2–3 複素数

≪ この項で学ぶこと ≫
[**虚数の導入，複素数の演算，虚数の必要性，2 方程式の複素解，ガウス平面と演算，ガウス平面と図形，**$z^n - 1 = 0,\ z^n + 1 = 0$ **の解**]

★ 虚数の必要性

引き算を習ったばかりの小学生は，$3 - 2$ の計算はできるが，$2 - 3$ は答られない．つまり，$x + 2 = 3$ の解は存在するが，$x + 3 = 2$ の解は存在しないとしていた段階から，数の仲間に負の数を付け加えることによって方程式 $x + 2 = 3$ も解けるようにする．この単元 IA でも，このような考え方の路線をたどって，前節の代数的無理数までたど りついた訳である．

それ故，前節の 2 次方程式の解で，例えば，

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

の解は，判別式を調べると，$D = 5^2 - 4 \cdot 6 > 0$ だから存在し，

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

の解は，$D = 2^2 - 4 \cdot 3 < 0$ だから存在しない．つまり,「方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ は解けない.」と言われたときには，何かしら思考の流れを堰き止められたような気にならなかっただろうか.

そこで，もっと簡単な 2 次方程式

$$x^2 + 1 = 0 \tag{2.29}$$

を満たす数の一方として，2 乗すれば -1 となるような，実数の範囲を超えた数を導入し，この数を記号 i で表すことにする．i を**虚数単位**と呼ぶ．すなわち,

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{虚数単位}\\ i^2 = -1\end{array}} \tag{2.30}$$

i を元にして，b を実数として，bi の形の数を**純虚数**と呼ぶ.

方程式 (2.29) の解は，$1 = -i^2$ とおいて，

$$x^2 - i^2 = 0$$

$$(x+i)(x-i) = 0$$

と変形できるから，

$$x = -i,\ i$$

である.

$\boxed{\text{問}}$ **1** ． i を用いて，$x^2 + 4 = 0$ の解を求めよ．*

さらに，純虚数も含めた一般の虚数は，a，b を実数，ただし，$b \neq 0$，として，$a + bi$ と表せる．$b = 0$ をも含め，すなわち，今までの実数をも合わせて**複素数** と呼ぶ．また，複素数を z とおいたとき，**共役な複素数** z^*，および，**絶対値** $|z|$ を以下のように約束する.

複素数
a，$b \in \mathbb{R}$ のとき，
複素数： $z = a + bi$　(2.31)

共役な複素数： $z^* = a - bi$
絶対値：$|z| = (zz^*)^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$　(2.32)

$a = b = 0$ の場合の表記は，単に 0 と書く．すなわち，$a + bi = 0$ と $a = b = 0$ は同値である.

複素数 z の**実部**のみを取り出したいとき，あるいは，**虚部**のみを取り出したいとき，$\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$ の記号を使う．すなわち，

$$z = a + bi \quad \text{において，} \quad \mathrm{Re}(z) = a, \quad \mathrm{Im}(z) = b$$

である.

* $\boxed{\text{問}}$ 1 の答：$x = -2i,\ 2i$

★ 複素数の演算

ここまで，習って来たことから，数の仲間は，

$$
\text{複素数}\begin{cases}\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正の整数（自然数）}\\ 0\\ \text{負の整数}\end{cases}\\ \text{整数でない有理数（既約分数）}\end{cases}\\ \text{無理数}\end{cases}\\ \text{虚数}\end{cases}
$$

のように，拡張され続けて来た．もう数の拡張は最後なのか？ この疑問は，最後まで持ち続けていて欲しい．

複素数の加減乗除は，次のように約束する．$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ とする．

【1】**加法**：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

加法の定義をすれば，減法はその逆演算として定まる．上式を移項すれば，

$$a+bi=\{(a+c)+(b+d)i\}-(c+di)$$

$a'=a+c,\ b'=b+d$ とおけば，$a=a'-c,\ b=b'-d$ となるから，書き換えると，

$$(a'+b'i)-(c+di)=(a'-c)+(b'-d)i$$

$a',\ b'$ を $a,\ b$ と書きなおして規則をまとめると，

減法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

【2】**乗法**：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

加法と減法の関係と同様に，乗法を定めれば，除法はその逆演算であるが，ここでは，$\dfrac{a+bi}{c+di}$ は $a+bi$ と $c+di$ の逆数 $\dfrac{1}{c+di}$ の積であると考える．以下では，分母が 0 とならないように，$\underline{c=d=0\text{でないとき}}$ とする．分子・分母に $c-di$ を掛ける．

$$\frac{1}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

分母は $c+di$ の絶対値の 2 乗であり，分子には，乗法の規則【2】が適応できる．

除法：$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{b^2+c^2}i$

これら規則は，実数のときの四則演算，純虚数どうしの四則演算，実数と純虚数の四則演算が矛盾しないようにできている．[†]

[†]複素数の演算が 2 次元ベクトルと同じであるという考えは，乗除については当たらない．複素数 $a+bi$ はむしろ 2 行 2 列の行列 $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ に対応する．$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}$ の演算を実行してみよ．

$\boxed{\text{問}}$ **2** ．次の $z,\ w$ についた $z+w,\ z-w,\ zw, \dfrac{z}{w}$ の計算をせよ．

(1) $z=3+i,\ w=1+2i$　(2) $z=\dfrac{1}{2}\left(-1+2^{\frac{1}{2}}i\right),\ w=\dfrac{1}{2}\left(-1-2^{\frac{1}{2}}i\right)$ ‡

★　虚数の必要性

虚数」という語感から，現実には存在しない数」というようなイメージを与えられてしまいがちであるが，それは誤解である．いろいろな自然現象を数式で表す努力をしているうちに，人々はそれまでの数式を超えた新しい表式を必要とするようになる．そして既に習って来たように，式をより具体的に考えるためには数 (新しい数) が必要になる訳である．ここで取り上げている虚数もその一例である．§

[参考]

$\boxed{\boxed{\text{例}}}$ **1** ．**光の反射・透過**

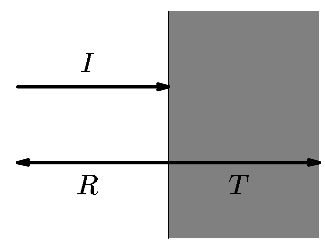

図 2.6: 光の反射・透過

波動・場の物理学」は，2 年次のカリキュラムである．正確にはそこで習うのであるが，以下では，まず最初は,「波」を表す I, R, T は，水面波の波の高さに相当するもの (実数)，波の強さ I^2,R^2,T^2 (後から，約束を変える.) は，それぞれの波の持つエネルギーと理解して進もう．

光が境界面で，一部は反射し，残りは透過する例を考えてみる．入射波を I，反射波を R，透過波を T とおくと，反射波と透過波の重ね合わせが元の入射波となっているはずであるから，

$$R+T=I \tag{2.33}$$

一方，入射波のエネルギーは反射波のエネルギーと透過波のエネルギーに分配されるが，それ以外に失われることはないから，

$$R^2+T^2=I^2 \tag{2.34}$$

‡ $\boxed{\text{問}}$ 2 の答：(1)$z+w=-1, z-w=2-i, zw=1+7i, \dfrac{z}{w}=-5+5i$　(2)$z+w=4+3i$, $z-w=2^{\frac{1}{2}}i, zw=\dfrac{3}{2}, \dfrac{z}{w}=1-\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{3}$

§ 複素数とある形の 2 行 2 列の行列と一対一対応があることは，前項の註で少し見たが，一般の行列はそれを超えた表式である事は言うまでもない．

(2.33) 式と (2.34) 式が両立するためには，(2.33) の両辺を 2 乗すると，

$$(R+T)^2 = I^2$$

$$R^2 + 2RT + T^2 = I^2$$

となるから，この式と (2.34) を比べて，

$$RT = 0, \quad \text{すなわち}, R = 0, \text{ または}, \quad T = 0$$

つまり，入射波 I の 100% が透過波 T となるか，あるいは，入射波 I の 100% が反射波 R となる場合しか，あり得ないことになってしまう．

もちろん，現実の光波は入射波の一部は反射し，他は透過している．この矛盾は，波動を実数のみで成り立つ量であると考えたことによる．[¶]

I, R, T を複素数と考えると，波の重ね合わせの式 (2.33) はそのままで良いが，波のエネルギーは $|I|^2 = II^*$ 等となり，エネルギー保存の式は，(2.34) の代わりに，

$$RR^* + TT^* = II^* \tag{2.35}$$

(2.33) の両辺の絶対値の 2 乗は，

$$(R+T)(R^* + T^*) = II^*$$

$$(RR^* + TT^*) + (RT^* + R^*T) = II^*$$

であるから，(2.23) と比べると，反射波 R と透過波 T の間には，条件

$$RT^* + R^*T = 0 \tag{2.36}$$

が成り立っているのである．はじめに入射波を実数 $I = I^* = a$ と表しておく．例えば物理的条件から透過波も実数となることが分っている場合には，これを $T = T^* = t$ とおくと，(2.36) を満たす値は，

$$Rt + R^*t = 0, \text{ 故に}, \quad t = 0, \quad \text{あるいは}, \quad R + R^* = 0$$

透過波が存在するとき，すなわち， $t \neq 0$ のとき，R は r を実数として，

$$R = ir, \qquad (R^* = -ir)$$

反射波は純虚数で表される．

[¶]ここで，sin, cos を持ち出したり，この式は振幅について成り立つ，などと，波動を認めた末の議論をするなかれ！

★　2 次方程式の複素解

z を複素数として，[‖] 2 次方程式

$$z^2 + bz + c = 0 \tag{2.37}$$

が，実数の範囲で解を持たない場合を考えよう．つまり，x，y を実数として，

$$z = x + yi \tag{2.38}$$

において，$y \neq 0$，かつ，$D = b^2 - 4c < 0$ の場合である．

(2.37) に (2.38) を代入すると，

$$(x + yi)^2 + b(x + yi) + c = 0$$

左辺を展開して，実数部と虚数部に分けると，

$$(x^2 - y^2 + bx + c) + (2xy + by)i = 0$$

複素数の 0 について述べた性質より，

$$x^2 - y^2 + bx + c = 0, \quad \text{かつ}, \quad 2xy + by = 0$$

第 2 式より，$y \neq 0$ だから，

$$x = -\frac{b}{2} \tag{2.39}$$

この値を，第 1 式に代入して，

$$\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - y^2 + b\left(-\frac{b}{2}\right) + c = 0$$

$$\frac{1}{4}(4c - b^2) - y^2 = 0$$

ここで $4c - b^2 = |D|$ とおいておこう．両辺に -1 を掛けて，

$$y^2 - \frac{|D|}{4} = 0$$

$$\therefore \quad \left(y + \frac{|D|^{\frac{1}{2}}}{2}\right)\left(y - \frac{|D|^{\frac{1}{2}}}{2}\right) = 0$$

[‖] b，c が複素数であっても，以下の 結論 は成り立つ．

$$y=-\frac{|D|^{\frac{1}{2}}}{2},\ \frac{|D|^{\frac{1}{2}}}{2} \tag{2.40}$$

(2.39),(2.40) を合わせて，2 次方程式 (2.37) の解は，

$$z=\frac{1}{2}\left(-b-|D|^{\frac{1}{2}}i\right),\ \frac{1}{2}\left(-b+|D|^{\frac{1}{2}}i\right)$$

この解を，2 次方程式の実数解の公式 (2.13) とまとめてしまうには，

$$D<0 \text{ のとき}, D^{\frac{1}{2}}=|D|^{\frac{1}{2}}i$$

と書くことを約束すればよい．

判別式

2 次方程式 $z^2+bz+c=0$ の判別式は，$D=b^2-4c$ となり，
【1】$D \geqq 0$ のとき，実数の解を持ち，
【2】$D<0$ のとき，虚数の解を持つ．

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $z^2+bz+c=0$ は，常に 2 つの複素数の解（重解も含む）を持ち，

$$z=\frac{1}{2}\left\{-b-D^{\frac{1}{2}}\right\},\ \frac{1}{2}\left\{-b+D^{\frac{1}{2}}\right\}$$

問 3 ． 次の 2 次方程式の解を求めよ．

(1) $z^2+z+1=0$ (2) $z^2-z+1=0$

(3) $2z^2+6z+7=0$ (4) $z^2-i=0$

**

** 問 3 の答：(1) $z=\frac{1}{2}\left(-1-3^{\frac{1}{2}}i\right),\ \frac{1}{2}\left(-1+3^{\frac{1}{2}}i\right)$ (2) $z=\frac{1}{2}\left(1-3^{\frac{1}{2}}i\right),\ \frac{1}{2}\left(1+3^{\frac{1}{2}}i\right)$ (3) $z=\frac{1}{2}\left(-3-5^{\frac{1}{2}}i\right),\ \frac{1}{2}\left(-3+5^{\frac{1}{2}}i\right)$ (4) $z=$

例 2． 2 次関数のグラフと軸の交点

前節では，2 次方程式の実数解がないことと,2 次関数のグラフがx軸と交点を持たないことを対応させて来たが，解を複素数の範囲まで拡張したとき，例えば,2 次関数

$$w = z^2 + 1$$

のグラフは，$w = 0$ と交点を持つのではないか，あるいは，そう考えた方が便利なのではないか．この点を考える．

z は複素数なので，$z = x + yi$ を代入すると，

$$w = (x + yi)^2 + 1$$

$$w = (x^2 - y^2 + 1) + 2xyi$$

$$w = 0 \quad \text{のとき，} \quad x^2 - y^2 + 1 = 0, \text{ かつ，} \quad xy = 0$$

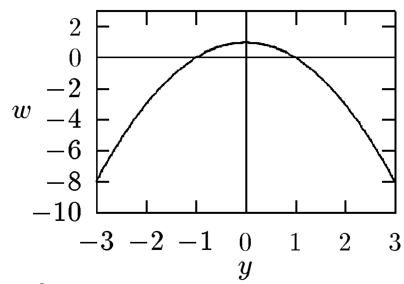

図 2.7: $w = -y^2 + 1$ のグラフ

であるが，$y = 0$ のとき，　$x^2 - y^2 + 1 = x^2 + 1 > 0$ となるから，$y \neq 0$ である．$x = 0$ より，$x^2 - y^2 + 1 = -y^2 + 1 = 0$．故に，$y = -1, 1$．つまり，この，2 次関数は $y = 0$ の場合として，$w = x^2 + 1$ のグラフを横軸 x，縦軸 w として描けば，確かに x 軸との交点は持たないが，$x = 0$ の場合として，$w = (yi)^2 + 1$，すなわち，$w = -y^2 + 1$ のグラフを横軸 y，縦軸 w として描けば，図 2.7 のように，$y = -1, 1$ と交点を持つ．そしてそのことは，2 次方程式

$$z^2 + 1 = 0$$

が $z = -i, i$ の解を持つことと対応している．

次の項では，ここで考えた図示の方法をもっと詳しく考えて行こう．

★ ガウス平面と演算

*

前項 例 2 で考えた式,

$$w = z^2 + 1$$

のグラフは $\mathrm{Re}(z) = x$ 軸とは交点を持たなかったが，純虚数部分 yi を考え，$\mathrm{Im}(z) = y$ 軸に関してみたとき，グラフは $y = -1, 1$ と交点を持つことが分かった.

*arg の導入はここではやらない.

一般に，複素数 $z = x + yi$ の関数

$$w = f(z)$$

のグラフを考えたとき，$w = 0$ は直線座標ではなく，実軸 x と虚軸 y の 2 つの座標によって表示される平面である．この平面を**ガウス平面**[†]と呼ぶ．

ガウス平面上の点は複素数 z に一対一対応している．また, z の絶対値は, $|z| = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$ となるから，原点 O から z で表される点までの距離を表す．

$\boxed{\text{問}}$ **4** ．次の複素数 z に対応するガウス平面上の点を，原点を始点とし終点が z となる矢印 で描け．[‡] また，各点の原点 O から距離を求めよ．

(1) $z = 1$ (2) $z = 1 + 2i$ (3) $z = 2 - i$

(4) $z = \dfrac{1}{2}\left(-1 + 2^{\frac{1}{2}}i\right)$ (5) $z = \dfrac{1}{2}\left(-1 - 2^{\frac{1}{2}}i\right)$ [§]

ここで複素数の演算のところで導入した加法と乗法は，ガウス平面で考えるとどのような点の移動に相当するかを調べてみよう．演算の規則のところで見たように，減法，除法は，それぞれ，加法，乗法の逆演算であるので，加法と乗法の操作が分かったら，これを逆にたどった操作を考えればよい．

【1】加法

a, b が実数のとき，その加法 $a + b$ は，原点 O を始点とし，実軸（x 軸）場の座標 a を終点とする矢印に，長さ $|b|$ の x 軸上の矢印，ただし，$b > 0$ のときは　$+x$ 向き，$b < 0$ のことは $-x$ 向き，を図 2.8 左のようにつないだ矢印の終点が $a + b$ となることは明らかであろう．同様に，純虚数どうし，ci と di の和 $(c + d)i$ も，$a + b$ について実軸でやった操作と同様な操作を，図 2.8 右のように虚軸（y 軸）上でやればよい．

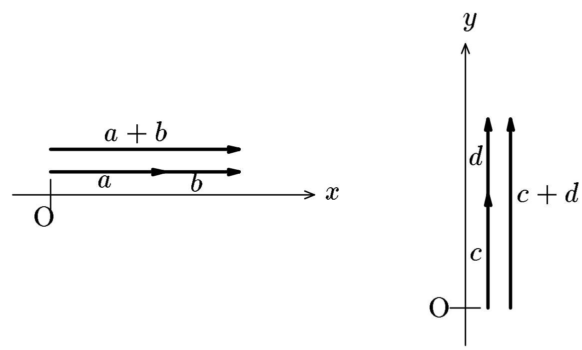

図 2.8: 実数どうし，純虚数どうしの加法

したがって，$z = a + ci$ と $w = b + di$ の加法は，それぞれ独立に，x 軸上で和の操作，y 軸上で和の操作をして，点 $(a + b,\ c + d)$ の位置が定まる．これは始点 O 終点 z（図 2.9 の点 A）の矢印に，始点 O 終点 w（図 2.9 の

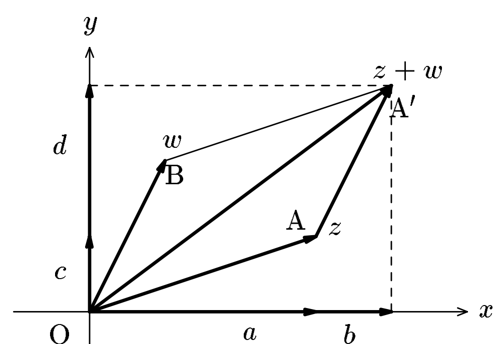

図 2.9: 複素数の加法

[†]複素平面より，この用語を採用する．
[‡]物理の位置ベクトルに相当する．
[§]$\boxed{\text{問}}$ 4 の答：図略.(1) $|z| = 1$(2) $|z| = 5^{\frac{1}{2}}$(3) $5^{\frac{1}{2}}$(4) $|z| = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{2}$(5) $|z| = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{2}$

B 点）の矢印を平行移動して，始点を A 点にしたときの終点が $z+w$（図 2.9 の A$'$）となっていることを示している．

これは，IB.1-2 等長変換でやった平行移動（といってもここでは一点 A→A$'$ のみの移動であるが），すなわち，$\overline{\mathrm{OB}}$ に平行に点 A を距離 OB だけ移動した点 A$'$ を求める作図に相当する．

この操作は，z と w を入れ換えて，図 2.9 で w（ B 点）を $\overline{\mathrm{OA}}$ に平行，距離 OA だけ移動してたとしても，同じ A$'$ 点が得られることは簡単に示せるであろう．このことは式では，

$$z+w=w+z$$

が成り立つことを言っているにすぎない．減法は，図 2.10 のように，

$$w+(z-w)=z$$

として，始点を原点 O 終点が z（ A 点）と，始点を原点 O 終点が w（ B 点）の矢印から，始点が B 点で終点が A 点の矢印を作り，これを始点が原点 O に来るように平行移動した終点 C が $z-w$ を表す点となる．

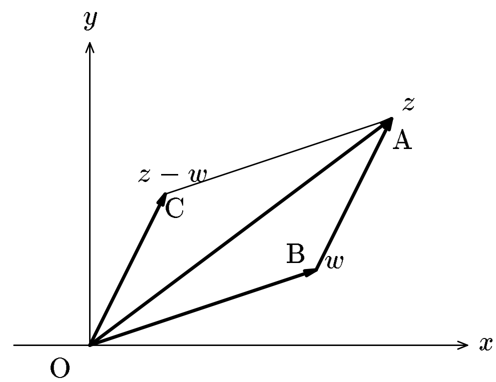

図 2.10: 複素数の減法

【2】乗法

今度は矢印を付けないで考えて行こう．図 2.11 のように，ガウス平面上で A(1)，B(z)，A$'$(w)，B$'$(zw) をとると，△OAB，△OA$'$B$'$ の辺の長さは，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OB}=|z|,\ \mathrm{OA}'=|w|\\
&\mathrm{OB}'=|zw|=|z||w|\\
&\mathrm{AB}=|z-1|\\
&\mathrm{A}'\mathrm{B}'=|zw-w|=|z-1||w|
\end{aligned}$$

となる．故に，△OAB，△OA$'$B$'$ の対応する 3 辺の比は，いずれも $1:|w|$ である．

したがって，z に w を乗じるという操作は，z と 1 とで作られる △OAB を，A$'$ を w の位置として相似比 $|w|$ で相似変換 (IB.1-2 で習った）をほどこしたときの △OA$'$B$'$ の B$'$ 点を求めることに相当する．

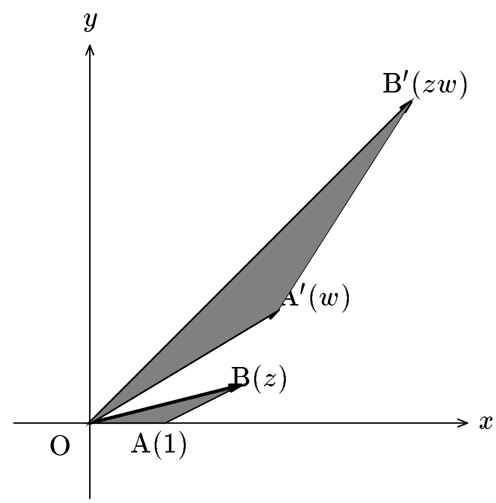

図 2.11: 複素数の乗法

この操作は，z と w を入れ換えても行える．このことは式では，

$$zw = wz$$

が成り立つことを言っているにすぎない．

問 5 ．除法のガウス平面上の操作を言え．¶

問 6 ．次の z, w について，$z+w$, $z-w$, zw, $\frac{z}{w}$ を作図して求めよ．

(1) $z = 3+i$, $w = 1+2i$ (2) $z = \frac{1}{2}\left(-1+2^{\frac{1}{2}}i\right)$, $w = \frac{1}{2}\left(-1-2^{\frac{1}{2}}i\right)$ ‖

★ ガウス平面と図形

例 3 ．**円の方程式**

前項で習ったように，2 点 P(z), C(z_1) 間の距離は CP$= |z - z_1|$ で表せたから，中心点 C から一定距離 r を保つ点 P の軌跡である円の方程式は，

$$\boxed{|z - z_1| = r} \qquad (2.41)$$

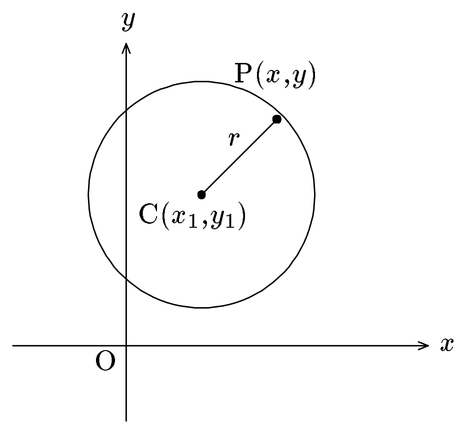

図 2.12: 円の方程式

となる．この式はもちろん，IB1-3 で習った解析幾何学の円の方程式 (1.25) と一致する．すなわち，$z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1 i$ とおくと，上式を辺々 2 乗した式は，

$$(z - z_1)(z^* - z_1^*) = r^2$$

$$\{(x - x_1) + (y - y_1)i\}\{(x - x_1) - (y - y_1)i\} = r^2$$

だから，

$$\boxed{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2}$$

¶ 問 5 の答： 略.

‖ 問 6 の答：図略.

例 4．2 線分の平行と垂直

【1】平行

原点 O と点 $\mathrm{A}(z)$ を結ぶ線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ と，原点 O と点 $\mathrm{A}'(w)$ を結ぶ線分 $\overline{\mathrm{OA}'}$ が同一直線上にある条件は，$\mathrm{B}(1)$ として $\triangle\mathrm{OAB}$ に相似な $\triangle\mathrm{OA}'\mathrm{B}'$ を考えれば分かるように，図 2.13 で点 $\dfrac{w}{z}$ が x 軸上の B' 点にくること，すなわち，$\dfrac{w}{z}$ が実数であることであるから，

$$\mathrm{Im}\left(\frac{w}{z}\right)=0 \tag{2.42}$$

となる．

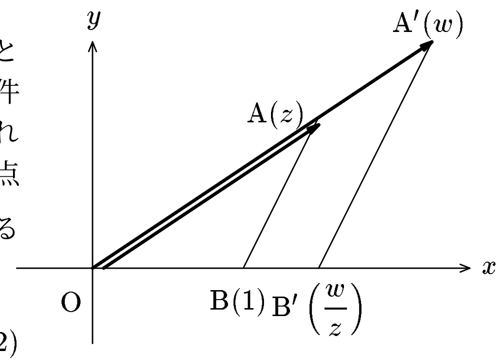

図 2.13: 同一直線上の 2 線分

この関係は，$\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$ を適当に平行移動しても成り立つから，図 2.10 のような減法の作図を考えると，2 点 z_1, z_2 を結ぶ線分と 2 点 w_1, w_2 を結ぶ線分が平行となる条件は，2 線分を図 2.13 の点 A を $z=z_2-z_1$ と置き換え，点 B を $w=w_2-w_1$ と置き換えておいて，はじめの 2 線分を $\overline{\mathrm{OA}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$ に平行移動し，(2.42) 式を適用すれば得られる．すなわち，

$$\boxed{\mathrm{Im}\left(\frac{w_2-w_1}{z_2-z_1}\right)=0} \tag{2.43}$$

【2】垂直

原点 O と点 $\mathrm{A}(z)$ を結ぶ線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ と，原点 O と点 $\mathrm{A}'(w)$ を結ぶ線分 $\overline{\mathrm{OA}'}$ が　垂直である条件は，$\mathrm{B}(1)$ として $\triangle\mathrm{OAB}$ に相似な $\triangle\mathrm{OA}'\mathrm{B}'$ を考えれば分かるように，図 2.14 で点 $\dfrac{w}{z}$ が y 軸上の B' 点にくること，すなわち，$\dfrac{w}{z}$ が純虚数であることであるから，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{w}{z}\right)=0 \tag{2.44}$$

となる．

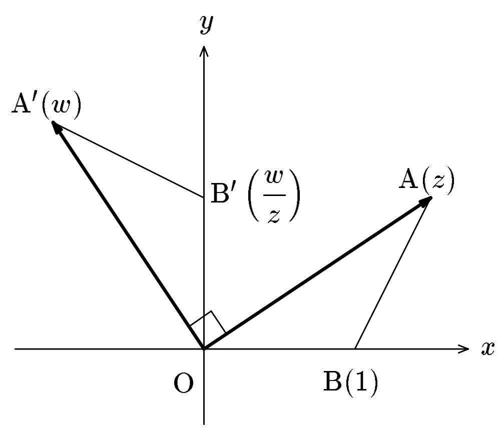

図 2.14: 2 線分の垂直

この関係は，平行のときの考察と同様にして，2 点 z_1, z_2 を結ぶ線分と 2 点 w_1, w_2 を結ぶ線分が　垂直となる条件，

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{w_2-w_1}{z_2-z_1}\right)=0} \tag{2.44}$$

と一般化できる．

★ $z^n-1=0,\ z^n+1=0$ の解

$\boxed{\boxed{\textbf{例}}}$ **5** ．$z^3-1=0$

$z^2+z+1=0$ の解については，この節の 2 次方程式の複素解のところの $\boxed{\text{問}}$ 3 で求めた．これを用いると，右辺を因数分解して，

$$(z-1)\left\{z-\frac{1}{2}\left(-1+3^{\frac{1}{2}}i\right)\right\}\left\{z-\frac{1}{2}\left(-1-3^{\frac{1}{2}}i\right)\right\}=0$$

したがって，この 3 次方程式の解は，

$$z=1,\ \frac{1}{2}\left(-1+3^{\frac{1}{2}}i\right),\ \frac{1}{2}\left(-1-3^{\frac{1}{2}}i\right)$$

となる．

この解を作図によって確かめてみよう．乗法のところでやったように，z^3 は一般には，図 2.15 のように，$\triangle OA_1A_0 \cong \triangle OA_2A_1 \cong \triangle OA_3A_2$ と相似変換をしたときの A_3 点に相当する．この操作で互いに等しい角 $\angle A_0OA_1=\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3$ だけ移動したことに注目しておく． この解は円 $|z|=1$ の周上にあることは明らかで，$z^3=1$ は座標 $z=1$ の点 A_0 から出発してこの円周上を等しい角で 3 回移動すると 1 となる，すなわち，A_0 点に戻ることを意味する．円周上でこのような角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ で 3 つあり

$$\theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

である．

したがって，$z^3=1$ の解をガウス平面上に示すと，図 2.16 のような 3 点となる．

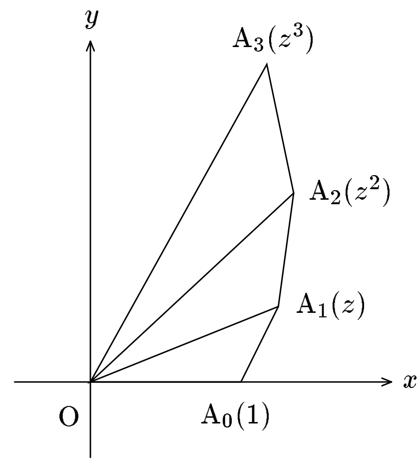

図 2.15: z^3 の操作

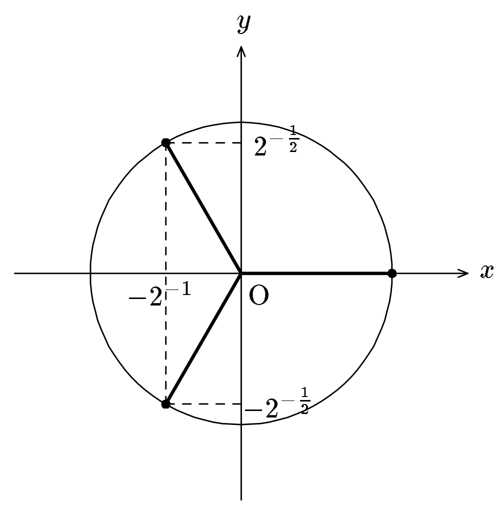

図 2.16: $z^3-1=0$ の解

$\boxed{\textbf{問}}$ **7** ．次の解を求め，これをガウス平面上に図示せよ．

(1) $z^3+1=0$　(2) $z^4-1=0$**

$\boxed{\boxed{\textbf{例}}}$ **6** $z^4+1=0$

** $\boxed{\text{問}}$ 7 の答：(1) $z=-1,\ \frac{1}{2}\left(1-3^{\frac{1}{2}}i\right),\ \frac{1}{2}\left(1+3^{\frac{1}{2}}i\right)$　(2) $z=1,-1,\ i,\ -i$ 図略．

今度は，作図のみで解いて行く．

$z^4 = -1$ の解も，$|z| = 1$ の円周上にある．この式は，$\mathrm{A}_0(1)$ 点から出発して，等しい角 θ で 4 回移動すると -1 となることを意味するから，これを満たす角は, $0 \leqq \theta < 2\pi$ において，

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

であるから，ガウス平面上で解は図 2.17 のような 4 点となっている．これらの座標を読んで，解は，

$$z = 2^{-\frac{1}{2}}(1+i),\ 2^{-\frac{1}{2}}(-1+i),$$

$$2^{-\frac{1}{2}}(-1-i),\ 2^{-\frac{1}{2}}(1-i)$$

となる．

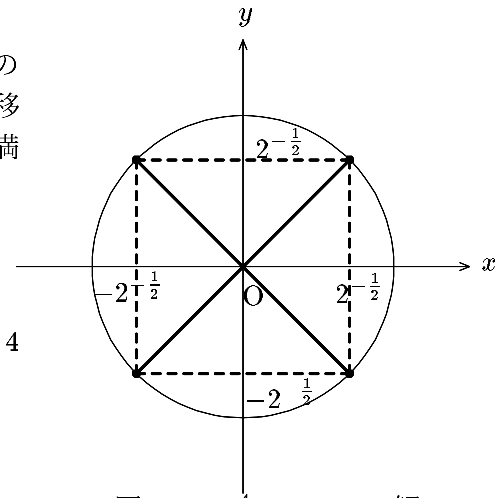

図 2.17: $z^4 + 1 = 0$ の解

$\boxed{\textbf{問}}$ **8** ．次の解を作図によって求めよ．

(1) $z^2 = i$　(2) $z^3 = -i$ ††

さて，$n \in \mathbb{N}$ のとき，一般の $z^n - 1 = 0$, $z^n + 1 = 0$ の解は，単位円の角度を n 等分して得られることは，もう気付いたかも知れない．しかし,「角度と単位円上の座標 $(x,\ y)$ との関係は?」 そんな必要性からも　IB 第 3 章で習う 3 角関数が必要となる．

さらに，この章の初めに (2.1) 式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

の形の見せたが，一般の n 次方程式の解は，複素数の範囲で n 個存在するのか．それとも，複素数以上に数を拡張しなければならないのか．

結論だけ誰かに教えてもらうことは簡単である．しかし，その結論を証明するためには，もう少し学ばなければならない数学が存在する．

†† $\boxed{\text{問}}$ 8 の答：(1) $z = 2^{-\frac{1}{2}}(1+i),\ 2^{-\frac{1}{2}}(-1-i)$　(2) $z = i,\ -\frac{1}{2}\left(-3^{\frac{1}{2}} - i\right),\ \frac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{2}} - i\right)$ 図略.