1–2　等長変換

≪ この項で学ぶこと ≫

[**等長変換，面積と角，平行移動，平行移動の作図，回転移動，回転移動の作図，鏡映（線対称移動），鏡映の作図，平面図形の合同，3 角形の合同条件，相似変換，線分の相似変換の作図，3 角形の相似条件，相似の位置**]

★　等長変換

この章では，平面上の直線図形のみを取り扱う．曲線図形や立体図形に関しては，図形を取り扱う上でより有力ないろいろな数学的方法を学んでから学習する．平面上の点全体の集合を E^2 と書くことにする．点の移動を変換 f で表し，$f : E^2 \longrightarrow E^2$ の操作を考える．この節 1-2 では，主に，作図と図形を重ね合わせてみることによって，議論を進めて行く．論証的な考察は，次の節 1-3 で行う．

2 点 A，B 間の最短距離を， AB と書くことにする．任意の 2 点 $\mathrm{A,B} \in E^2$ が，その像 $f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B}) \in E^2$ に距離を変えずに写される．すなわち，$\mathrm{A}' = f(\mathrm{A}), \mathrm{B}' = f(\mathrm{B})$ とおくと，

$$\mathrm{A'B'} = \mathrm{AB} \tag{1.5}$$

が成り立つような変換 f を**等長変換**と呼ぶ．

等長変換は 1 対 1 の写像である．何故ならば， A，B が同じ点でないとすると $\mathrm{AB} \neq 0$ である．(1.5) より，$\mathrm{A'B'} = \mathrm{AB} \neq 0$ だから，A' と B' は同じ点ではない．つまり，(1.2) 式の形，

$$\mathrm{A} \neq \mathrm{B} \Longrightarrow f(\mathrm{A}) \neq f(\mathrm{B})$$

が成り立っているから，1 対 1 の写像である．

ここで，距離 AB に類似した記号の約束を，はっきりさせておこう．等長変換では単に 2 点間の関係について考えているので， 図 1.13(a) のように点と点の間については何も言っていない．作図上は 相異なる 2 点 A，B を定めると 1 つの直線が指定でき

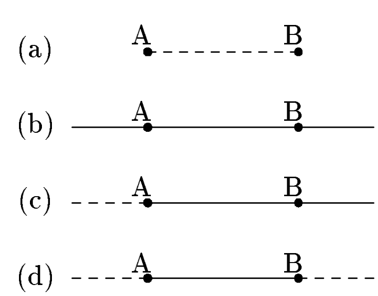


図 1.13: 直線，半直線，線分

る．このとき，例えば文字 l を用いてこの直線を「直線 l」などと呼ぶこともあるが，それ以外に,「直線 AB」書くこともある．直線 AB は 図 1.13(b) のように，AB の間のみではなく線が両側にどこまでも続いているものを言い，図 1.13(c) のように，点 A を端の点として線が 点 B を通る側のみにどこまでも続いているものは,「半直線 AB」，また，点 A と点 B を端の点としてその間だけの線を考えるものを,「$\overline{\mathrm{AB}}$」と書くことにする．いずれも端の点のあるものに関しては，その点も含めて考えるとする．図 1.13(c)，(d) の点線は，それぞれ,「半直線 AB　の延長」,「$\overline{\mathrm{AB}}$ の延長」と呼ぶ.

線分 AB（ $\overline{\mathrm{AB}}$）は，有限な大きさ（この場合は長さ）をもつ最も簡単な図形である．$\overline{\mathrm{AB}}$ 上の任意の点 P（P$\in \overline{\mathrm{AB}}$）を，等長変換 f によって写した点 $\mathrm{P}' = f(\mathrm{P})$ とする．ここで，再び $\mathrm{A}' = f(\mathrm{A}), \mathrm{B}' = f(\mathrm{B})$ とおく．(1.5) 式より，

$$\begin{aligned} \mathrm{A}'\mathrm{P}' &= \mathrm{AP} \\ \mathrm{P}'\mathrm{B}' &= \mathrm{PB} \\ \therefore\ \mathrm{A}'\mathrm{P}' + \mathrm{P}'\mathrm{B}' &= \mathrm{AP} + \mathrm{PB} \end{aligned}$$

右辺は点 P が $\overline{\mathrm{AB}}$ 上にあるから，$\mathrm{AP} + \mathrm{PB} = \mathrm{AB}$ が成り立つ．一方，

$$\mathrm{A}'\mathrm{B}' = \mathrm{AB}$$

であるから，

$$\mathrm{A}'\mathrm{P}' + \mathrm{P}'\mathrm{B}' = \mathrm{AB} = \mathrm{A}'\mathrm{B}'$$

となり，P' は $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$ 上の点である．すなわち，

$$\mathrm{P} \in \overline{\mathrm{AB}} \Longrightarrow f(\mathrm{P}) \in \overline{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}$$

このことは，等長変換を図形の移動と結びつけてイメージできることを示している．
「$\overline{\mathrm{AB}}$（という図形）が，等長変換によって $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$（という図形）に写すことができるとき，$\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$ は $\overline{\mathrm{AB}}$ に**合同** であると言い，

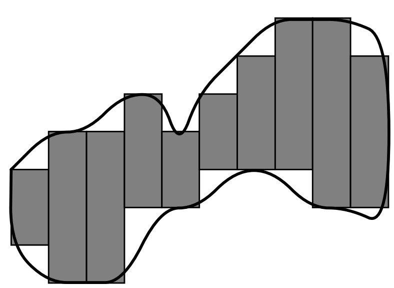
$$\mathrm{A}'\mathrm{B}' \cong \mathrm{AB}$$

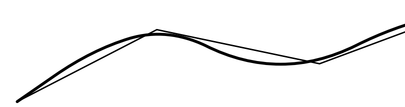
と書くことにする．」

★　面積と角

長方形の面積は直角をはさむ 2 辺の長さの積であり，それ以外の図形の面積は長方形に直したり，分けたりして求めることができる．*

* ただし，曲線図形では近似が必要になる．また，曲線の長さを直線に分けて求める場合も近似が必要になる．この点についての議論は，II. 極限の数学の中の積分の章でやがて学ぶ.





等長変換は距離を一定に保つので，図形の面積も保存される．

ここで，3 点 A,B,C$\in E^2$ を頂点とする 3 角形は $\triangle$ABC 書くことにし，$\triangle$ABC の面積は $\triangle$ABC（面積）書くことにする．等長変換 f による A,B,C の像 $\mathrm{A}' = f(\mathrm{A}), \mathrm{B}' = f(\mathrm{B}), \mathrm{C}' = f(\mathrm{C}) \in E^2$ を頂点とする 3 角形の面積は

$$\triangle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'(\text{面積}) = \triangle \mathrm{ABC}(\text{面積})$$

となる．

例 1　ピタゴラスの定理

面積が求まるのなら，この定理はかんたんに示すことができる．図のような辺の長さ a の正方形の面積を，直角をはさむ *2* 辺の長さ b,c の *3* 角形 *4* つと辺の長さ $b-c$ の正方形の面積の和に分けて考えれば，

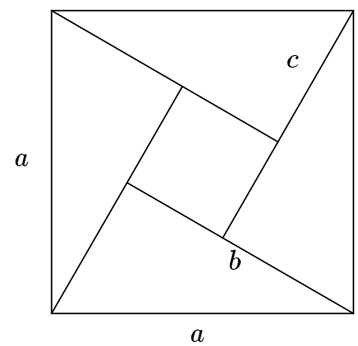


図 1.14: ピタゴラスの定理

$$a^2 = 4 \times \frac{1}{2}bc + (b-c)^2$$

右辺の計算を実行すれば，

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \tag{1.6}$$

角の大きさを計るのに，**弧度法**を用いる．この角度の単位では，半径 1 の円（単位円）において弧の長さが 1 となる中心角の大きさを 1 rad（ラジアン）とする．単位円の円周の長さを 2π とおくと，今まで用いていた角度の単位 $^\circ$ (度）との関係は $360^\circ = 2\pi$ rad，すなわち，

$$180^\circ = \pi \ \mathrm{rad} \tag{1.7}$$

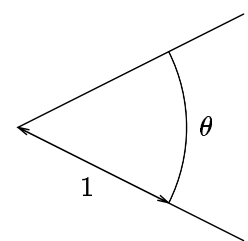


図 1.15: 弧度法

である．[†]

問 1　15°，30°，45°，60°，90°，270° の角度を弧度法で表せ．[‡]

★　平行移動

等長変換には，平行移動，回転移動，鏡映がある．順を追ってこれらを見て行こう．

[†] ここでは，曲線の長さ，無理数 π を暫定的に使わざるを得ない.「とおいて」としたのは，その意味である．

[‡] 問 1 の答：$\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

移動を考えるためには，直線に**向き**を付けたものを考える．この直線に平行な直線，半直線，線分にも向きをつけたものも「同じ向きに平行」な場合と「逆向きに平行」な場合とが考えられるが，前者を「同じ向き」という．また，基準とする向きをもった直線に対して，平行でないか，逆向きに平行な向きをもった直線，半直線，線分を「異なる向き」と約束する．[§]

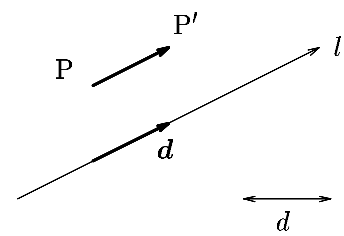


図 1.16: 平行移動

向きをもった直線 l と距離 d が与えられているとき，

$$\mathrm{PP'} \parallel l \text{ かつ } \mathrm{PP'} = \mathrm{d}$$

で，P から P′ へ向きが l の向きに一致しているような変換 T,

$$\mathrm{P'} = T(\mathrm{P}), \quad (\mathrm{P}, \mathrm{P'} \in E^2)$$

を，**平行移動**と呼ぶ．

移動の距離 d を直線 l 上にとり，l と同じ向きに向きを示す矢印を付けたもの，つまり，大きさと向きをもつ数量が考えられる．これを**ベクトル**と呼び，$\vec{d}$，あるいは $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ で表す．$\boldsymbol{d}$ は平行移動を指定しているから，平面上の位置は任意である．例えば，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$ は，点 P に固定されるわけではない．ベクトルについては，IB-2 で詳しく習うことになる．

★　平行移動の作図

変換 T を具体化するために，目盛りのない定規とコンパスのみで作図して，点 P を点 P′ に移す方法を示そう．

【1】まず，点 P を通って l に平行な直線を次のように作図する．

l 上に 1 点 A をとって，直線 PA 上に AC = PA なる点 C をとる．C と l 上の他の点 B を結ぶ．直線 BC 上に CB = BQ なる点 Q をとる，P，Q を通る直線が求める平行線である．

【2】コンパスで，d の距離をとり，点 P を中心とし半径 d の円と直線 PQ の交点で，l の向きの側の点 が P′ である．

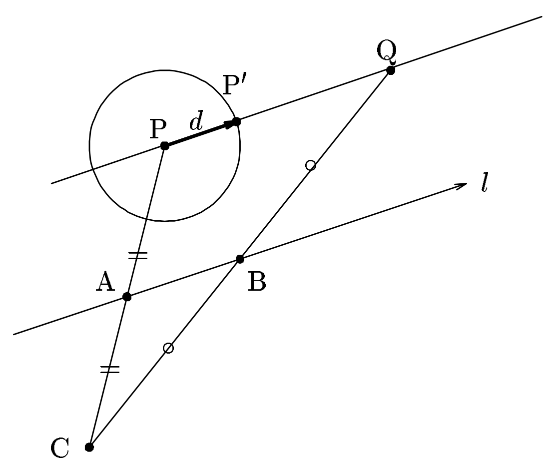


図 1.17: 平行移動の作図

[§] 平行であることを「同じ方向」と言い,「方向」と「向き」とを使い分けよと言うひともいるが，煩雑であるのでここでは上の意味での「向き」のみを使用する.「北北西－南南東の方向で，北北東の向き」とは言いたくないであろう．

ここでの作図は，あくまでも頭の中でだけ T を考えるかわりの操作と見ているので，証明はしない．¶

$\boxed{\textbf{問}}$ **2** 平行でない向きを持った 2 直線 l_1,l_2 と，それぞれの直線上の移動の距離 d_1,d_2，および，点 P を図に与える．l_i と d_i で定まる平行移動を $T_i,(i=1,2)$ とし，合成変換：

$$\mathrm{P}_3 = T_1 \circ T_2(\mathrm{P}) = T_2 \circ T_1(\mathrm{P})$$

定規とコンパスを用いて作図し，点 P_3 を求めよ．また，

$$\mathrm{P}_3 = T_3(\mathrm{P})$$

となる直接の平行移動 T_3 を表す向きを持った直線 l_3 と，この直線上の移動の距離 d_3 を図に示せ．*

★ 回転移動

点 P を

$$\mathrm{OP}' = \mathrm{OP}, \quad \angle \mathrm{P}'\mathrm{OP} = \theta$$

なる点 P′ に移すことを,「点 P を点 O を中心として角 θ だけ**回転移動**する」といい，変換 R,

$$\mathrm{P}' = R(\mathrm{P}), \quad (\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in E^2)$$

で表す.

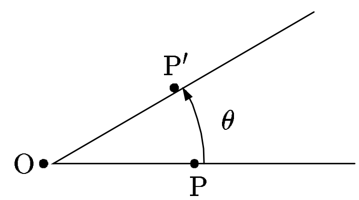


図 1.18: 回転移動

ここで，反時計回りの回転を正の向き（$\theta > 0$ ）と約束し,時計回りの回転を負の向き（$\theta < 0$ ）とする.

例えば，右図で a は $\dfrac{\pi}{3}$rad(= 60°) 正の向きに回転させること．b は $-\dfrac{5}{3}\pi$ rad(= −300°)，すなわち，$\dfrac{5}{3}\pi$ rad だけ負の向きに回転させること．また，c は $\dfrac{7}{3}\pi$ rad(= 420°) 回転させること．これは，4π rad 分は 2 回転して元に戻ることであるから，残りの $\dfrac{\pi}{3}$rad だけ回転させることと同じである．すなわち，a,b,c の回転の結果は同じである．一般に,

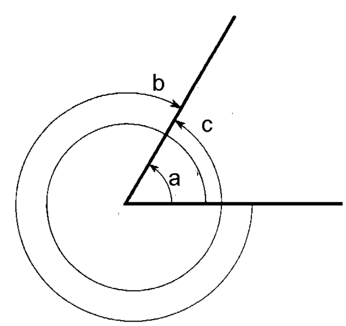


図 1.19: 一般角

$$\theta + 2n\pi \text{ rad}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

回転させることは，θ rad 回転させることと同じである.

¶作図の証明には，ここまでの説明では出しきれない定理を使う必要がある．純論理的な展開には，作図はいらない．これは，自然科学の論理においても，基本的な量である長さを具体的に測定するためには，単位 1 メートルを決めるためには，古くは白金とイリジュウムの合金の熱膨張率の問題というような，科学体系の後の方に出て来る知識，あるいは，最近では，原子のスペクトル，真空中の光速を使わなければならないのと，似た事情である．**証明**については，第 2 章で学ぶ.

*$\boxed{問}$ 2 の答：作図略．ベクトルの加法.

★　回転移動の作図

【1】まず，定規で点 O,P を通る直線をつくる．O から OP に対して角 θ をなす直線を次のように作図する．

O から長さ 1 の点 A' を OP 上にとり，コンパスで角 θ を示す距離 AB を $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ に移す．OB' が求める直線である．

【2】中心 O，半径 OP の円を描く．OB' との交点が点 P' である．

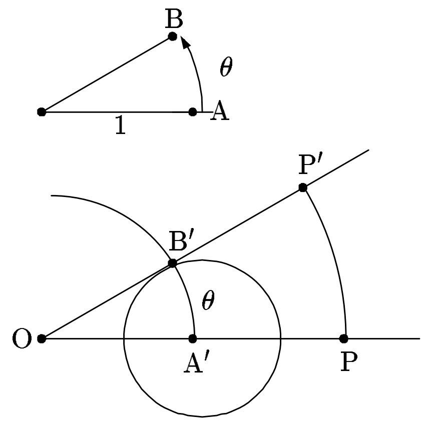


図 1.20: 回転移動の作図

$\boxed{\text{問}}$ **3**　定規とコンパスを用い，O から長さ 1 の点 A_0 を角 $\dfrac{\pi}{3}$ rad ずつ,$\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots$, A_6 ,6 回，回転移動せよ．†

★　鏡映（線対称移動）

3 次元の鏡映については，すでに IB-1-1 で例として取り上げたが，平面上の**鏡映**は，与えられた直線 l に関して点 P を $\overline{\mathrm{PP}'}$ に対して l が垂直 2 等分線となるように移動する変換 S

$$\mathrm{P}' = S(\mathrm{P}), \quad (\mathrm{P},\ \mathrm{P}' \in E^2)$$

である．

鏡映は l について P を対称な点 P' に移す変換であるから，**線対称移動**ともいう．これに対して，$\theta = \pi$ rad$(= 180^\circ)$ の回転移動のことを**点対称移動**という．また，平面上の鏡映は，空間上の点 P から l へ引いた垂線の足を H とおくとき，l と垂直で H を含む平面内で，点 H のまわりの点対称移動と見なすこともできる．

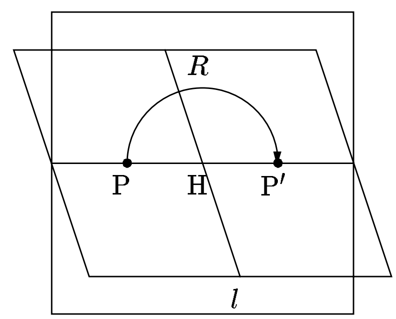


図 1.21: 鏡映

★　鏡映の作図

【1】l 上に任意の点 A を選び，A を中心，AP を半径とする円を描く．

【2】l 上に点 A と異なる点 B を選び，B を中心，BP を半径とする円を描く．

2 円の交点のうち，l に対して P と反対側の交点が点 P' である．

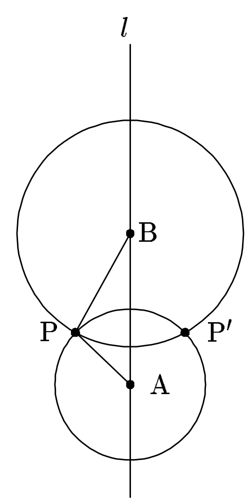


図 1.22: 鏡映の作図

† $\boxed{\text{問}}$ 3 の答：作図略．正 6 角形．

問 **4** 距離 d をなす平行な 2 直線 l_1,l_2 に関する鏡映 S_1,S_2 と， l_1,l_2 に垂直で l_1 から l_2 を向いた直線 l と移動距離 $2d$ で指定される平行移動 T の間に，

$$T = S_2 \circ S_1$$

の関係があることを，作図で確かめよ．[‡]

★ 平面図形の合同

この節の初めに，線分の合同について習ったが，ここでは一般の平面図形の合同について考えてみよう．例えば，△ ABC の内部の点の集合は，平面上の点の集合 E^2 の部分集合である．点 P が △ ABC のすべての点を動くとき，f によって変換された像 P′ の全体は E^2 の部分集合である △A′B′C′ となる．同様に，一般の図形 F と F' があり，

$$F' = f(F), \quad (F,\ F' \subset E^2)$$

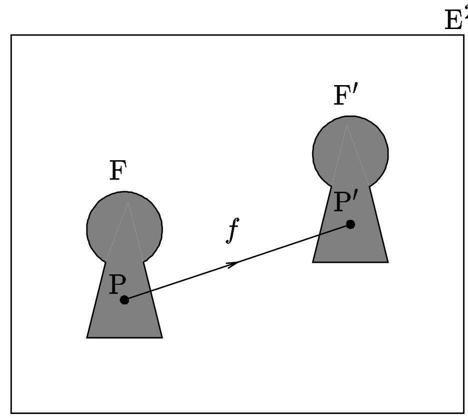


図 1.23: 平面図形の合同

となるような等長変換が存在するとき,「F' は F に**合同**である」といい，線分の合同のときに導入した記号を用いて，$F' \cong F$ と表す．

図形の内部の点 P は，例えば，△ ABC であれば，図 1.24 のように，頂点 A，B からの距離 AP,BP によって決定できて，等長変換によって頂点 A′，B′ から同じの距離 P′ に移

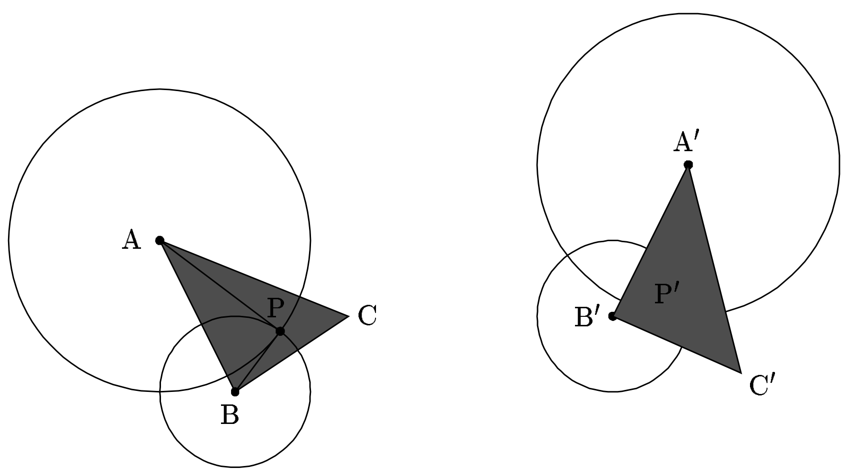


図 1.24: 図形の内部の点

‡ 問 4 の答：作図略.

すことができるから，以後，図形の変換を見るときは，図形を作る周囲の線のみを見て行くことにする．また，図形を多角形と限るなら，各頂点（連結の仕方が定まっていて，隣接しない 2 辺が交わらない点）指定すればよい．例えば，△ ABC であれば，頂点 A，B，C を指定すればこの 3 角形は決定できる．

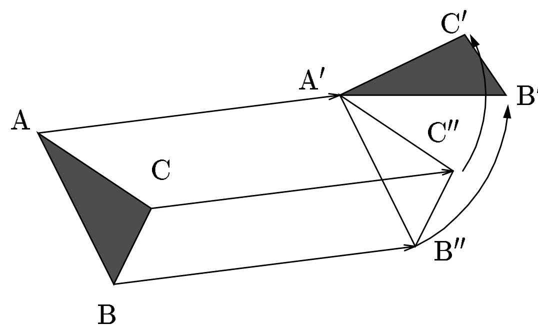


図 1.25: 3 角形の重ね合わせ (a)

合同の考え方は，物理の単元 I-4-1 で習う剛体の運動の取り扱いにかなり近い．物理学上では，変形が無視できる物体を剛体を呼び，剛体の運動は，すべて，並進運動（平行移動）と回転運動（回転移動）の合成として解析できる.（剛体の運動を平面上に限れば，鏡映は含まれない.）

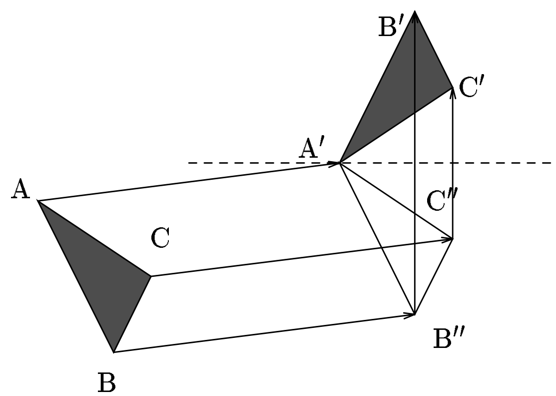


図 1.26: 3 角形の重ね合わせ (b)

ここまでに習って来たように，等長変換は具体的操作としては平行移動 T，回転移動 R，鏡映 S，および，これらをひき続き行う図形移動である．これから先は，図形としては主に 3 角形をとり上げて行くが，任意の位置にある △ABC と △A′B′C′ の合同を示すには，△ABC を平面上で移動させて，△A′B′C′ に重ね合わせることができることを言えばよいということがこれまでのとから分かるであろう．図 1.25 のように, まず，平行移動 $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ によって △ABC と △A′B″C″ に移す．次いで，点 A′ まわりに ∠ B”A’B’ をなす回転移動をすることによって △A′B′C′ に重ね合わせる．もし △ABC と △A’B’C’ たがいに他の裏返しとなっているような図形となっていれば，図 1.26 のように，△A′B″C″ に移した後，点 A′ を通る直線に関して鏡映をほどこす必要がある．

★ 3 角形の合同条件

3 角形の合同条件を作図によって，確かめてみよう．

例 2 3 角形の合同条件 I（2 辺夾角）

$$\boxed{\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'},\ \mathrm{AC} = \mathrm{A'C'},\ \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A'} \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC} \cong \triangle\mathrm{A'B'C'}} \qquad (1.8)$$

【作図】$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A}'$ より，平行移動 T と回転移動 R によって $\angle\mathrm{A}$ を $\angle\mathrm{A}'$ に移す作図ができる．つまり，$\angle\mathrm{A}' = f(\angle\mathrm{A})$ なる等長変換 f が存在する．同じ T と R によって，$\overline{\mathrm{AB}}$ を $\overline{\mathrm{A'B'}}$ に，$\overline{\mathrm{AC}}$ を $\overline{\mathrm{A'C'}}$ に移すとする．場合によっては，これに鏡映 S をほどこす必要もある． $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}, \mathrm{AC} = \mathrm{A'C'}$ であり，等長変換は距離を変えないから，$f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ と同じ f によって，$f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$,
$f(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$ である．したがって，

$$f(\triangle\mathrm{ABC}) = \triangle\mathrm{A'B'C'}$$

[§]

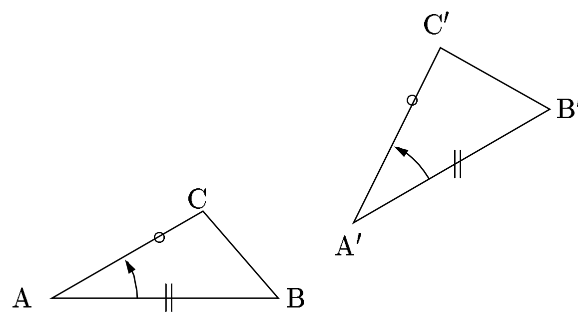


図 1.27: 2 辺夾角

$\boxed{\text{問}}$ **5　3 角形の合同条件 II（ 2 角夾辺）**

$$\boxed{\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'},\ \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A}',\ \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B}' \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC} \cong \triangle\mathrm{A'B'C'}} \tag{1.9}$$

が成立することを，作図によって確かめよ．[¶]

$\boxed{\text{問}}$ **6　3 角形の合同条件 III（ 3 辺）**

$$\boxed{\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}, \mathrm{AC} = \mathrm{A'C'}, \mathrm{BC} = \mathrm{B'C'} \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC} \cong \triangle\mathrm{A'B'C'}} \tag{1.10}$$

が成立することを，作図によって確かめよ．[‖]

★　相似変換

等長変換を拡張した変換が相似変換である．任意の 2 点 A,B $\in E^2$ が，その像 $g(\mathrm{A})$, $g(\mathrm{B}) \in E^2$ につねに一定の割合で距離を変えて写される．すなわち，$\mathrm{A}' = g(\mathrm{A}), \mathrm{B}' = g(\mathrm{B})$

[§]「変換」という概念に慣れてもらうために，上のような表現をしたが，もっと平易に言えば，次のことを言っているに過ぎない．

$\triangle\mathrm{ABC}$ を移動し， $\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{A}'$ を一致させ，AB を $\mathrm{A'B'}$ に重ね合わせれば，条件より AC と $\mathrm{A'C'}$ も重なり，頂点 B と B'，C と C' が一致する．したがって，

$$\triangle\mathrm{A'B'C'} \cong \triangle\mathrm{ABC}$$

[¶] $\boxed{\text{問}}$ 5 の答:$\triangle\mathrm{ABC}$ と A' 点を図に与え，$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ となる B' 点を定め，$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A}'$ ，$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{B}'$ となるように角を移す．

[‖] $\boxed{\text{問}}$ 6 の答：$\triangle\mathrm{ABC}$ と A' 点を図に与え，$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ となる B' 点を定め， A' 点から半径 AC，B' 点から半径 BC の円を描き，2 円の交点の 1 つを C' 点とする．

とおくと，ある定数 $k(>0)$ があって，

$$\mathrm{A'B'} = k\mathrm{AB} \tag{1.11}$$

となるような変換 g を **相似変換**と呼び，k を **相似比** という．
　表現を変えれば，A，B，C$\in E^2$ について

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{g(\mathrm{A})g(\mathrm{B})}{g(\mathrm{A})g(\mathrm{C})}$$

となるような g は相似変換である．

$\boxed{\text{問}}$ **7**　相似変換も 1 対 1 の写像であることを，等長変換のときの証明を参考にして，示せ．*

　図形の大きさと形が同じであるということを，数学的に正確に表したのが合同であるが，2 つの図形があって，その大きさは変わっても形が変わらないことを，「2 つの図形が**相似**である」という．実物と模型の関係を理想化した考え方である．いろいろな図形を 3 角形に分けて考えることができる†から，ここでは，3 角形の相似について見ることにする．$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は相似であることを，

$$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{A'B'C'}$$

と書く．

★　線分の相似変換の作図

　相似変換を具体的に実行するためには，線分 AB を k 倍の長さの線分 $\mathrm{A'B'}$ に作図することが必要になる．もちろん，k が正の整数の場合には，コンパスを用いて簡単に求めることができる．ここでは，k が正の有理数（IA-1-3 で習う）の場合について，$\mathrm{A'B'}$ を作図する方法を考えよう．

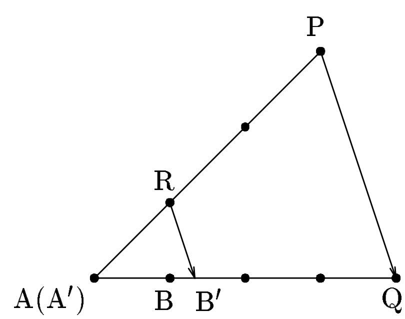


図 1.28: AB の $\dfrac{4}{3}$ 倍の作図

　正の有理数 k は正の整数 p,q を用いて，$\dfrac{q}{p}$ のように与えられる．直線 AB 上に AB を q 倍した点 Q をとる．次に，AB と平行でない直線 AR 上に AR を p 倍した点 P をとる．R 点を通り，直線 PQ に平行な直線を引くと，AB との交点 B’ が定まる．$\mathrm{AB'} = \dfrac{q}{p}\mathrm{AB}$ である．‡

---

*$\boxed{\text{問}}$ 7 の答：$g(\mathrm{A})g(\mathrm{B}) = k\mathrm{AB} \neq 0$ より，$\mathrm{A} \neq \mathrm{B} \Longrightarrow g(\mathrm{A}) \neq g(\mathrm{B})$

†もちろん，曲線図形では近似となる．

‡k が無理数である場合の作図は，この単元の「はじめに」のところで紹介したが，I-A の進度に合せるため，まだここではやらない．

★ 3 角形の相似条件

3 角形の合同条件を作図によって，確かめてみよう．

例 3 3 角形の相似条件 I（2 辺の比と夾角）

$$\boxed{\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{AC}},\ \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A'} \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{A'B'C'}} \tag{1.12}$$

【作図】$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{A'}$ より，平行移動 T と回転移動 R，場合によって，鏡映 S を伴う相似変換によって $\angle\mathrm{A}$ を $\angle\mathrm{A'}$ に移す作図ができる．つまり，$\angle\mathrm{A'} = f(\angle\mathrm{A})$ なる等長変換が存在するが，角度に関しては．等長変換と相似変換の区別はないから，$\angle\mathrm{A'} = g(\angle\mathrm{A})$ なる相似変換 g が存在するとしてよい． 同じ変換 g によって，AB を相似比 k 倍とする $\mathrm{A'B'}$ に，AC を $\mathrm{A'C'}$ に移すとする．

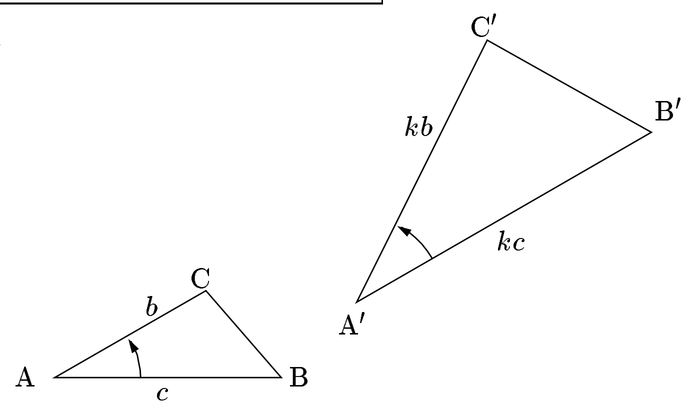


図 1.29: 2 辺の比と夾角

$k\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$,$k\mathrm{AC} = \mathrm{A'C'}$ であり，$g(\mathrm{A}) = \mathrm{A'}$ と同じ相似変換によって，$g(\mathrm{B}) = \mathrm{B'}$,$g(\mathrm{C}) = \mathrm{C'}$ が定まる．したがって，

$$g(\triangle\mathrm{ABC}) = \triangle\mathrm{A'B'C'}$$

問 8 3 角形の相似条件 II（ 3 辺の比が相等）[§]

$$\boxed{\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{BC}} \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{A'B'C'}} \tag{1.13}$$

が成立することを，$k = 2$ の場合に作図によって確かめよ．[¶]

[§] 3 角形の相似条件 III （2 角相等）は，相似比の定まった相似変換にはなり得ない．

[¶] 問 7 の答：△ABC と A 点を図に与え，$\overline{\mathrm{A'B'}} = 2\overline{\mathrm{AB}}$ の線分を作図．次いで，$\angle\mathrm{A'} = \angle\mathrm{A}$ の角を移し，最後に $\overline{\mathrm{A'C'}} = 2\overline{\mathrm{AC}}$ の $\mathrm{C'}$ 点を得る．

★　相似の位置

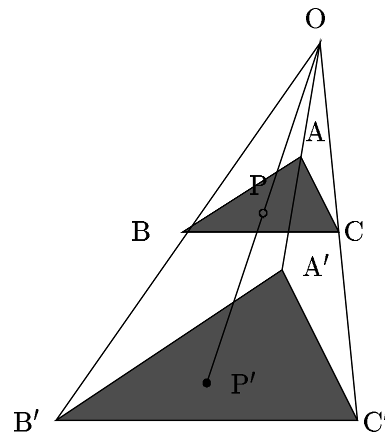


図 1.30: 相似の位置 (a)

$\boxed{\text{例}}$ **4**　△ABC と △A′B′C′の対応する頂点を結ぶ 3 直線 AA′, BB′, CC′が 1 点 O で交わり,

$$\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OC}} = k$$

であるとき，　△ABC ∽ △A′B′C′ .

何故ならば,
△OAB ∽ △OA′B′,　△OAC ∽ △OA′C′, △OBC ∽ △OB′C′ がいずれも **3 角形の相似条件 I（ 2 辺の比と夾角）**から成り立つ.
したがって,

$$\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OC}} = k$$

であり,

$$\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{BC}} = k$$

故に，**3 角形の相似条件 II（ 3 辺の比）** より,△ABC ∽ △A′B′C′.

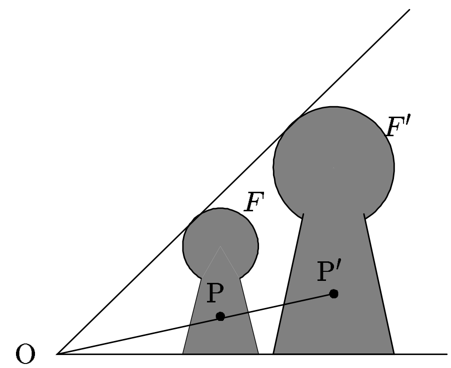


図 1.31: 相似の位置 (b)

上に述べたような位置にある △ABC と △A′B′C′ は,「O を**相似の中心**とする**相似の位置**にある」という．一般の図形 F と F' についても同様に，**相似の中心**と**相似の位置**におくことができる．これは，まさに，点光源でフィルムを拡大してスクリーンで見ることに相当する．