

ISSE 数学

I. 集合の数学 B . 図形の対称性

数学カリキュラム 1 年度

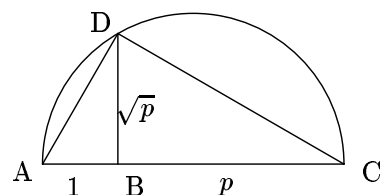
ISSE テキスト 編集部

Copyright 1999 by Akira.TOKUNAGA

はじめに

紀元前 300 年頃に成立したユークリッド幾何学の作図法は「定規とコンパスだけを用いる」というルールを持っていました。このルールは、おそらく、古代ギリシャ人がエジプト文明から受け継いだものの一つでしょう。定規は目盛りを読むために用いるのではなく、縄を張ってこれをなぞって行くのと同様に、直線を引くだけの器具であり、また、コンパスも一端を固定した縄の他端を回して跡を付けて行く操作を机上に再現したものでしょう。こうして見れば、幾何学の作図をするということは、ナイル河が氾濫する度に、分からなくなった所有地の境界線を引き直すという、大切な役割を持った「縄張り屋」と呼ばれる古代エジプトの測量技師がやって来たこととほとんどそのままです。幾何学 (geometry) に当たるギリシャ語も「土地」を表す $\gamma\eta$ と「測定する」を表す $\mu\epsilon\tau\rho\acute{\omega}$ が組み合わせられた用語でした。

ところが、こんな実際的な作図上のルールが、なんと、有理数、無理数といった数論にも関係することが、19 世紀までかかって、少しずつ分かって来るのです。まず、定規だけに制限すれば、有理数だけしか作図できません。これにコンパスを加えると「まず、右図のように、線分 AB の延長上に AB の p 倍の長さの線分 BC を作図する。次いで、AC を直径とした半円を描き、B 点から立てた垂線との交点を D 点とする。BD = \sqrt{p} が得られる。」というように、



平方根を含んだ数も作図可能となります。しかし、このルールでは、ギリシャ時代にも分かっていた作図不能問題「1 辺が与えられた立方体に対して、体積が 2 倍の立方体の 1 辺を作図することはできない。」や「与えられた円の面積に等しい正方形を作図することはできない。」が示すように、有限回の操作では、立方根 $\sqrt[3]{2}$ や円周率 π を含む数は作図できないので、ここまでは、まだ、実数には到達できないことも分かって来たのです。

この図形の数学を吸収したギリシャ人が創造した画期的なことがあります。その一つの証拠は「定義」「公理」「定理」「証明」といった用語は、ギリシャ語にはあっても、それ以前の文化圏における使用言語である何種類かのエジプト語、ヘブライ語には存在しないことによっても示されています。証明されたものを積み重ねて体系化した、学問としての幾何学はこの意味でギリシャから始まったとされるのです。そして、例えば、ガリレイは「物体の運動は数学的法則にしたがう。」と主張した最初の人だったのですが、17 世紀になってもまだ、ガリレイの考えている数学とは、この幾何学だったのです。さらに、ニュートンに至っても、彼の著書「自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)」の内容は、ほと

んど定義と定理，そして幾何学を使った証明の連続です．体裁からして，ユークリッドの「原論」を模しているかのようです．

幾何学の証明法は，このように数学の重要な位置を占めているのですが，17世紀になると解析的に，つまり，計算によって証明することが主流となりました．この教科書では，先に行けば主にこの解析幾何学の記述法を学ぶことになりますが，まず初めはほとんど計算には頼らない，図形の変換の観点から勉強します．その方が，先へ行って数学の他の分野との関連が付け易いからです．

19世紀になって，ユークリッド幾何学の見直しが始まりました．その中で，今まで直観的にも信じられて来た「原論」の第5公準，いわゆる「ある直線に対して，その直線外の点を通る平行線はただ1本しかない。」の仮説は，むしろ，その存在のために幾何学の体系がギクシャクして来る，と感じる人も出て来るのです．

「平行線は2本以上あつたりする。」のが非ユークリッド幾何学ですが，アインシュタインの一般相対性理論に応用されたという意味では，自然の構造を反映しているものとなっているのです．そういうと，皆は，数学の中でも幾何学は（どんな幾何学でも，）空間という自然物を取り扱う科学だと思われるかも知れません．しかし，自然科学の原理や法則と呼ばれるものが，それらが成り立たなくなっていることを示す観測や実験によって修正されて来たことは，過去にいくつかありますが，幾何学の公理や定理を，空間を測定することによって覆すことはできません．その意味でいつの時代の幾何学も，出発点はそこにあるかも知れませんが，自然そのものからはいったん切り離された所に位置するという特性を持つ数学だったのです．

目次

1 合同と相似	5
1-1 写像	5
集合	5
写像	6
定義域と値域	10
上への写像と 1 対 1 の写像	11
合成写像	13
逆写像と恒等写像	14
1-2 等長変換	17
等長変換	17
面積と角	18
平行移動	19
平行移動の作図	20
回転移動	21
回転移動の作図	22
鏡映(線対称移動)	22
鏡映の作図	22
平面図形の合同	23
3 角形の合同条件	24
相似変換	25
線分の相似変換の作図	26
3 角形の相似条件	27
相似の位置	28
1-3 幾何学と証明	30
定理と証明	30
幾何学の定理・公理	31
合同公理	33
命題の逆と必要条件・十分条件	34
条件と集合	36
証明法	38
3 角形の合同定理	40
平行線公理	41
解析幾何学	43