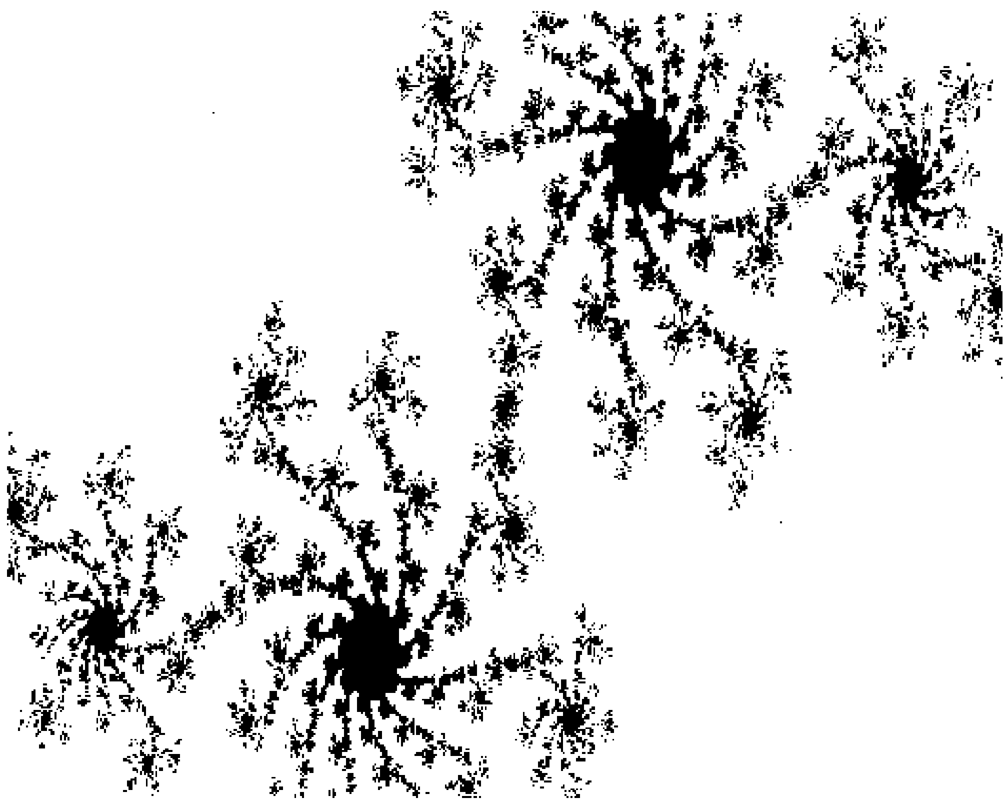
トレーニング

1 いろいろな λ 値について，ある値 z_0 から始めて，

$$z_{n+1} = \lambda z_n(z_n - 1)$$

を計算し，そのうち発散しない複素数の集合 $\{z_n\}$ をガウス平面上の点として描くことにする．例えば，$\lambda = 2.3 + i$ ととってみると, 次の図のようになることが知られている．

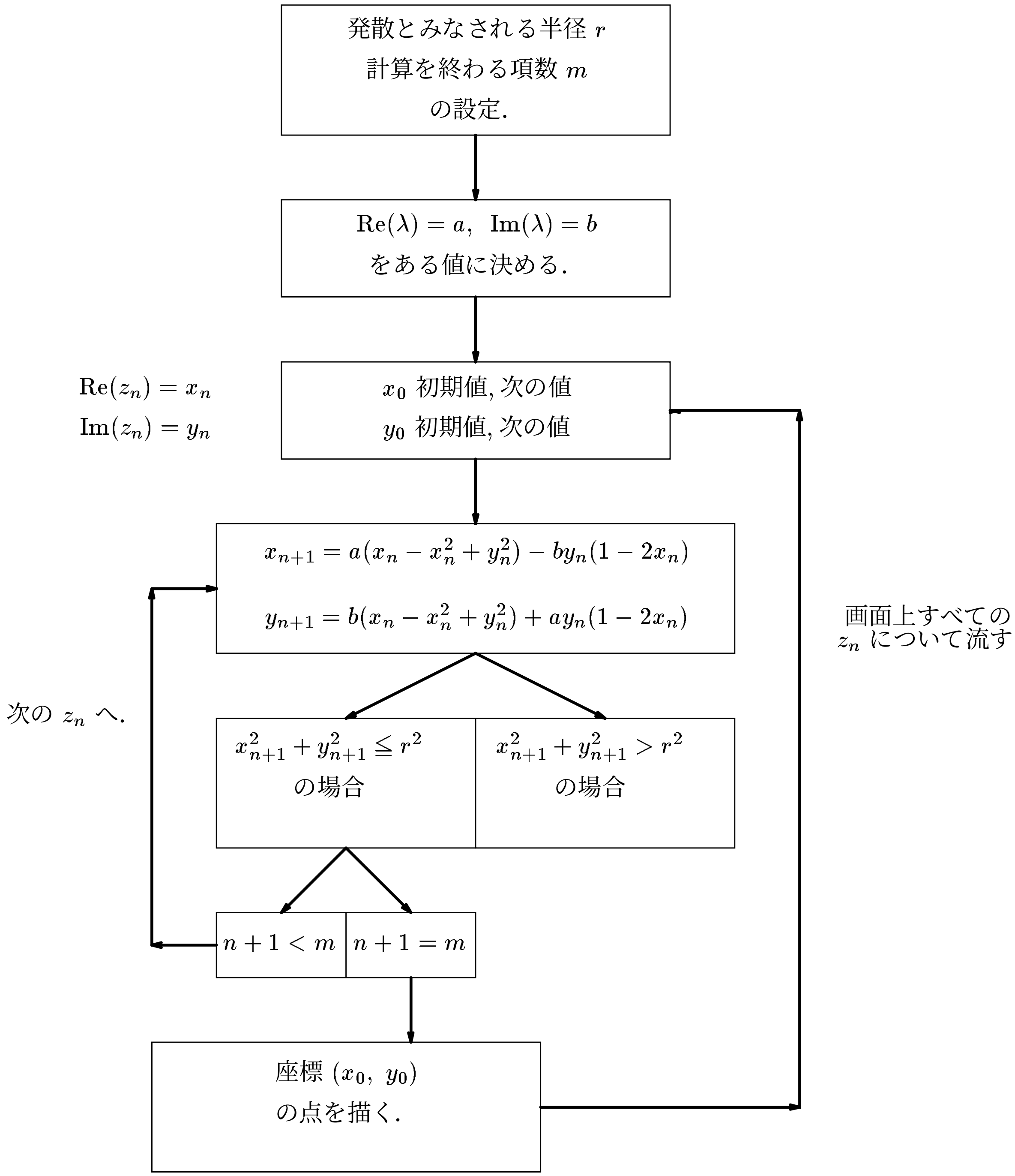


(1) $\lambda = 2.5$ のとき，$z_0 = 0.6 + 0.25i$ から始めて, z_1，z_2，z_3，z_4 をガウス平面上に図示せよ．収束する点は，$\mathrm{Im}(z) = 0$ の場合の収束点と一致する．これを求めよ．
(2) $\lambda = 2.5$ のとき，$z_0 = 0.5 + 0.25i$ から始めて, z_1，z_2，z_3，z_4 をガウス平面上に図示せよ．(この場合は, 発散する．)
(3) 次ページのチャート*を参考に，手持ちの計算機（とその言語）で図がどこまで描けるか試みてみよ．†

---

*このチャートでは，z_0，z_1，z_2，$\cdots$ とプロットせずに，表示いたい画面全体の各点について，それぞれ収束するか否かを調べている．

†$\boxed{1}$ の答：(1) $z_1 = 0.756 - 0.125i$, $z_2 = 0.500 + 0.160i$, $z_3 = 0.6899 + +0.00007i$, $z_4 = 0.5536 - 0.00007$, 収束点 $z = 6$　(2) $z_1 = 0.16.25$, $z_2 = -619$, $z_3 = -9.61 \times 10^5$, $z_4 = -2.31^{12}$



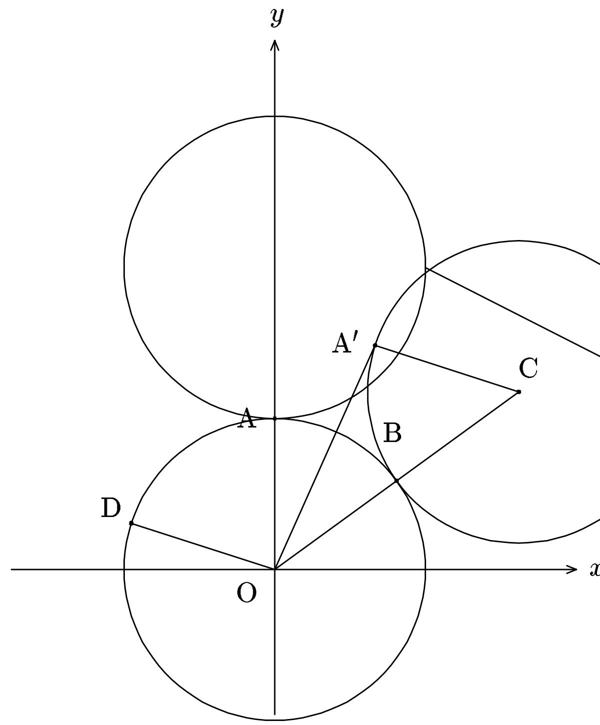
発散とみなされる半径 r
計算を終わる項数 m
の設定.
$\mathrm{Re}(\lambda) = a$, $\mathrm{Im}(\lambda) = b$
をある値に決める.
$\mathrm{Re}(z_n) = x_n$
$\mathrm{Im}(z_n) = y_n$
x_0 初期値, 次の値
y_0 初期値, 次の値
$x_{n+1} = a(x_n - x_n^2 + y_n^2) - by_n(1 - 2x_n)$
$y_{n+1} = b(x_n - x_n^2 + y_n^2) + ay_n(1 - 2x_n)$
画面上すべての
z_n について流す.
次の z_n へ.
$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 \leqq r^2$
の場合
$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 > r^2$
の場合
$n+1 < m$
$n+1 = m$
座標 (x_0, y_0)
の点を描く.

2 半径 1，中心 P の剛体球が，半径 1，中心 O の固定された剛体球とはじめ点 A で接している．上の球が下の球の表面に沿って滑ることなく静かに転がるとき，2 球は，図の x,y をガウス平面の実軸，虚軸としたとき，座標 $z = \frac{1}{7}(3 \cdot 21^{\frac{1}{2}} + 10i)$ の B 点で互いに離れるという．
この瞬間に，動き出す前に上の球の A 点にあった球面上の位置は，点 C について $\angle \mathrm{A'CB}$ だけ回転して A$'$ 点に来る．A$'$ 点‡の座標 w を以下の順序で求めよ．

(1) $\overline{\mathrm{A'B}}$ を平行移動して，$\overline{\mathrm{DO}}$ としたとき，D 点の座標を z，w で表せ．

(2) 演算 $1 \times z$ は，x 軸の点 1 を原点 O から $\overline{\mathrm{BO}}$ が $+x$ 軸となす角だけ回転移動させたものであり，$1 \times z \times z$ はその 2 倍の角の回転移動，$\times i$ はさらに角 $\frac{\pi}{2}$ の回転移動である．このことより，D 点の座標を求めよ．

(3) A$'$ 点の座標を $(x,\ y)$ の形で求めよ．



‡ $\boxed{2}$ の答：(1) $w - 2z$　(2) $w - 2z = iz^2$　(3) $x = \frac{42 \cdot 21^{\frac{1}{2}}}{17^2}$，$y = \frac{429}{17^2}$