命題を証明する代わりに，対偶を証明するという証明法もある．

‡ $\boxed{\text{問}}$ 5 の答：全体集合 $P_1 \supset P_2 \cup Q_1 \cup Q_2$ の中で，$P_2 \subset Q_1, Q_1 \subset P_2, P_2 \subset Q_2$

§ $\boxed{\text{問}}$ 6 の答：$\overline{P \cup Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \cap \overline{Q}$

¶「裏」はたいして使うことはないから，教えない．

例 **8**　整数 n の平方が偶数のとき，n も偶数であることを証明せよ．

【証明】この命題の対偶は,「n が奇数のとき，n^2 は奇数」だから，これを証明すればよい．m を整数とすると，

$$n = 2m+1 \text{ と表せるから}, n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2+4m+1$$

$4m^2+4m$ は偶数だから，n^2 は奇数である．

問 **7**　整数 n の平方が 3 の倍数のとき，n も 3 の倍数であることを証明せよ．‖

【2】**反例** 命題「$p \Longrightarrow q$」が成り立たないことを証明するには,「p であるのに $\neg q$」の例をただ一つ示せばよい．はじめの命題は $P \subset Q$ でないということであるから，ある要素 a が $a \in P$ かつ $a \notin Q$ ことを言えばよい．

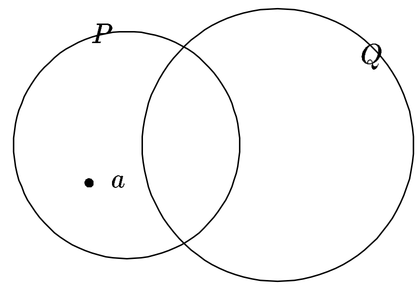

図 1.41: 反例

例 **9**　命題

「n が自然数のとき，n^2-n+41 は素数である.」

を考えてみよう．$n \leqq 40$ に対しては，n^2-n+41 は確かに素数となるが，$n=41$ のとき，$n^2-n+41=41^2$ となり，この命題は成り立たない．$n=41$　がこの命題の反例である．

問 **8**　命題

「$x<1 \Longrightarrow x^2<1$」

が偽であることを証明せよ．**

【3】**背理法** 「結論の否定を仮定して，矛盾を導く」証明法である．すなわち，

$$p \Longrightarrow q \text{ を証明するのに} \neg p \Longrightarrow q \text{ かつ} \neg q \text{ を導く．}$$

q かつ$\neg q$ は矛盾である．

この方法は，次の項でさっそく用いる．

【4】**数学的帰納法** 自然数に関する条件 $P(n)$ がすべての自然数 n について成り立つことを証明する場合の証明法.

1° $P(1)$ が成り立つ．

2° $P(m) \Longrightarrow P(m+1)$

‖ 問 7 の答：$n=3m+1$ または $n=3m+2$ とおいて,「n が3の倍数でなければ,n^2 も3の倍数でない.」を証明する.

** 問 8 の答：例えば，$x=-2$ 等をあげればよい．

例 10 凸 $(n+2)$ 角形の内角の和は $n\pi$ に等しいことを証明するには,
1° $n=1$, すなわち, 3 角形の内角の和が π（2 直角）に等しい. よく知られた定理であるが, 証明は後回しとする.
2° m 角形の内角の和が $m\pi$ に等しいこと仮定すると, $(m+1)$ 角形を m 角形と 3 角形に分けると, $(m+1)$ 角形の内角の和は m 角形の内角の和に 3 角形の内角の和を加えたものに等しいから, $(m+1)\pi$ に等しい.
故に, 命題はすべての 凸 $(n+2)$ 角形について成り立つ.

この証明法は, II-1 で数列を取り扱うときの有力な武器となる.
「帰納法」という用語は, 自然科学では個々の観測的事実から一般的な法則を導き出す推理法を指す. この場合は証明している訳ではない.

★ 3 角形の合同定理

」前節で「**3 角形の合同条件 I, II, III**」と呼んでいた命題を, 合同公理に基づいて証明し直して, これらを改めて「**3 角形の第 I, II, III 合同定理**」と呼ぶことにしよう. しかし, その前に図形の移動なしに考える立場から, 3 角形の合同に関して定義し直しておく.
【定義】2 つの 3 角形 $\triangle\mathrm{ABC}$, $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は

$$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'},\mathrm{AC}=\mathrm{A'C'},\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'},\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A'},\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{B'},\angle\mathrm{C}=\angle\mathrm{C'}$$

のとき合同, $\triangle\mathrm{ABC}\cong\triangle\mathrm{A'B'C'}$ である.

例 11 3 角形の第 I 合同定理（2 辺夾角）
(1.8) 式である. $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ において,
【仮定】$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'},\mathrm{AC}=\mathrm{A'C'},\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A'}$
【結論】$\triangle\mathrm{ABC}\cong\triangle\mathrm{A'B'C'}$

【証明】合同公理【3】より, $\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'},\mathrm{AC}=\mathrm{A'C'},\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A'}$ **【仮定】**$\Longrightarrow\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{B'}$, $\angle\mathrm{C}=\angle\mathrm{C'}$ **【結論 1】**.
$\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'}$ を示すために, 背理法を使う.
$\mathrm{BC}\neq\mathrm{B'C'}$ と仮定する. $\overline{\mathrm{BC}}$ と $\overline{\mathrm{B'C'}}$ の長いほう線分上に（今, 例えば, $\mathrm{BC}>\mathrm{B'C'}$ とすると, $\overline{\mathrm{BC}}$ 上に）, $\mathrm{B'C'}\neq\mathrm{BD}$ となる点 D をとる.
$\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ において, $\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$,$\mathrm{BD}=\mathrm{B'C'},\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{B'}$ だから, 再び**合同公理**【3】より, $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{B'A'C'}$. 一方, $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{B'A'C'}$ **【仮定】**より, $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BAC}$. これは矛盾する. したがって,

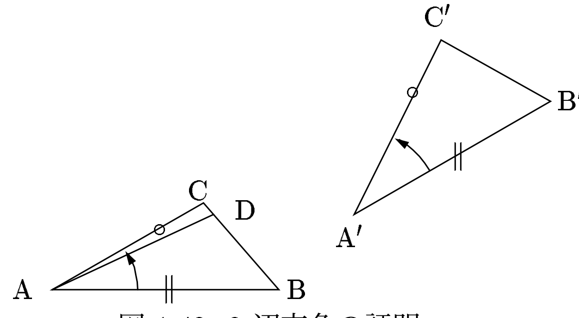

図 1.42: 2 辺夾角の証明

$\mathrm{BC} \neq \mathrm{B'C'}$ と仮定したことが誤りである．故に，$\mathrm{BC} = \mathrm{B'C'}$ **【結論 2】**．**【仮定】**と**【結論 1】**,**【結論 2】**より，対応するすべての辺と角が等しいから，$\triangle\mathrm{ABC} \cong \triangle\mathrm{A'B'C'}$**【結論**の証明終】

問 9　3 角形の第 II 合同定理（2 角夾辺）

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}, \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A'}, \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B'} \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC} \cong \triangle\mathrm{A'B'C'}$$

すなわち，(1.9) 式が成立することを，背理法によって証明せよ．[††]

次の定理が成立することを証明するには，トレーニングに回すことにする．
【3 角形の第 III 合同定理（ 3 辺）】$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ において，(1.10) 式，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}, \mathrm{AC} = \mathrm{A'C'}, \mathrm{BC} = \mathrm{B'C'} \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC} \cong \triangle\mathrm{A'B'C'}$$

【対頂角の定理】「2 直線が交わってつくる角で，互いに隣り合っていない角（対頂角）は合同である．」
特に，**対頂角の定理**は，図形を重ねあわすことを認めれば，交点のまわりに（角 π rad）回転することによって証明できるし，角度を測ることを認めるならば，π rad から同じ角を差し引くという演算の論理から明らかである．

★　平行線公理

序文にも触れたように，この公理は幾何学の他の公理とは異質な性格のものなので，長い間，数学者の研究の対象となって来た．
【平行線公理】直線 l 上にない点 P を通り，l と交わらない直線は[‡]
幾何学の他の公理や定理は，誤差を伴うものであり，その操作によって正しさを示せたことにはならないにせよ，実験によって確かめることができる．しかし，平行 2 直線が無限の彼方まで決して交わらないという主張を，有限の範囲でしか行えない実験や観測によって確かめることはできない．果たして，空間の構造の実態を反映したものなのか，議論を呼ぶところである．しかし，今までにも説明して来たようにそのことが数学を制約することはないのである．
この公理から得られる重要な定理は，**平行線の錯角の定理**と **3 角形の内角の和の定理**である．

[††] 問 9 の答：$\mathrm{AB} \neq \mathrm{A'B'}$ と仮定して矛盾を言う．直線 AB 上に $\mathrm{DB} = \mathrm{A'B'}$ となる D 点をとる.2 辺夾角より，$\triangle\mathrm{DBC} \cong \triangle\mathrm{A'B'C'}$．$\angle\mathrm{DCB} = \angle\mathrm{ACB}$．これは矛盾する．

[‡] 正確には「たかだか 1 本しかない.」とすべきなのである．実は,「直線 l 上にない点 P を通り，l と交わらない直線は 少なくても 1 本引ける.」ことは，他の公理から証明できるからである．ここでは，この議論は避けることにする．

証明に使うもう一つの公理の必要な部分だけ，挙げておく．

【直線公理】異なる 2 点は 1 本の直線上にあり，そのような直線はただ 1 本である．

さらに，証明の準備として，角に関する約束をしておこう．2 直線 l,m に第 3 の直線 n が交わってできる角の位置関係で，図の角 α に対する角 β を**錯角**，角 γ を**同位角**と呼ぶ．次に

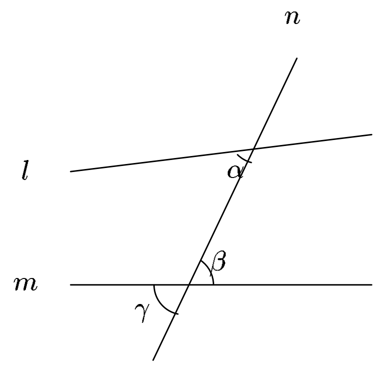

図 1.43: 錯角 · 同位角

【直角の定義】2 つの角が頂点と 1 辺を共有し，共通でない辺が 1 直線をなすとき，これらの角は互いに**補角**と言う．ある角がその補角と合同なとき，この角を**直角**と呼ぶ．直角は記号 $\angle R$ で表す．[§]

例 12　平行線の錯角・同位角の定理

「2 直線が平行であるための必要十分条件は,1 組の錯角が互いに等しいか，または,1 組の同位角が互いに等しいかである.」

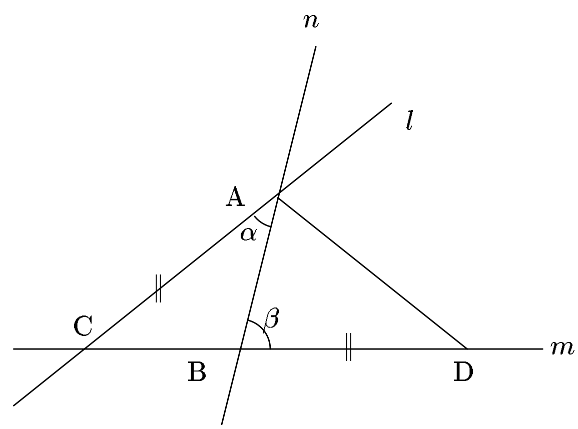

図 1.44: I の証明

I.　まず，2 直線 l,m に第 3 の直線 n と，それぞれ，点 A，B で交わってできる角を，図の α,β,γ として，

$$\alpha = \beta\text{【仮定】} \Longrightarrow l \parallel m\text{【結論】}$$

を証明しよう．

【証明】背理法で証明する．l と m が交わっていると仮定すると，l,m の交点 C が存在する．m 上に，BD = AC を満たす点 D を n　に関して C と反対側にとる．

△ABC と △BAD に，**3 角形の第 1 合同条件 I（ 2 辺夾角）**を適用する．すなわち，AC = BD (【背理法の仮定】) ,$\overline{\mathrm{AB}}$ は共通,

$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{ABD}\,(\text{【命題の仮定】}) \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC} \cong \triangle\mathrm{BAD}$$

したがって，∠ABC = ∠BAD，この関係と【命題の仮定】より，

$$\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{ABD} + \angle\mathrm{ABC} = 2\angle R$$

すなわち，3 点 C，B，D は同一直線上にある．これは，C，D を通る直線が 2 本あることになり,**【直線公理】**に矛盾する．故に，l，m は交わらない.【I の証明終】

II．次に，I の命題の逆である

[§]「合同な角の補角も合同である.」ことを示さないと，この関係を他の図形と比べて使うことができないし,「すべての直角が合同である.」ことも言えないが，この証明は今は省略する．

$l \parallel m$**【仮定】**$\Longrightarrow \alpha = \beta$**【結論】**
を証明しよう．
【証明】ここでは，命題の対偶「$\alpha \neq \beta \Longrightarrow l$ と m は平行ではない．」を証明する．

B 点を通る直線 m' で，2 直線 l,m' と直線 n に関して，角 α の錯角が合同となる直線をとる．命題 I より $m' \parallel l$.**【平行線公理】**より，点 B を通る m' と異なる直線 m は l に平行でない．【II の証明終】

III.「錯角が等しいことと，同位角が等しいことは同値である．」

$\alpha = \beta$**【錯角】**$\Longleftrightarrow \alpha = \gamma$**【同位角】**

【証明】【対頂角の定理】より，$\beta = \gamma$ だから，$\alpha = \beta = \gamma$.【III の証明終】

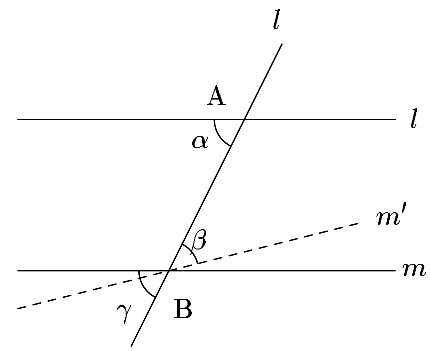

図 1.45: II の証明

I，II，III の証明より，

$$l \parallel m \Longleftrightarrow \alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha = \gamma \tag{1.16}$$

★ 解析幾何学

解析幾何学の基本原理は**座標**を導入することである．方程式については IA-1, IA-2 において，不等式については II-1-2，IA-2 において習うのであるが， 幾何学の問題を，座標の間に成り立つ方程式，不等式等の関係を用いて点，直線，3 角形や円などの図形を表し，代数式の計算によって調べて行く方法を解析幾何学を呼ぶ．

この章の前節までは，2 点間の距離，線分の長さ，角*を取り扱っていても，その大きさを測ることはなく，相等しいか，大小だけで議論して来たのである．しかし，ここから先は計算を用いるので，これらを量として測り数値に表す必要が出て来たのである．まず，そのための出発点は，**数直線**と言う考え方である．直線 l の上に異なる 2 点 O，E を選び，O を**原点**と呼び，$\mathrm{OE} = 1$ とする．これを基準にして直線上のすべての点をそれを表す数，すなわち，その点の**座標**に対応させることができる．直線上の点 P の座標 x は，O→E を**座標の正の向き**と定め，

$$x = \begin{cases} +\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OE}} & \cdots \text{O に対して P が E と同じ側にあるとき} \\[2ex] -\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OE}} & \cdots \text{O に対して P が E と反対側にあるとき} \end{cases}$$

とする．

*IB-1-2 の初めに弧度法，面積，ピタゴラスの定理に触れたが，これらを使った議論を展開した訳ではない．

座標には，x が整数の場合，$x = \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ のときを考えて，l 上に等間隔に並んだ目盛を付しておくと分かりやすい．

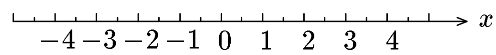

図 1.46: 数直線

実数については II-1-3 で学んだが，直線上のすべての点の集合と実数の集合の各要素間には 1 対 1 の対応がある．数の側から言うと**実数**を導入することによって，いわゆる,「いくつか」とか,「何分のいくつか」と数える数から，順序を持って連続的な数への拡張がなされたのである．[†]一方．直線とは順序づけられた点がすきまなくどこまでも並んでいるものと考える．

この座標を用いて，まず**線分の長さ**が与えられる．すなわち，2 点 A，B の座標を，それぞれ，$x = a,b$ とすると，線分 $\overline{\mathrm{AB}}$ の長さは，$|b - a|$ となる．

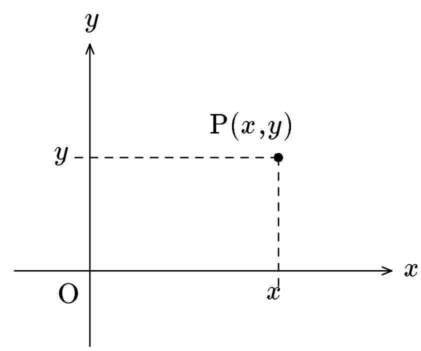

図 1.47: 平面座標

平面上の点の座標は，直交する 2 直線をもとに考える．これらを x 軸，y 軸と呼ぶ．交点を原点 O とし，それぞれの，直線上で，1 直線上の点の座標を作ったのと同様な座標をとる．点 P の座標は P から x 軸に引いた垂線の足の x 軸上の座標 x と y 軸に引いた垂線の足の y 軸上の座標 y とから決まる実数の組 (x, y) で表す．以下，P(x,y) と記すことにする．同様にして，空間内の点の座標についても導入することができるが，今は平面図形の問題のみを取り扱っているから立ち入らない．

$\boxed{\textbf{問}}$ **10**　点 P の座標を $(3, 4)$ としたとき，次の関係を満たす点の座標を求めよ．
(1) P と x 軸に関して対称な点 Q.(2)　P と y 軸に関して対称な点 R.(3) P と原点 O に関して対称な点 S.(4) P を原点 O に関して $\dfrac{\pi}{2}$ rad 回転した点　T. [‡]

平面上の点を表すことからさらに進んで，平面上の直線や曲線を表すには**関数のグラフ**という考え方を用いる．これまでは点や図形の移動を写像，あるいは，変換として取り扱って来たが，ここではすべて数で取り扱うので原像，および，像の属する集合を実数の集合に限り，写像を（実数）関数と呼ぶことにする．関数については，既に IB-1-1 のトレーニングでは取り上げて来た．すなわち，

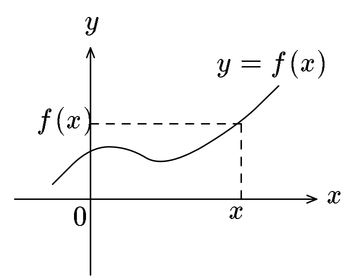

図 1.48: 関数のグラフ

[†]実数の厳密な定義は，幾何学の残りの公理順序公理」と連続公理」に対応的にもできる．いわゆる「デデキントの切断」は,「今という時刻をどう規定するか.」という思考とよく似ている．第 1 に，時刻には順序がある．何時何分何秒と端数の出ない時刻ばかりではない．今という時刻は，過去のある時刻と未来のある時刻の間にある等々$\cdots$．しかし，この段階でこの話に入る必要はないと思う．

[‡]$\boxed{\text{問}}$ 10 の答：(1) $(3, -4)$　(2) $(-3, 4)$　(3) $(-3, -4)$　(4) $(-4, 3)$

「2 つの変数 x, y があって，x の値を定めるとそ
れに応じて y の値がただ 1 つだけ定まるとき y は x の関数であるといい，

$$y = f(x)$$

などの記号で表す．」
そして，x の値とそれに対応する y の組[§]

$$(x,\ y)$$

すなわち，関数 $f(x)$ に対して，座標軸を定めた平面上の点 $(x,\ f(x))$ 全体の集合をこの関数のグラフと言う．

例 **13** 集合

$$X = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$$

とする．関数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ は，式 $f(x) = x + 3$ で与えられているとする．関数 f のグラフを求め，これを xy 座標上に図示せよ．

$$f(-2) = -2 + 3 = 1$$
$$f(-1) = -1 + 3 = 2$$
$$f(0) = 0 + 3 = 3$$
$$f(1) = 1 + 3 = 4$$
$$f(2) = 2 + 3 = 5$$

だから，グラフは $(-2,\ 1)$, $(-1,\ 2)$, $(0,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(2,\ 5)$ というとびとびの値となり，f の定義域は $\{y | y \leqq 5,\ y \in \mathbb{N}\}$ となる．
図は，図 1.49 の黒丸の部分である．
もし，関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 式 $f(x) = x + 3$ ならば，グラフは $(x, x+3)$ と連続した値となり，f の定義域は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ となる．
図は，図 1.49 の点線で示された直線となる．

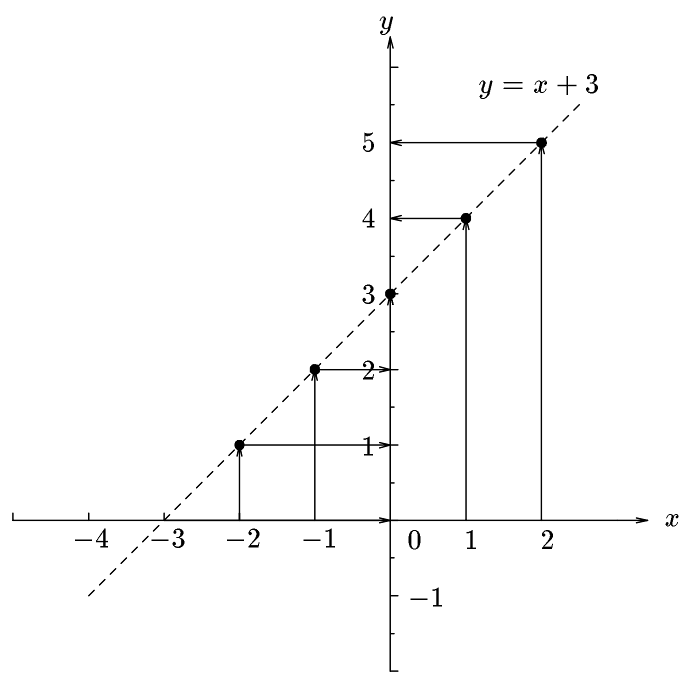

図 1.49: $y = x + 3$ のグラフ

問 **11** (1) 集合

$$X = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}, \quad Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

とする．関数 $f : X \longrightarrow Y$ は，

[§]ここでは「順序対」という用語は導入しないことにする．

$$
\begin{aligned}
f(-3) &= 4\\
f(-2) &= 3\\
f(-1) &= 2\\
f(0) &= 1\\
f(1) &= 2\\
f(2) &= 3\\
f(3) &= 4
\end{aligned}
$$

のように与えられ，これを xy 座標上に図示したものが図 1.50 の黒丸の部分である．関数 f のグラフを求めよ．

(2) 関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ であると考え，グラフを図示したものが図 1.50 の点線で示されたものであるとしたとき，f の式を求めよ．[¶]

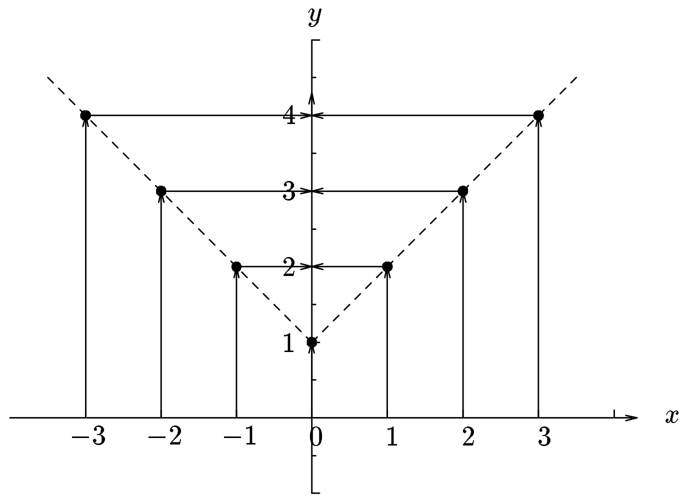

図 1.50: グラフの図示

平面上の線分 $\overline{\mathrm{AB}}$ の長さ，あるいは，2 点 A，B 間の距離 AB は，2 点 A，B の座標を，それぞれ，(x_1, y_1),(x_2, y_2) とすると，

$$\boxed{\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (1.17)$$

となる．これは，**ピタゴラスの定理**の応用である．[‖]

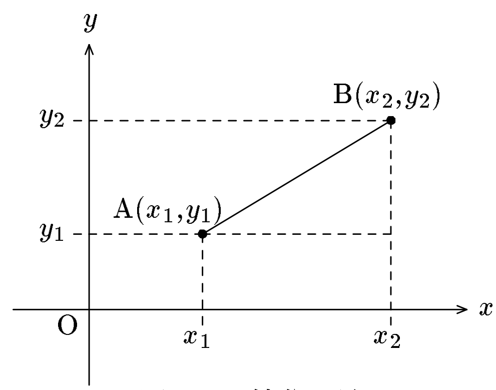

図 1.51: 線分の長さ

$\boxed{問}$ **12** 原点 O からの距離がつねに 5 となるような点 (x, y) が満たす条件を求めよ．[**]

$\boxed{問}$ **13** 空間上の点の座標について説明する文章を作れ．また，空間上の 2 点 A,B 間の距離を表す公式を示せ．[††]

座標を用いて，図形を式で表す． ある条件にしたがって移動する点のたどる道筋を，この点の「**軌跡**」という．$\boxed{問}$ 12 の軌跡は半径 5 の原点を中心とする円である．次の 3 つの表現は，同じ内容である．

① ある条件にしたがう点の「軌跡」

[¶] $\boxed{問}$ 11 の答：(1) $(-3, 4)$ $(-2, 3)$ $(-1, 2)$ $(0, 1)$ $(1, 2)$ $(2, 3)$ $(3, 4)$ (2) $y = |x| + 1$

[‖] この辺からも分かるように，解析幾何学は I-3 でベクトルを習うまでは，当面，今までの幾何学の定理を使って立式される．

[**] $\boxed{問}$ 12 の答：$x^2 + y^2 = 25$,

[††] $\boxed{問}$ 13 の答：$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

② ある条件にしたがう点全体の「集合」
③ ある条件にしたがう点からなる「図形」

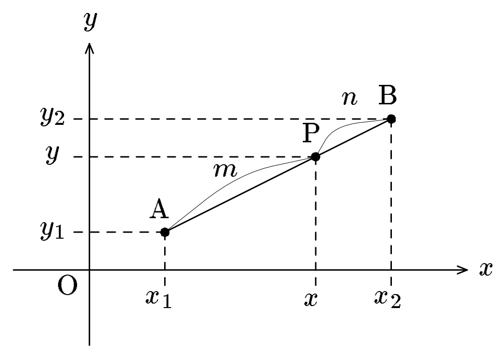

図 1.52: 内分点

例 14　線分上の点

2 点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2$ のつくる線分 $\overline{AB}$ 上の点 P はどんな式で表されるか．このような点 $P(x,y)$ を，$\overline{AB}$ を $m:n$ に分ける点（内分点）と考えると，x 座標，y 座標，それぞれ，$m:n$ に内分されていることから，

$$x_2 - x : x - x_1 = y_2 - y : y - y_1 = m : n \tag{1.18}$$

この関係を満たす x,y は，それぞれ，

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n} \\ y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n} \end{cases}} \tag{1.19}$$

ただし，$m \geqq 0, n \geqq 0$，かつ,$m + n \neq 0$ とする．

この条件を満たす任意の m,n に対して成り立つ式は，m,n を消去して得られるが，まとめやすくするため，比の式 (1.18) を変形して，

$$x_2 - x_1 : x - x_1 = y_2 - y_1 : y - y_1 = (m+n) : n$$

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1) \tag{1.20}$$

これより，
1° $x_1 \neq x_2$ のとき．
線分 $\overline{AB}$ 上にある点 P の集合は，座標 (x,y) が

$$\underline{\underline{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1}} \tag{1.21}$$

の関係を満たす．ただし，x は $x_1 \leqq x \leqq x_2$ または $x_2 \leqq x \leqq x_1$ の範囲にある．
2° $x_1 = x_2$ のとき．
このとき，(1.20) 式は，

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = 0$$

となるから，線分 $\overline{\mathrm{AB}}$ 上にある点 P の集合は，x 座標が,

$$\underline{\underline{x = x_1}} \tag{1.22}$$

で，y は $y_1 \leqq y \leqq y_2$ または $y_2 \leqq y \leqq y_1$ の範囲で任意の値となる．つまり，この場合，線分は y 軸に平行となる．

$\boxed{\textbf{問}}$ **14**　2 点 A(x_1,y_1),B(x_2,y_2) の中点の座標を求めよ．　*

$\boxed{\textbf{問}}$ **15**　2 点 A(x_1,y_1),B(x_2,y_2) のつくる線分$\overline{\mathrm{AB}}$の延長上の点 Q(x,y) が線分$\overline{\mathrm{AB}}$を,$m' : n'$に外分する点であるとき,$m = -m'$,$n = n'$または,$m = m'$,$n = -n'$ とおけば

$$\begin{cases} x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n} \\ y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n} \end{cases}$$

が使えることを示せ．†

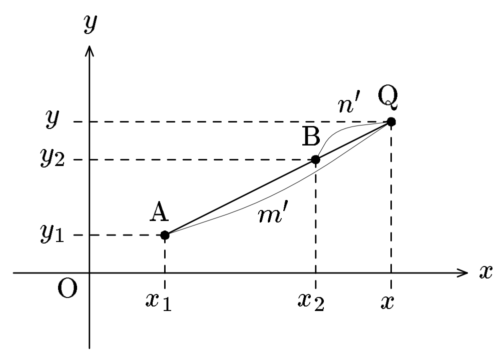

図 1.53: 外分点

$\boxed{問}$ 15 のように考えれば，$m + n \neq 0$ である任意の実数 m,n に対して$\boxed{例}$ 12 の計算が成り立ち，結果の式は $\overline{\mathrm{AB}}$ の延長上の点も含むことになる．したがって，**点 A，B を通る直線の式**は,

$$\boxed{y = p(x - x_1) + y_1, \qquad \text{ただし，} p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \tag{1.23}$$

p を直線の**傾き**と呼ぶ．また，$|p| \to \infty$ となる，すなわち，y 軸に平行な直線の式に限って

$$\boxed{x = x_1} \tag{1.24}$$

の形で表す．

*$\boxed{問}$ 14 の答：$\left(\dfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$

†$\boxed{問}$ 15 の答：$(x_1 - x) : (x_2 - x) = m' : n'$ あるいは，$(x - x_1) : (x - x_2) = m' : n'$ を使う．y についても同様.

図に，点 A(x_1,y_1) を通り，傾き p がいろいろな値をとる直線を示す.
直線の式を一つの式にまとめたものは，(1.20) 式より，

$$(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y=x_1y_2-x_2y_1$$

$y_2-y_1=a, x_1-x_2=b, x_1y_2-x_2y_1=c$ とおくと，

$$ax+by=c$$

ただし，a,b,c は実数の定数であり，a,b のどちらかは 0 でないとする．この方程式を満たす実数の組 x,y は一直線上の点の座標であり，その逆も成り立つ.

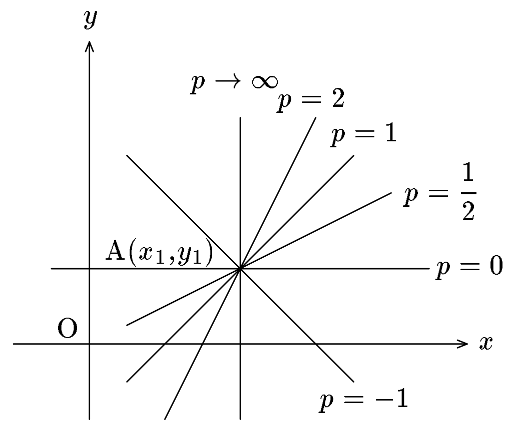

図 1.54: 直線の傾き p

問 **16** 2 直線

$$\begin{cases} y=px+q \\ y=p'x+q' \end{cases}$$ ‡

の交点が (1) 1 つの場合,(2) 存在しない場合,(3) 無数にある場合の p,p', q,q'の条件を求めよ.

例 **15** 円の方程式

定点 C(x_1,y_1) から，一定距離 r にある点 P(x,y) の軌跡は円である.**円の方程式**は,CP $=r$ の両辺を 2 乗した式：CP$^2=r^2$ より得られる.

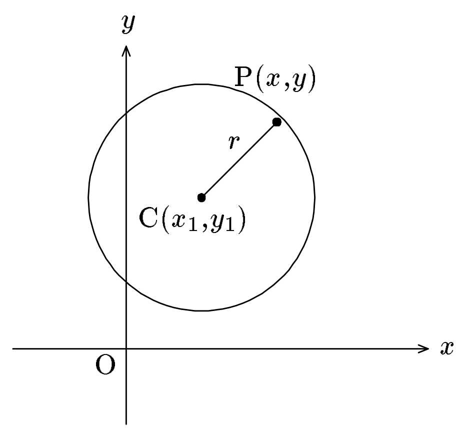

図 1.55: 円の方程式

$$\boxed{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2} \tag{1.25}$$

この式は x,y の 2 次式の中でも特殊な形,

$$x^2+y^2+ax+by=c$$

‡ 問 16 の答：(1)$p \neq p'$ (2)$p=p'$かつ $q \neq q'$ (3)$p=p'$かつ $q=q'$

で，定数　a,b,c が $a^2+b^2+4c>0$ を満たすものである．

問 **17**　3 点 O(0,0),A(4,0),B(0,3) を通る円求めよ．‡

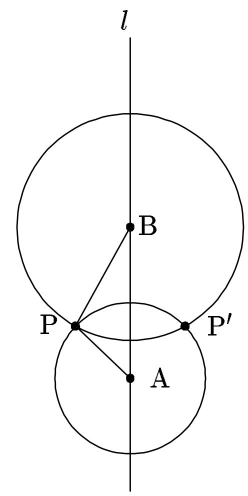

図 1.56: 鏡映

例 **16　鏡映の作図法の証明**

点 P の座標は $(-p,0)$，直線 l は y 軸，すなわち，直線の式：$x=0$ とする．点と直線がこのような位置にない場合も，合同な関係であれば同じことである．点 A$(0,a)$，B$(0,-b)$ を中心,PA,PB を半径とする円の方程式は，それぞれ，

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=a^2+p^2 \\ x^2+(y+b)^2=b^2+p^2 \end{cases}$$

式の交点の y 座標が $y=0$ であることは，すぐ出て来る．一方の式に $y=0$ を代入すると，

$$x^2=p^2,\ \therefore\ x=\pm p$$

よって，像の位置 P' の座標は $(p,0)$．P，P′ は x 軸上にあるから，PP′ は直線 l と垂直で，P，P′ と l の距離はともに，p で等距離にある．

‡**問** 17 の答：$(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$