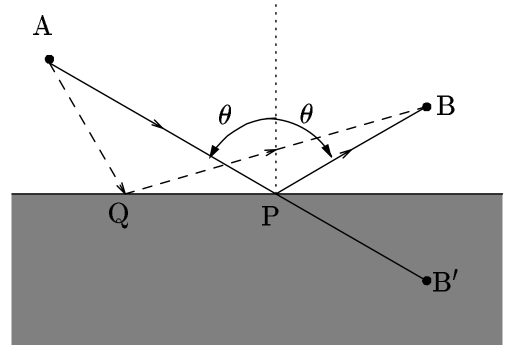
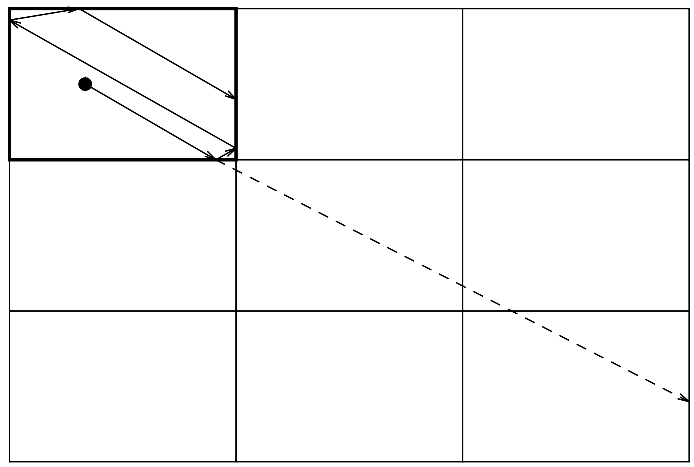
トレーニング



1 点 A から平らな鏡に入射する光線は最短距離を通って観測点 B に到達する.（このことを一般化してハミルトンの原理と呼ばれている.）鏡面上で反射する点 P の位置を求めよ．また，点 P を通る鏡面に垂直な線（法線）と AP のなす角（入射角）と PB のなす角（反射角）が等しくなることも確かめよ．[†]

2 ビリヤード台の壁で，玉が入射角と反射角が等しくなるように衝突を続け，面との摩擦も無視できる理想的な運動を考える．玉が 4 隅にある玉受けネットに落ちないように打ち出せば，長方形の運動領域をまんべんなく，永遠に運動し続ける（これをエルゴード運動と言う.）ことを，作図によって議論せよ．あなたの持っている計算機で，もし図が描けるなら，これを実行できるプログラムを作って調べてみよ．[‡]



[†] $\boxed{1}$ の答： A,B を含む鏡の垂直断面を考える．この断面と鏡の交わる直線を l とおく．点 B′ を l に関する B の鏡映とすると，AB′ と l の交点，すなわち，

$$\mathrm{P}=\overline{\mathrm{AB}'}\cap l$$

とする点が P で，道筋 APB が最短路である．なんとなれば，

l 上の P とは異なる任意の点 Q に対して，鏡映は距離を一定に保つから，$\mathrm{QB}=\mathrm{QB}'$，したがって，

$$\mathrm{AQ}+\mathrm{QB}=\mathrm{AQ}+\mathrm{QB}'$$

また，$\mathrm{PB}=\mathrm{PB}'$ だから，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}'$$

A，P，B′ は一直線上にあり，A，Q，B′ は一直線上にないから，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}'<\mathrm{AQ}+\mathrm{QB}'$$

したがって，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}<\mathrm{AQ}+\mathrm{QB}$$

Q が任意の点であるということは，道筋 APB がど道筋 AQB よりも短いということである．

入射角と反射角が等しいことは，鏡映が BP が l となす角も保存して B′P に移すことから，証明できる．

[‡] $\boxed{2}$ の答：ビリヤード台の壁で囲まれた長方形を各辺で鏡映を繰り返し，無限に広がる格子を考える．玉のたどる経路を反射点で次々と鏡映すれば，玉は上図のように直線運動を続けることになる．この直線は．経路が格子点を横切らない限り，長方形内の任意の点の何度目かの鏡映点を必ず通過する．