第1章 合同と相似

1–1 写像

≪ この項で学ぶこと ≫
[**写像，定義域・値域，合成写像，逆写像・恒等写像**]

★ 集合

IA-1-1 で習った集合をここでも使うので，集合についての用語と記号をまとめておこう.
【1】**集合の要素**　$a \in A$（要素 a は集合 A に属する.）
【2】**等しい**　$A = B$（A, B の要素がすべて一致している.）
【3】**部分集合**　$A \subset B$（A のすべての要素が B に属している.）
【4】**共通部分**　$A \cap B$（A, B のどちらにも属している要素の集合.）
【5】**和集合**　$A \cup B$（A, B のどちらかに属している要素の集合.）
【6】**空集合**　ϕ(要素を全く持たない集合.)
【7】**補集合**　$\overline{A}$(全体集合のなかで，その部分集合 A に属さない要素の集合.)

★　写像

2つの集合 X, Y があって，X のどの要素 x にも，それぞれの Y のただ1つの要素 y が対応しているとき，この対応を「 X から Y への **写像**」といい，その対応の仕方を文章で表す代わりに，この写像を記号 f などと名付けて，

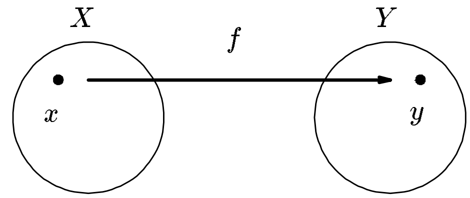


図 1.1: 写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

と書く．また，X の要素 x が Y の要素 y に対応しているとき，「 y を f による x の **像**，要素 x を要素 y の **原像** 」と呼び，

$$y = f(x) \tag{1.1}$$

と表す．

例 1　集合 X の要素と集合 Y の要素の間に，次の図 (1)，(2)，(3)，(4) で定義される対応があるとき，X={a, b, c } から Y={p, q, r} への写像であるのはどれか．また，その場合の要素間の関係を $f(x)=y$ の形で書け．

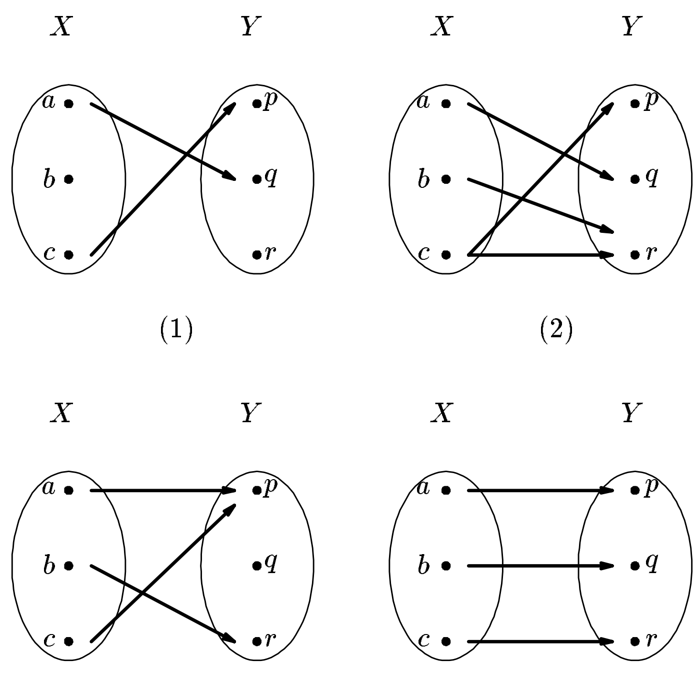


図 1.2: 写像はどれか．

(1)　では，$b \in X$ に対応する Y の要素が存在しない．上の文で「X のどの要素 x にも」とあるから，この場合は写像でない．

(2)　では，Y の2つの要素 p と r が $c \in X$ に対応している．「Y のただ1つの要素 y が」とあるから，この場合も写像でない．

(3) は，a，$c \in X$ が同じ $p \in Y$ に対応しているが，そのことは写像の定義には何ら反してはいない．この場合は 写像である．

(3) は，$f(a) = p$，$f(b) = r$，$f(c) = p$ と表される．

(4) が $\underline{\underline{\text{写像である}}}$ のは，ほとんど $\overline{\text{自明}}$ であろう．

(4) は，$f(a) = p$,
$f(b) = q$，$f(c) = r$
と表される．

もう一度，X, Y それぞれの要素が数となる場合で，おさらいしてみよう．

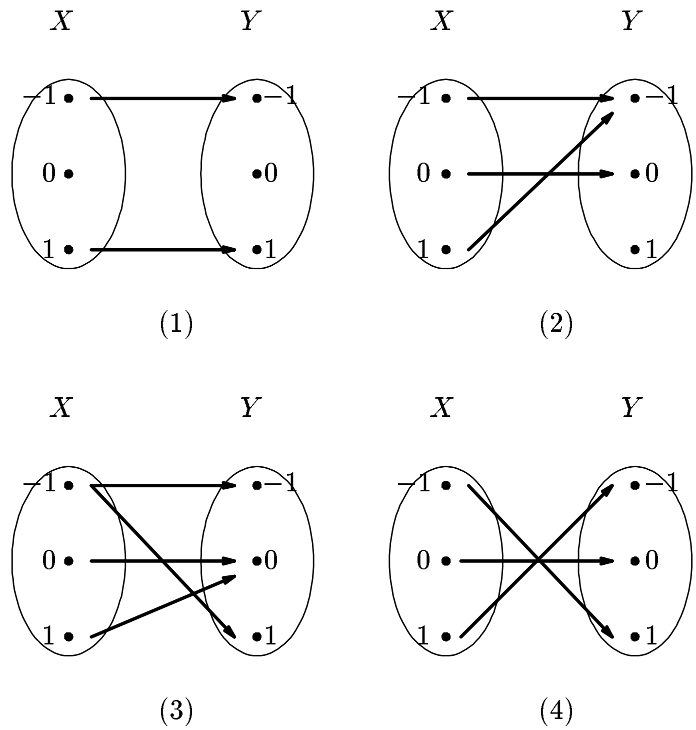


図 1.3: 写像はどれか．

$\boxed{\text{問}}$ **1**　集合 X の要素と集合 Y の要素の間に，次の図 (1)，(2)，(3)，(4) で定義される対応があるとき，$X = \{-1, 0, 1\}$ から $Y = \{-1, 0, 1\}$ への写像であるのはどれか．また，その場合の要素間の関係を $f(x){=}y$ の形で書け．*

$\boxed{\text{例}}$ **2**　$X{=}\{a,\ b,\ c\}$，$Y{=}\{1,\ 0\}$ とする．X から Y への写像として考えられるものをすべて図に示せ．

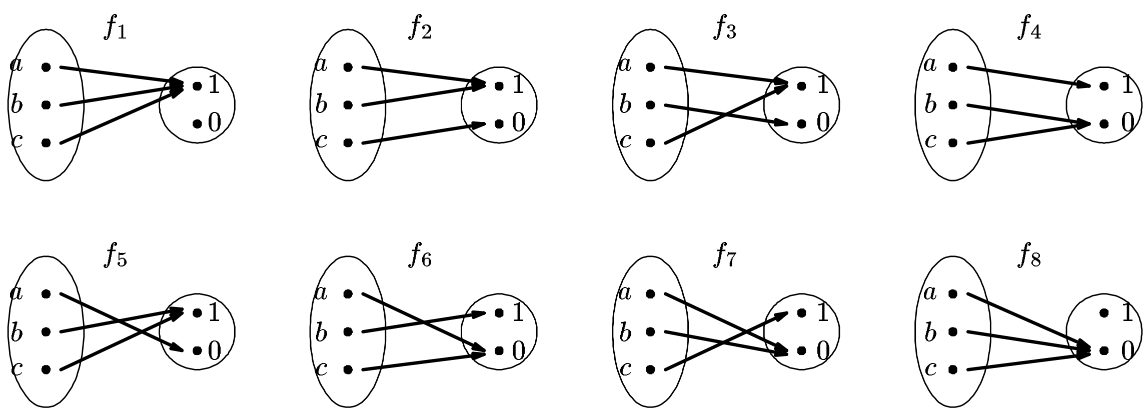


図 1.4: 考え得る写像

* $\boxed{\text{問}}$ 1 の答：(1)，(3) は写像ではなく,(2)，(4) が写像である.(2) は,$f(-1) = 1$，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$.(4) は ,$f(1) = -1$，$f(0) = 0$，$f(-1) = 1$．対応させるための操作までは，ここでは問題にしていないが,(1) は各要素の逆数をとる操作.0 の逆数は存在しない.(2) は，各要素を 2 乗する操作.(3) は$\frac{1}{2}$乗して実数部をとる操作.(4) は　要素にマイナスを付ける操作．今の段階では深入りしない．

X の各要素はすべて Y の要素である 1 か 0 のどちらかに対応する．両方に対応させたものは写像ではない．下の図の 8 通りが考えられる．それぞれ，f_1，f_2，f_3，f_4，f_5，f_6，f_7，f_8 と名付けておく．

問 2　$X=\{1,\ 2\}$，$Y=\{3,\ 4\}$ とする．X から Y への写像として考えられるはいく†つあるか．

特に，原像の属する集合と像の属する集合が一致する，すなわち，$Y=X$ である写像を**変換**と呼ぶ．例 1 (3)，(4) で，$Y=\{p,\ q,\ r\}$ の代わりに $Y=\{a,\ b,\ c\}$ とすれば，この写像は変換である．問 1 (2)，(4) は　$X=Y=\{-1,\ 0,\ 1\}$ であるから変換．例 2，問 2 は，変換ではない．

ここまでは，集合 X, Y が有限集合の場合を見てきたが，X, Y が無限集合の場合の写像の例を考えて行こう．

例 3　II-1-1 で等差数列を習うが，初項 -1，公差 2 の等差数列

$$a_n=2n-1$$

を取り上げてみよう．ここでは，原像 n は 0 と正の整数全体の集合に属し，像 a_n は -1 以上の整数の集合となっていて，写像 $f(n)$ を数列の書き方で　a_n と表している．すなわち，

$$a_0=f(0)=2\cdot 0-1=-1$$
$$a_1=f(1)=2\cdot 1-1=1$$
$$a_2=f(2)=2\cdot 2-1=3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

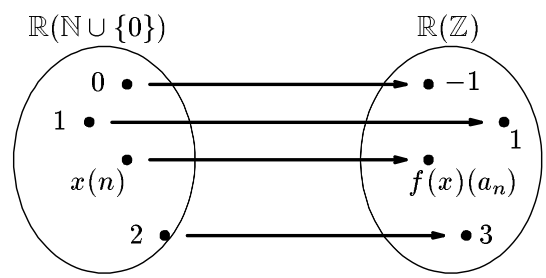


図 1.5: $f(x)=2x-1$

一般に，数列は写像と見ることができるが，原像の属する集合と像の属する集合が一致しないから，変換ではない． 有理数については IA-1-3，実数については II-1-3 で学ぶが，n のところを x と記して，原像 x をいろいろな数とし，数列のときと同じ「 x に 2 を掛けた値から 1 を引く」という指定された操作が写像 f である考える．すなわち，

$$f(x)=2x-1$$

の式を通じて写像が定まるとき，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ として，$x\in\mathbb{R}$ ならば，$f(x)\in\mathbb{R}$ となり，この場合 f は変換となる．

図形をある規則にしたがって移す操作も写像である．

† 問 2 の答：4 通り．① $f_1(1)=3$，$f_1(2)=3$．② $f_2(1)=3$，$f_2(2)=4$．③ $f_3(1)=4$，$f_3(2)=3$．④ $f_4(1)=4$，$f_4(2)=4$．これも，例えば，$f_1(x)=\left[\dfrac{x}{3}\right]+3$，$f_2(x)=x+2$，$f_3=5-x$，$f_4(x)=\left[\dfrac{x}{3}\right]+4$ などと式も考えられるが，そのことについては，まだ問題にしない．

例 **4** 空面内の点 P を，与えられた平面 H が線分 PP′ の中点を通り，PP′ が H に垂直になるような点 P′ に移すことを考える．操作は変換であり，P′ が P の像である．H を鏡の面と見なすと，P′ は P を鏡に写したときに見える鏡の中の「像」である．鏡というたとえは取り除いてたんに幾何学的操作だとすれば，P,P′ はともに同じ空間内の点全体の集合の要素であるから，この写像は変換である．この変換を「平面 H に関する**鏡映**」という．

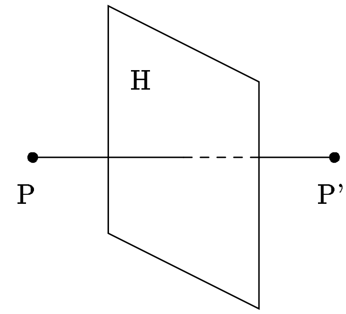


図 1.6: 鏡映

例 **5** 平面 H と，H に平行でない直線 l とがある．点 P に対して，l と平行で P を通る直線を L_{P} とする．H 内の点の集合を H， L_{P} 上の点の集合を L_{P} と書くとき，

$$f(\mathrm{P}) = L_{\mathrm{P}} \cap H$$

となるような写像を**平行射影**と呼ぶ．太陽は地球から十分遠いので，太陽から来る光線はたがいに平行と見なせる．点 P は太陽光に照らされた空間上のいろいろな点，像 $f(\mathrm{P})$ は地面にできたその影となる．

この写像の原像は空間上の点全体の集合に属し，像は集合 H ，つまり，指定平面上の点全体の集合に属すから，変換ではない．平行射影を利用して，(x, y, z) 座標を作ることができる．

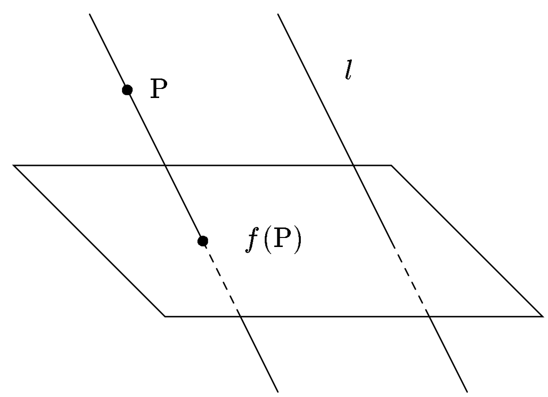


図 1.7: 平行射影

例 **6** 本来ほぼ球面上の図形である地球上の地形を，紙の上の地図に写す操作も写像である．有名なメルカトール図法という作図法は，赤道で球面の接する円柱面内に球面上の各点を射影してから，円柱の側面のどこかから軸に平行に切り開き平面地図としている．その際，地球上の 3 点 A, B, C のなす角 ∠ABC と，その像 A′，B′，C′ のなす角 ∠ A′B′C′ が等しくなるように移す．つまり，地形は実際の形から南北方向に歪んでしまうが，航海のためにそうしていることは，言うまでもない．

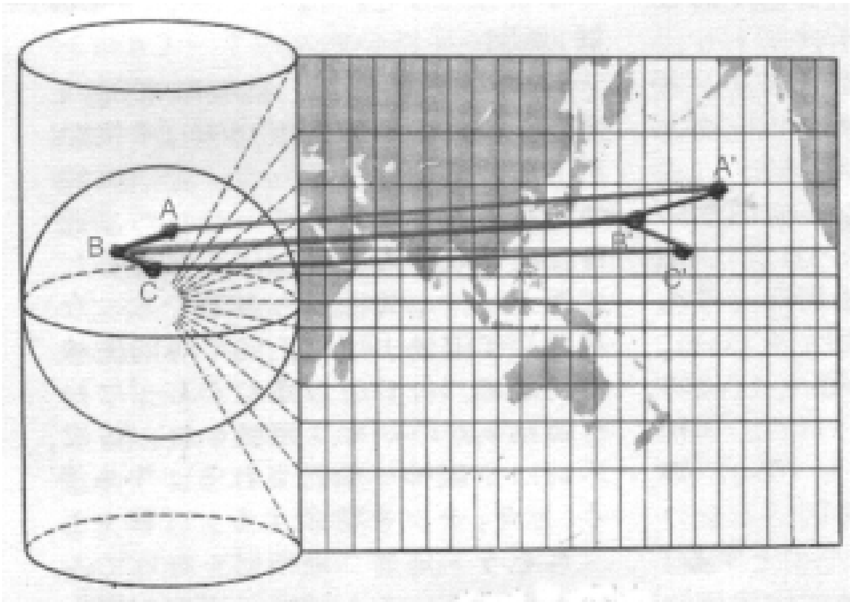


図 1.8: メルカトール図法

★　定義域と値域

写像 $f : X \longrightarrow Y$ において，x の動く範囲 X を「 f の**定義域**」という．また，f による像全体の集合

$$\{f(x) | x \in X\}$$

を「 f の**値域**」という．

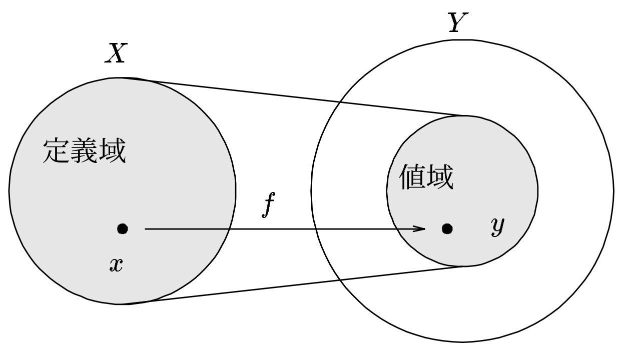


図 1.9: 定義域と値域

例 7　例 1 (3) では，定義域は $X = \{a,\ b,\ c\}$ であり，値域は

$$\{f(a),\ f(b),\ f(c)\} = \{p,\ r,\ p\} = \{p,\ r\} \neq Y$$

$\{p,\ r\} \neq Y$ は，「$\{p,\ r\} = Y$ ではない」の意味である．すなわち，$\{p,\ r\} \subset Y$ ではあるが $\{p,\ r\} \supset Y$ ではないからである．また，(4) では，定義域は $X = \{a,\ b,\ c\}$，値域は $\{p,\ q,\ r\} = Y$ である．

(1) は，写像ではないから，定義域が $\{a,\ b\}$ だなどとは言わない．値域は Y の部分集合であるが，Y に等しいとは限らないが，定義域は，つねに原像の属する集合 X そのものである．[‡]

[‡] X，Y が数の集合である場合の写像である関数については，IA-2，II-2 に先だって，この節のトレーニングで取り扱うが，その際，他には $x = \mathbb{R}$ と考えて，定義域を $\mathbb{R}$ の部分集合と指定する記述もあるが，ここでは採用しない．

問 3 問 1 で写像であると答えた例についての定義域と値域を言え．§

例 8 例 2 の場合，定義域はすべての写像に関して $\{a, b, c\}$ であるが，値域は，f_1 では $\{1\}$，f_8 では，$\{0\}$ で，この *2* つを除く他の写像では $\{1, 0\}$ となる．

問 4 問 2 で答えたすべての写像についての定義域と値域を言え．¶

例 9 例 3 で数列の場合，定義域は *0* と自然数全体の集合 $\{0\} \cup \mathbb{N}$，値域は -1 以上の整数の集合 $\{a_n | a_n \geqq -1, a_n \in \mathbb{Z}\} \neq \mathbb{Z}$ である．

また，$f(x) = 2x - 1$ の場合は，定義域は $\mathbb{R}$，値域も $\mathbb{R}$ だから変換なのである．

例 10 空間内の点全体の集合を E^3 と書くことにする．例 4 の鏡映の定義域は E^3，値域も E^3 なので変換である．

問 5 例 5 の平行射影の定義域と値域を言え．‖

★ 上への写像と 1 対 1 の写像

写像 $f : X \longrightarrow Y$ において，f の値域が Y と一致するとき,「 f は X から Y の**上への写像**である」という．

ただし，上への写像であるかどうかということは，集合 Y を最初に定める約束にもよる．何故ならば，$Y = \{f(x)\}$ と約束してしまえばつねに上への写像となるにきまっている．

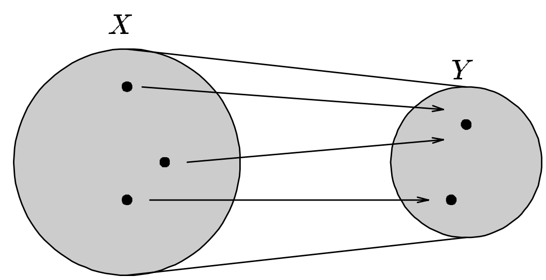


図 1.10: 上への写像

$f : X \longrightarrow Y$ において，X の異なる要素には，Y の異なる要素が対応するとき，すなわち，

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{1.2}$$

が成り立つとき,「 f は X から Y への **1 対 1 の写像**である」という．

§ 問 3 の答：(2) の定義域は $X = \{-1, 0, 1\}$，値域は $\{-1, 0\} \neq Y$，(4) の定義域は $X = \{-1, 0, 1\}$，値域は $\{-1, 0, 1\} = Y$．

¶ 問 4 の答：定義域はすべて $\{1, 2\}$，値域は $\{3\}$ となるもの，$\{4\}$ となるもの，$\{3, 4\}$ となるものがある．

‖ 問 5 の答：定義域は E^3，値域は H．

例 11 例 1 (3) は $\{p,\ r\} \neq Y$ であるから，上への写像ではない．また，$a \neq c$ であるが $f(a) = f(c) = p$ であって，1 対 1 の写像でもない．
(4) は，$\{p,\ q,\ r\} = Y$ であるから，上への写像である．また，a, b, c や p, q, r が，それぞれ，異なる値であると仮定するなら，

$$a \neq b \neq c \Longrightarrow f(a) \neq f(b) \neq f(c)$$
$$(p \neq q \neq r)$$

だから，(1.2) より 1 対 1 の写像である．

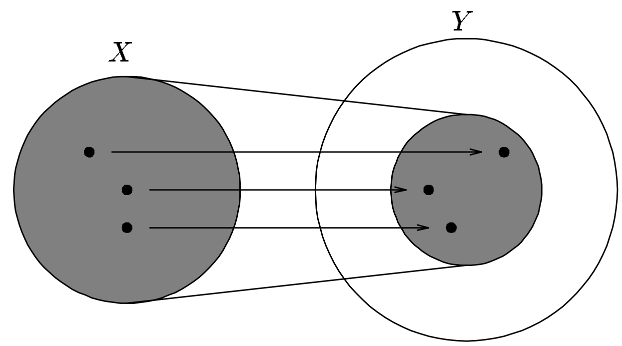


図 1.11: 1 対 1 の写像

問 6 問 1 で写像であると答えた例は，それぞれ，上への写像であるか，また，1 対 1 の写像であるか．**

例 12 例 2 の場合．f_1, f_8 は上への写像ではなく，他はすべて上への写像である．また，どの写像も少なくとも 2 つの要素が同じ像をもつから，すべての写像が 1 対 1 の写像ではない．

問 7 問 2 の写像の例は，それぞれ，上への写像であるか，また，1 対 1 の写像であるか．††

例 13 例 3 で数列のとき，像の属する集合 $Y = \mathbb{Z}$ とした場合は，上への写像ではないが，等差数列はつねに 1 対 1 の写像である．数列一般では，1 対 1 の写像とならないものも考えられる．

また，$f(x) = 2x - 1$ の場合は，上への写像である．

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow 2x_1 - 1 \neq 2x_2 - 1,\ (f(x_1) \neq f(x_2))$$

だから，(1.2) より 1 対 1 の写像でもある．

** 問 6 の答：(2) は，上への写像でも，1 対 1 の写像でもない．(4) は，上への写像，かつ,1 対 1 の写像．

†† 問 7 の答：値域が {3, 4} のものは，上への写像で，かつ，1 対 1 の写像である．他は，上への写像でも，1 対 1 の写像でもない．

$\boxed{\textbf{問}}$ **8** $\boxed{\text{例}}$ 4, $\boxed{\text{例}}$ 5, $\boxed{\text{例}}$ 6, は，それぞれ，上への写像であるか，また，1 対 1 の写像であるか．[‡‡]

[参考]

★ 合成写像

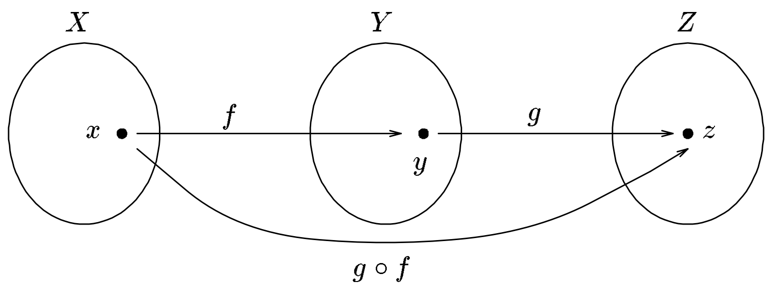


図 1.12: 合成写像

2 つの写像

$$f : X \longrightarrow Y,\quad g : Y \longrightarrow Z$$

があるとき，X の各要素 x に対して，写像 f により Y の要素 y が定まり, その y に対して，写像 g により Z の要素 z が定まる．すなわち，$y = f(x)$,　$z = g(y)$ だから，

$$z = g\left(f(x)\right)$$

このようにして得られる X から Z への写像を「 2 つの写像 f, g の**合成写像**」といい，$g \circ f$ と書く．すなわち，

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) \tag{1.3}$$

のことである．

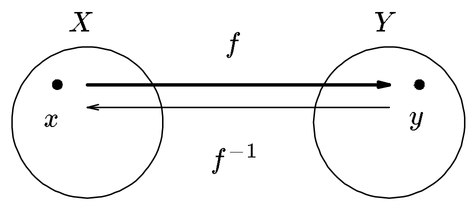
[‡‡] $\boxed{\text{問}}$ 8 の答：$\boxed{\text{例}}$ 4 は，上への写像，かつ，1 対 1 の写像．$\boxed{\text{例}}$ 5 は，上への写像であるが 1 対 1 の写像ではない．$\boxed{\text{例}}$ 6, は，上への写像，かつ，1 対 1 の写像．

[**参考**]

★　逆写像と恒等写像

写像 $f : X \longrightarrow Y$ において，f が 1 対 1 かつ，上への写像であるときは，Y の要素 y に対して，$y = f(x)$ となるような X の要素 x がただ 1 つ定まるから，y にこの x を対応させる Y から X への写像が考えられる．この写像を「 f の**逆写像**」といい，f^{-1} で表す．

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y) \tag{1.4}$$



集合 X の各要素 x に，x 自身を対応させる X から X への写像を（つまり，形式的な操作で何もしないことと同じであるが），**恒等写像**と呼ぶ．

$f : X \longrightarrow Y$ が逆写像 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ をもつとき，$f^{-1} \circ f$ は X の恒等写像，また，$f \circ f^{-1}$ は Y の恒等写像である．