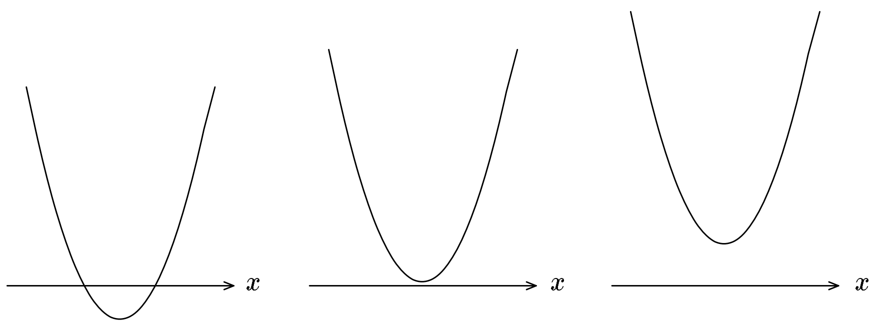
トレーニング

$\boxed{1}$ 2 次不等式と実数の集合

実数の集合 $\{x|a \leqq x \leqq b\}$, $\{x|a < x < b\}$, $\{x|x \leqq a\}$, $\{x|x > a\}$ などを，一般に**区間**と呼ぶ．2 次不等式を満たす実数 x は，この用語を使って議論するのが便利である．

I.$x^2 + bx + c \geqq 0$ の解

実係数の 2 次不等式，b, $c \in \mathbb{R}$ の場合，を考える．不等式の演算については，II.1-2 で習った．この不等式を調べるためには，2 次関数 $y = x^2 + bx + c$ のグラフを参考にするとよい．グラフは，判別式 $D = b^2 - 4c$ の符号によって，図のように分類できる．



$D > 0$　　　$D = 0$　　　$D < 0$

【1】$D > 0$ のとき．

2 次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ の実数解を　α, β, $(\alpha < \beta)$ とおくと，$x^2 + bx + c \geqq 0$ は，

$$(x - \alpha)(x - \beta) \geqq 0$$

と変形できる．II.1-2 $\boxed{\text{例}}$ 1 (2) で見たように，この不等式は

$$x - \alpha \leqq 0,\ x - \beta \leqq 0,\ \text{または，}\ \ x - \alpha \geqq 0,\ x - \beta \geqq 0$$

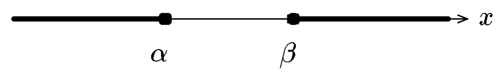
と同値である．はじめの条件は $x \leqq \alpha < \beta$ だから $x \leqq \alpha$，次の条件は $x \geqq \beta > \alpha$ だから $x \geqq \beta$ となるから，不等式 $x^2 + bx + c \geqq 0$ を満たす実数 x，すなわち，この不等式の解は，

$$x \leqq \alpha,\ \text{または，}\ x \geqq \beta$$

この結果は，上の右のグラフの $y \geqq 0$ の領域と対応している．以上を，集合の記号を使ってまとめると，

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2+bx+c=0 \text{ の実数解を }\quad \alpha,\ \beta,\ (\alpha<\beta) \text{ とおくと,} \\ \{x|x^2+bx+c \geqq 0,\ D>0\} = \{x|x \leqq \alpha\} \cup \{x|x \geqq \beta\} \end{array}} \tag{2.18}$$

また，この区間を数直線上に表せば，
次のようになる．



【2】$D=0$ のとき．

このとき，2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ は重解をもつから，この解を α とおくと，

$$(x-\alpha)^2 \geqq 0$$

この式は，任意の実数 x に対して成り立つ．言い換えれば，この式は絶対不等式である．この結果は，上の中央のグラフの $y \geqq 0$ の領域と対応している．

【3】$D<0$ のとき．

2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ は，実数の解をもたない．解の公式を導く途中の計算をたどると，$D=b^2-4c<0$，すなわち，$4c-b^2>0$ だから，

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(4c^2-b) > 0$$

この式も絶対不等式である．この結果は，上の右のグラフの $y \geqq 0$ の領域と対応している．
【2】,【3】をまとめて，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を用いて表すと，

$$\boxed{\{x|x^2+bx+c \geqq 0,\ D \leqq 0\} = \mathbb{R}} \tag{2.19}$$

(1) 2 次不等式 $x^2+bx+c>0$ の解を，集合の記号を使ってまとめよ．ただし，判別式 D，実数解 α，β の文字を上の約束にしたがって使ってよい．*

II.$x^2+bx+c \leqq 0$ の解

【1】$D>0$ のとき．

2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の実数解を　α，β，$(\alpha<\beta)$ とおくと，$x^2+bx+c \geqq 0$ は，

$$(x-\alpha)(x-\beta) \leqq 0$$

と変形できる．因数 $x-\alpha$，$x-\beta$ は，少なくとも一方が 0，または，互いに異符号である．$\alpha<\beta$ より，

$$x-\alpha \leqq 0 \leqq x-\beta$$

したがって，

$$x \geqq \alpha,\ \text{かつ}, x \leqq \beta$$

これは，

$$\alpha \leqq x \leqq \beta$$

* $\boxed{1}$ の答：(1) $\{x|x^2+bx+c>0,\ D \geqq 0\} = \{x|x \leqq \alpha\} \cup \{x|x \geqq \beta\}$，　$\{x|x^2+bx+c>0,\ D<0\} = \mathbb{R}$

のように記してもよい．この結果は，$y = x^2 + bx + c$ のグラフの内，右の図の場合で $y \leqq 0$ の領域と対応している．

【2】$D = 0$ のとき．

2 次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ は重解を α とおくと，不等式 $x^2 + bx + c \leqq 0$ は，

$$(x - \alpha)^2 \leqq 0$$

この式は $x = \alpha$ のときのみ成立している．この事情は，$y = x^2 + bx + c$ のグラフの内，右の図で，α と β の差がしだいに小さくなり，ついに一致して，$\alpha = \beta$ となったときが，中央の図だと考えてまとめられる．

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 + bx + c = 0 \text{ の実数解を } \quad \alpha,\ \beta,\ (\alpha < \beta) \text{ とおくと，} \\ \{x | x^2 + bx + c \leqq 0,\ D \geqq 0\} = \{x | x \geqq \alpha\} \cap \{x | x \leqq \beta\} = \{x | \alpha \leqq x \leqq \beta\} \end{array}} \tag{2.20}$$

また，この区間を数直線上に表せば，
次のようになる．

【3】$D < 0$ のとき．

このとき，$4c - b^2 > 0$ だから，

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(4c^2 - b) > 0$$

したがって，不等式 $x^2 + bx + c \leqq 0$ は不成立であり，これを満たす実数 x は存在しない．このことを「解なし」と言う．この事情は，$y = x^2 + bx + c$ のグラフの内，右の図の場合に $y \leqq 0$ の領域が存在しないことに対応している．

このことを，空集合 ϕ を用いて表すと，

$$\boxed{\{x | x^2 + bx + c \leqq 0,\ D < 0\} = \phi} \tag{2.21}$$

(2) 2 次不等式 $x^2 + bx + c < 0$ の解を，集合の記号を使ってまとめよ．ただし，判別式 D，実数解 α, β の文字を上の約束にしたがって使ってよい．†

(3) 次の 2 次不等式を満たす実数の集合を，それぞれ，$\mathbb{R}$, ϕ，および，集合 $A = \{x | x \leqq -1\}$, $B = \{x | x > 1\}$, $C = \{x | x \geqq 2\}$, $D = \{x | x < 4\}$ で表し，これらを数直線上に描け．ただし，区間の端を含むときは，$\bullet$ で，含まないときには $\circ$ で表せ．

(a) $x^2 - x - 2 \geqq 0$ (b) $x^2 - 5x + 4 < 0$ (c) $x^2 - 4x + 4 < 0$

(d) $x^2 - x + 2 \geqq 0$ (e) $x^2 - x - 2 \geqq 0$，かつ，$x^2 - 5x + 4 < 0$ ‡

---

† $\boxed{1}$ の答：(2) $\{x | x^2 + bx + c < 0,\ D > 0\} = \{x | \alpha < x < \beta\}$, $\{x | x^2 + bx + c < 0,\ D \leqq 0\} = \phi$

‡ $\boxed{1}$ の答：(3)(a) $A \cup C$ (b) $B \cap D$ (c) ϕ (d) $\mathbb{R}$ (e) $A \cap D$ 数直線略．

2 対称式・交代式，解と係数の関係

I. 対称式

x, y の式で，x と y を入れ換えても式が変らないものを x, y **についての対称式**と呼ぶ．対称式を 2 変数関数 $f(x,\ y)$ で表すと，

$$f(x,\ y) = f(y,\ x)$$

となっている．

例えば，$f(x,\ y) = x^2 + xy + y^2$ としたとき，$f(y,\ x) = y^2 + yx + x^2 = x^2 + xy + y^2$ となるから，$x^2 + xy + y^2$ は x, y についての対称式である．

x, y についての対称式はいろいろあるが，

$$x + y,\ xy$$

を x, y **についての基本対称式**と呼ぶ．

同様に，x, y, z からなる式において，x と y, y と z, z と x のいずれを入れ換えても式が変らないものを x, y, z **についての対称式**と呼ぶ．対称式を 3 変数関数 $f(x,\ y,\ z)$ で表すと，

$$f(x,\ y,\ z) = f(y,\ x,\ z) = f(x,\ z,\ y) = f(z,\ y,\ x)$$

となっている．さらに，これらの入れ換えの操作を続けておこなっても式が変らない．[§]また，x, y, z についての対称式では，$x \to y \to z \to x$ というように巡回して置き換えるときも式の値は変らない．すなわち，

$$f(x,\ y,\ z) = f(y,\ z,\ x) = f(z,\ x,\ y)$$

x, y, z についての対称式もいろいろあるが，

$$x + y + z,\ xy + yz + zx,\ xyz$$

を x, y, z **についての基本対称式**と呼ぶ．

【定理】x, y, あるいは，x, y, z の任意の対称整式は，基本対称式の整式で表される．

【証明】x, y についての対称式の場合のみ，証明する．

まず，対称整式を同次部分に分けと，各同次部分も，それぞれ，対称式となっていなければならないから，1 次，2 次，$\cdots$ 同次式について，証明すればよい．まず，ここでは偶数次の同次式について，IB.1-3 ★ 証明法の【4】で習った数学的帰納法によって示す．

$2n$ 次同次対称式は，任意の定数を a_n, a_{n+1}, $\cdots$, a_{2n} として

$$\begin{aligned} a_{2n}(x^{2n} + y^{2n}) &+ a_{2n-1}(x^{2n-1}y + xy^{2n-1}) \\ +\cdots &+ a_{n+1}(x^{n+1}y^{n-1} + x^{n-1}y^{n+1}) + a_n x^n y^n \end{aligned} \tag{2.22}$$

[§] ここでは，演算の規則に触れてもよいが，置換群などの言葉は持ち出さない．

と表されるが，まず，

① 2 次同次対称式は，任意の定数を a_1，a_2 として，一般に，

$$a_2(x^2+y^2)+a_1xy$$

と表されるが，

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

となるから，すべて合わせて，基本対称式 $x+y$ と xy で表されていることが分かる．

また，4 次同次対称式は，任意の定数を a_2，a_3，a_4 として，一般に，

$$a_4(x^4+y^4)+a_3(x^3y+xy^3)+a_2x^2y^2$$

となり，それ以外の項は考えられない．それぞれ，

$$x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x+y)^2-8(xy)^2$$

$$x^3y+xy^3=xy(x+y)^2-2(xy)^2$$

となるから，すべて合わせて，基本対称式 $x+y$ と xy で表されていることが分かる．

② (2.22) 式が成り立つと仮定して，$2n+2$ 次同次対称式は，任意の定数を a_{n+1}，a_{n+2}，$\cdots$，a_{2n+2} として

$$a_{2n+2}(x^{2n+2}+y^{2n+2})+a_{2n+1}(x^{2n+1}y+xy^{2n+1})$$

$$+\cdots+a_{n+2}(x^{n+2}y^n+x^ny^{n+2})+a_{n+1}x^{n+1}y^{n+1}$$

が成り立つことを示せばよいが，上式の第 2 項以降は，xy の何乗かと，$x^{2m}+y^{2m}$，$(0\leqq m\leqq n)$ の積となるから，結局，

「 $x^{2n}+y^{2n}$ が基本対称式 $x+y$ と xy で表されているならば，$x^{2n+2}+y^{2n+2}$ も基本対称式 $x+y$ と xy で表される.」

ことを証明すればよい．これは，

$$x^{2n+2}+y^{2n+2}=(x^2+y^2)(x^{2n}+y^{2n})-(xy)^2(x^{2n-2}+y^{2n-2})$$

と変形できるから成り立つ．

(1) $2n+1$ 次同次対称式は，任意の定数を a_{n+1}，a_{n+2}，$\cdots$，a_{2n+1} として，一般に，

$$a_{2n+1}(x^{2n+1}+y^{2n+1})+a_{2n}(x^{2n}y+xy^{2n})+\cdots+a_{n+1}(x^{n+1}y^n+x^ny^{n+1}) \qquad (2.23)$$

と表されるが，(2.23) 式が基本対称式 $x+y$ と xy で表されることを証明せよ．
(2) $x^2+y^2+z^2$, $x^3+y^3+z^3$ が基本対称式 $x+y+z$ と $xy+yz+zx$ と xyz で表されることを示せ．¶

II. 交代式

x, y の式で，x と y を入れ換えてると，式の符号だけ変るものを x, y **についての交代式**と呼ぶ．　交代式を 2 変数関数 $f(x,\ y)$ で表すと，

$$f(x,\ y) = -f(y,\ x)$$

となっている．

例えば，$f(x,\ y) = x^2 - y^2$ としたとき，$f(y,\ x) = y^2 - x^2 = -(x^2 - y^2)$ となるから，$x^2 - y^2$ は x, y についての交代式である．

同様に，x, y, z からなる式において，x と y, y と z, z と x のいずれを入れ換えると，絶対値は変らないが，式の符号が変らるものを x, y, z **についての交代式**と呼ぶ．交代式を 3 変数関数 $f(x,\ y,\ z)$ で表すと，

$$f(x,\ y,\ z) = -f(y,\ x,\ z) = -f(x,\ z,\ y) = -f(z,\ y,\ x)$$

となっている．さらに，これらの入れ換えの操作を偶数回続けておこなえば，符号は変らないが，奇数回続けておこなえば，符号が変る．
ここで，**積差**と呼ぶ交代式

$$\Delta_2 = x - y, \quad \Delta_3 = (x-y)(y-z)(z-x)$$

を導入すると，
【定理】x, y, あるいは，x, y, z の任意の交代整式 f は，g を x, y, あるいは，x, y, z の対称整式，Δ をそれぞれの積差として

$$f = \Delta g$$

と表される．
【証明】x, y, z の交代式 $f(x,\ y,\ z)$ についてのみ証明する．

$$f(x,\ y,\ z) = -f(y,\ x,\ z)$$

だから，$x = y$ とおくと，

$$f(x,\ x,\ z) = -f(x,\ x,\ z) = 0$$

となる．IA.1-3 のトレーニングの所で習った，剰余の定理の応用から，$f(x,\ y,\ z)$ は $x-y$ の因数を持つ，同様にして，$y-z$, $z-x$ の因数を持つことが分かる．したがって，$g(x,\ y,\ z)$ を整式として，

$$f(x,\ y,\ z) = (x-y)(y-z)(z-x)g(x,\ y,\ z)$$

¶ $\boxed{2}$ の答：(1) の答：偶数次のときと同様に，数学的帰納法を用いよ．(2) $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$, $x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx) + 3xyz$

$$-f(y,\ x,\ z) = (x-y)(y-z)(z-x)g(y,\ x,\ z)$$

$f(x,\ y,\ z) = -f(y,\ x,\ z)$ だから，$g(x,\ y,\ z) = g(y,\ x,\ z)$．同様に，

$$g(x,\ y,\ z) = g(y,\ x,\ z) = g(x,\ z,\ y) = g(z,\ y,\ x)$$

となるから，$g(x,\ y,\ z)$　は対称式である．

$x,\ y,\ z$ についての交代式においても，$x \to y \to z \to x$ というように巡回して置き換えるときも式の値は，対称式と同様に，変らない．すなわち，

$$f(x,\ y,\ z) = f(y,\ z,\ x) = f(z,\ x,\ y)$$

このことは，上の定理から，$f(x,\ y,\ z) = (x-y)(y-z)(z-x)g(x,\ y,\ z)$ を考えれば，簡単に示せる．

(3) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ を因数分解せよ．‖

III. 解と係数の関係

【1】2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，

$$x^2+bx+c = (x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解できるから，右辺を展開して，

$$x^2+bx+c = x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

x の係数，定数を比較すると，

$$\boxed{\begin{array}{c} x^2+bx+c=0 \text{ の解を } \alpha,\ \beta \text{ とおくと，} \\ \alpha+\beta=-b,\ \alpha\beta=c \end{array}} \tag{2.24}$$

(4) $D>0$ のとき，2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解が，

(a) ともに正である場合．(b) ともに負である場合．(c) 一つの解は負，他の解は正である場合．

の条件を，解と係数の関係を利用して求めよ．**

【2】3 次方程式の解と係数の関係

(5) 3 次方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，解と係数の関係を求めよ．*

いずれも，解についての基本対称式が方程式の係数に適当な符号を付けたものに等しい，という関係となっている．

‖ $\boxed{2}$ の答：(3) の答：$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

** $\boxed{2}$ の答：(4) の答：(a) $b<0,\ c>0$　(b) $b>0,\ c>0$　(c)　$c<0$

* $\boxed{2}$ の答：(5) の答：

$$x^3+bx^2+cx+d = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

III. 判別式

【1】2 次方程式の判別式

(6) 2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の判別式 D_2 が,

$$D_2=(\alpha-\beta)^2 \tag{2.26}$$

と表されることを示せ.†

【2】3 次方程式の判別式

3 次方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ の判別式 D_3 は,2 次方程式の判別式 D_2 が積差の 2 乗 $(\Delta_2)^2$ となっていることの類推から,

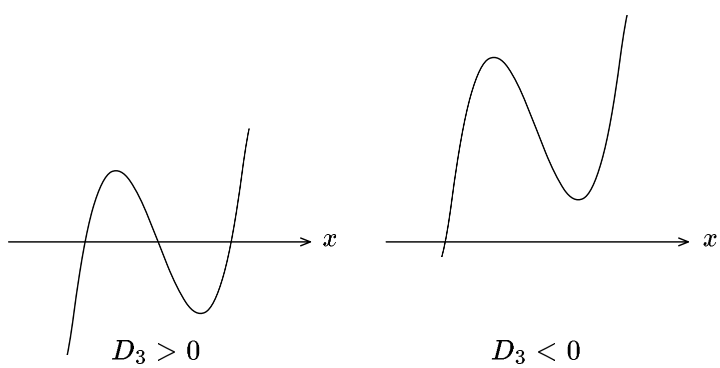
$$D_3=(\Delta_3)^2=\{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\}^2 \tag{2.27}$$

となることが予想されるが,これについて調べてみよう.

3 次方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ は,必ず 1 つの実解を持つ.このことは,3 次関数 $y=x^3+bx^2+cx+d$ のグラフの x 軸との交点を考えると明らかである.

図の交点の様子から明らかなように,1 個以外,他に実解を持たない場合と,実解が 3 個の場合がある.ここで,最小の実解を α とおくと,3 次方程式は,

$$(x-\alpha)(x^2+px+q)=0$$



$D_3>0$ $D_3<0$

図 2.5: 3 次関数と x 軸との交点

と因数分解できるから,右辺を展開して,

$$x^3+bx^2+cx+d=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$$

x^2,x の係数,定数を比較すると,

$$\boxed{\begin{array}{l} x^3+bx^2+cx+d=0 \text{ の解を } \alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ とおくと,} \\ \alpha+\beta+\gamma=-b,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c,\ \alpha\beta\gamma=-d \end{array}} \tag{2.25}$$

† $\boxed{2}$ の答:(6)$D_2=b^2-4c=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$

さらに，β，γ が実数となるかどうかは問わなくても，形式的に[‡]

$$x^2 + px + q = (x - \beta)(x - \gamma)$$

とおくことによって，

$$\begin{cases} \beta + \gamma = -p \\ \beta\gamma = q \end{cases}$$

$$D_2 = (\beta - \gamma)^2 = p^2 - 4q$$

ここで，D_2 は 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の判別式であるから，
① $D_2 \geqq 0$ のとき，合わせて 3 実解となる．このとき，

$$(\alpha - \beta)^2(\gamma - \alpha)^2 > 0$$

であるから，

$$D_3 = (\alpha - \beta)^2(\gamma - \alpha)^2 D_2 \geqq 0$$

となる．
② $D_2 < 0$ のとき，2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ は実解を持たないから，　合わせて 1 実解の場合であるが，このとき，$x^2 + px + q > 0$ となるから，

$$(\alpha - \beta)^2(\gamma - \alpha)^2 = \{\alpha^2 - (\beta + \gamma)\alpha + \beta\gamma\}^2$$

$$= (\alpha^2 + p\alpha + q)^2 > 0$$

したがって，

$$D_3 = (\alpha - \beta)^2(\gamma - \alpha)^2 D_2 < 0$$

最小の実解が β の場合も，γ の場合もあるから，判別式 D_3 は α，β，γ について対称となっている必要がある．
(7) 次の関係を示せ．

$$D_3 = -(4b^3 + 27c^2) \tag{2.28}$$

*

[‡]とても，おかしな議論のように思えるかも知れないが，カルダノをいう数学者が実はこのようにして次節で導入する虚数を持ち出したのである．

*$\boxed{2}$の答：(7)：略．

判別式

3 次方程式 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の判別式は，$D_3 = -(4b^3 + 27c^2)$ となり，
【1】$D > 0$ のとき，相異なる 3 解を持ち，
【2】$D = 0$ のとき， 3 解のうち 2 つは重解を持つ，
【3】$D < 0$ のとき，実解は 1 つとなる．