トレーニング

$\boxed{1}$ 人が外出をするため着衣する動作の中で，上着を着る操作を f，下着を着る操作を g，帽子をかぶる操作を h とする．f,g,h の連続操作を記号の間に $\circ$ を入れて表し，右から操作すると約束する．例えば，$f \circ g$ は,「下着を着てから，次に上着を着る」ことを意味し，常識的な意味で洋服を着たことになる．

(1) 次の記号が表す連続操作で，常識的な装備になるものを選べ．

$g \circ f$, $f \circ g \circ h$, $f \circ h \circ g$, $g \circ f \circ h$, $g \circ h \circ f$, $h \circ f \circ g$, $h \circ g \circ f$

前問の逆操作，上着を脱ぐ操作 f^{-1}，下着を脱ぐ操作 g^{-1}，洋服を脱ぐ操作 $(f \circ g)^{-1}$ などを考える．

(2) 次の操作を示す文章を，記号で表せ．

(a) 上着を着たが，また脱いだ．

(b) 上着の上に下着を着てしまったので，着直して正しく着衣した．

(3) $f^{-1} \circ g^{-1}$ と $g^{-1} \circ f^{-1}$ のうち，$(f \circ g)^{-1}$ と等しいのはどちらか．[†]

$\boxed{2}$ **関数と関数記号** $f(x)$

「集合 X から集合 Y への写像」と言った場合，一般に X, Y は数の集合でなくてもよかったが，ここで特に X, Y を数の集合に限り，また写像を上への写像に限った場合の写像を**関数**と呼ぶ．数の集合 X の要素 x は定義域の範囲で独自に変化させていろいろな値を与えてみることを想定しているので，x を**独立変数**と呼び，x に応じて定まる数の集合 Y の要素（像）y は**関数の値**（あるいは，従属変数）と呼ぶ．ここで X は定義域に一致し，Y は値域に一致するように選ぶことにする．ただし，数の集合と言う場合の数の概念は，数学の単元を進めるにしたがって拡張されて行くことに注意するように．[‡]

まとめて言うと，

「2 つの変数 x, y があって，x の値を定めるとそれに応じて y の値がただ 1 つだけ定まるとき y は x の関数であるといい，

$$y = f(x)$$

などの記号で表す.」

この場合，変数の文字や関数記号はいろいろ選ぶことができる．例えば，z は y の関数として，$z = g(y)$ などと書いてもよいし，関数記号と関数の値を一致させて $y = y(x)$ と書く場合もある．

(1) $f(x) = x^2$, $g(y) = y^2$ とする．

(a) x も y の実数のとき，f と g は等しいか．

[†] $\boxed{1}$ の答：(1) $f \circ g \circ h, f \circ h \circ g, h \circ f \circ g$ (2)(a) $f^{-1} \circ f$ (b) $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f$ (3) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

[‡] 複素関数もベクトル関数（2 変数以上の関数）など．

(b) x が整数，y が実数のとき，f と g は等しいか．[§]

(2) $f(x) = -2x + 30$ のとき，次の値を求めよ．
(a) $f(5)$ (b) $f(-2)$ (c) $f(a+1)$ (d) $f(2b)$[¶]

(3) 初速 39.2 m/s（毎秒メートル）で，ボールを鉛直上向きに投げ上げたときの m（メートル）単位の地上からの高さ h，および，上向きを正と約束したときの m/s（メートル毎秒）単位の速度 v は，それぞれ， s（秒）単位の時刻 t の関数 $h = h(t)$, $v = v(t)$ である．投げ上げた時刻 0 s から 1 s おきに変化する高さ h，速度 v を表にすると，右表のようになる．この表から $h(t)$ と $v(t)$ がどんな関数になるかを推定せよ．[‖]

t	h	v
0 s	0 m	39.2 m/s
1 s	34.3 m	29.4 m/s
2 s	58.8 m	19.6 m/s
3 s	73.5 m	9.8 m/s
4 s	78.4 m	0 m/s
5 s	73.5 m	−9.8 m/s
6 s	58.8 m	−19.6 m/s
7 s	34.3 m	−29.4 m/s
8 s	0 m	−39.2 m/s

(4) 合成写像（合成関数）$f \circ g(x) = f(g(x))$ と $g \circ f(x) = g(f(x))$ は，一般に等しくない．
(a) $f(x) = x - 1, g(x) = x^2$ としたとき，$f \circ g(x) = f(g(x))$ と $g \circ f(x) = g(f(x))$ をそれぞれ求めよ．
(b) $f(x) = 2x + 1, g(x) = 3x + 2$ としたとき,$f \circ g(x) = g \circ f(x)$ が成り立つことを示せ．
(c) $f(x)$ の逆写像（逆関数）を求めるには，$x = f(y)$ とおいて，y について解けば，$y = f^{-1}(x)$ の形で与えられる．$f(x) = -2x + 10$ としたとき，$f^{-1}(x)$ を求めよ．また，$f \circ f^{-1}(x)$，および，$f^{-1} \circ f(x)$ を計算せよ．[**]

[§] $\boxed{2}$の答：(1)(a) $f = g$ (b) $f \neq g$

[¶] (2)(a) 20 (b) 34 (c) $-2a + 28$ (d) $-4b + 30$.

[**] (4)(a) $f \circ g(x) = x^2 - 1$,$g \circ f(x) = (x-1)^2$ (b) $f \circ g(x) = g \circ f(x) = 6x + 5$ (c) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 5$, $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$