2–2　2 次方程式の解

≪ この項で学ぶこと ≫
[**作図による解，解の公式，2 次関数のグラフ**]

★　作図による解

2 次方程式は (2.1) 式で $n = 2$ とおいた

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{2.9}$$

の形となっているが，この式をそのまま取り扱う必要はない．何故ならば，左辺が 2 次式であるためには，$a_2 \neq 0$ となっていなければならないから，(2.9) 式の両辺を a_2 で割ることができて，

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = 0 \tag{2.10}$$

つまり，式をいつも x^2 の係数が 1 となるようにしてから，解を考えて行けば十分である．

ここでは，まず，長方形の面積を利用して解くことができる問題から考えよう．[‡]$p > 0$, $q > 0$ として，

$$\frac{a_1}{a_2} = 2p, \quad \frac{a_0}{a_2} = -q$$

となっている場合としよう．(2.10) 式を p, q で表す式とすると，

$$x^2 + 2px = q \tag{2.11}$$

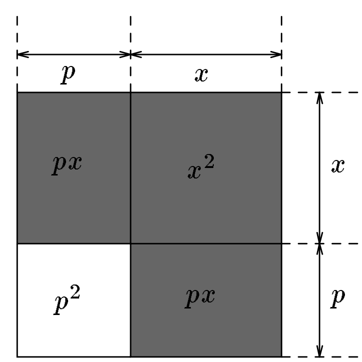


図 2.1: $x^2 + 2px = q$ の解法

この式の左辺は，図 2.1 の斜線部，すなわち，1 辺の長さが x の正方形と 2 つの辺の長さが，それぞれ，p, x である長方形を 2 つ合わせた図形の面積であり，方程式によれば，この面積は q に等しい．一方，図 2.1 で斜線部と 1 辺の長さが p の白い

[‡]この方法は，9 世紀のイスラムの学者のフワーリズミーの考えたものである．

部分の正方形を合わせた面積は $(x+p)^2$ であり，斜線部の面積 q と白い部分の正方形の面積 p^2 の和とも考えられるから，等式

$$(x+p)^2 = p^2 + q$$

ここでは，辺の長さや面積を考えているので，当然，$x+p > 0$，$p^2+q > 0$ であるから，両辺を $\dfrac{1}{2}$ 乗すると，

$$x + p = \left(p^2+q\right)^{\frac{1}{2}}$$

故に，(2.11) の解は

$$x = \underline{\underline{-p + \left(p^2+q\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

である．次の項で議論するように，この解は方程式 (2.11) の 2 つある解のうちの 1 つに過ぎないのであるが，とにかく，解が得られた．

$\boxed{\textbf{問}}$ **1** ． 2 次方程式

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

の $x > 0$ の解を作図によって求めよ．§

★　解の公式

前項の図形を用いた解法は係数が特殊な場合しか解けないが，代数的な計算による一般的な解法の指針を示すものである．あらためて，

$$\frac{a_1}{a_2} = b, \quad \frac{a_0}{a_2} = c$$

とおくと，(2.10) 式は，

$$x^2 + bx + c = 0 \tag{2.12}$$

ただし，b，c は一般性を持たせて，b，$c \in \mathbb{R}$ とする．

まず，図 2.1 で全体の正方形の面積 $(x+p)^2$ を考えたときのように，

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$$

§ $\boxed{問}$ 1 の答：$x = 3$

の項を (2.12) 式の左辺から抜き出して，残りの項，つまり，図形による解法の p^2+q に相当するところの形を見出すことにする．(2.12) 式の左辺は，

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= x^2+bx+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c \\ &= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(b^2-4c) \\ &= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left\{\frac{1}{2}(b^2-4c)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 \end{aligned}$$

ただし，最後の変形で $(b^2-4c)^{\frac{1}{2}}$ の形に直せるのは，前節の指数法則の拡張のところで見たように，

$$b^2-4c \geqq 0$$

のときに限る．この条件が成り立つとき，(2.12) 式は，

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left\{\frac{1}{2}(b^2-4c)^{\frac{1}{2}}\right\}^2=0$$

となり，例 1 (1) と同様な解き方ができる．すなわち，

$$\left\{\left(x+\frac{b}{2}\right)+\frac{1}{2}(b^2-4c)^{\frac{1}{2}}\right\}\left\{\left(x+\frac{b}{2}\right)-\frac{1}{2}(b^2-4c)^{\frac{1}{2}}\right\}=0$$

故に，2 次方程式 (2.12) の解は，

$$x=-\frac{b}{2}-\frac{1}{2}(b^2-4c)^{\frac{1}{2}},\ -\frac{b}{2}+\frac{1}{2}(b^2-4c)^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

の 2 つが存在する．特に，$b^2-4c=0$ のとき，2 解は一致し

$$x=-\frac{b}{2}$$

のみとなる．この解を**重解**と呼ぶ．また，このように，解の存在，重解かどうかを判定する式を

$$D=b^2-4c \tag{2.14}$$

とおいて，D を 2 次方程式の**判別式**と呼ぶ．

以上をまとめると，

判別式

2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の判別式は，$D=b^2-4c$ となり，

【1】$D>0$ のとき，相異なる 2 解を持ち，

【2】$D=0$ のとき，重解を持つ，

【3】$D<0$ のとき，解を持たない．

また，(2.13) 式より，

> **2 次方程式の解の公式**¶
>
> 2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解は，$D \geqq 0$ のときのみ存在し，
>
> $$x=\frac{1}{2}\left\{-b-D^{\frac{1}{2}}\right\},\ \frac{1}{2}\left\{-b+D^{\frac{1}{2}}\right\}$$

問 2 ．次の 2 次方程式の解の数を実数の範囲で調べ，解がある場合はその解を求めよ．

(1) $x^2+4x-21=0$　(2) $x^2-x+1=0$

(3) $x^2+2x-2=0$　(4) $2x^2-8^{\frac{1}{2}}x+1=0$

‖

例 1 ．2 次方程式

$$x^2-2x+k=0$$

の解の数は，k の値によってどのように変るか．

【解】判別式を作ると，

$$D=(-2)^2-4k=4(1-k)$$

したがって，

$$\begin{cases} k<1\text{ のとき，} & D>0 \\ k=1\text{ のとき，} & D=0 \\ k>1\text{ のとき，} & D<0 \end{cases}$$

故に，

$$\begin{cases} \underline{\underline{k<1\text{ のとき}}}, & \underline{\underline{\text{相異なる 2 解}}}. \\ \underline{\underline{k=1\text{ のとき}}}, & \underline{\underline{\text{重解}}}. \\ \underline{\underline{k>1\text{ のとき}}}, & \underline{\underline{\text{解なし}}}. \end{cases}$$

問 3 ．2 次方程式

$$x^2+2kx+4=0$$

が重解を持つような定数 k の値を定めよ．**

‖ 問 2 の答：(1) 2 解,$x=-7,\ 3$　(2) 解なし．(3) 2 解,$x=-1-3^{\frac{1}{2}},\ -1+3^{\frac{1}{2}}$　(4) 重解,$x=2^{-\frac{1}{2}}$

** 問 3 の答：$k=-2,\ 2$

★　2 次関数のグラフ

IB.1-3 の解析幾何学のところで，関数のグラフについて習った． 2 次関数

$$Y = X^2 \tag{2.15}$$

のグラフ $\{X,\ Y\}$ は図 2.2 のように，原点 (0, 0) に頂点を持ち，$X = 0$（ Y 軸）を軸とし，下に凸の放物線である．

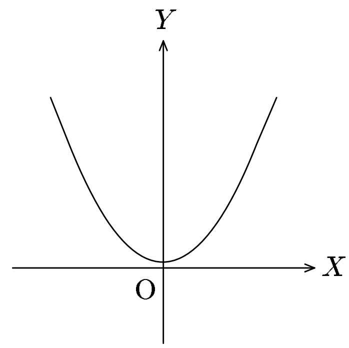


図 2.2: $Y = X^2$ のグラフ

一般に，2 次関数

$$y = x^2 + bx + c \tag{2.16}$$

のグラフ $\{x,\ y\}$ を知るには，前項で 2 次方程式 (2.12) の左辺を変形したときと同じ計算をすると，

$$y + \frac{1}{4}(b^2 - 4c) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \tag{2.17}$$

となるから，(2.15) 式と (2.16) 式の間には，

$$X = x + \frac{b}{2},\ Y = y + \frac{1}{4}(b^2 - 4c)$$

の対応があり，(2.16) のグラフも (2.15) のときと同じ形の下に凸の放物線となるが，放物線の頂点は，

$$X = x + \frac{b}{2} = 0,\ Y = y + \frac{1}{4}(b^2 - 4c) = 0$$

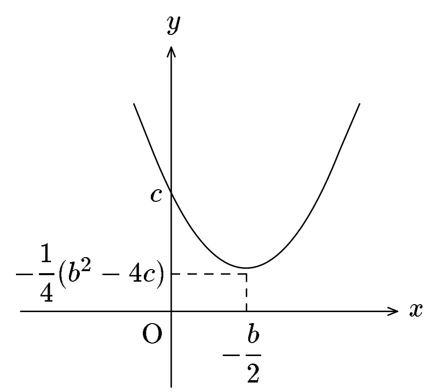


図 2.3: $y = x^2 + bx + c$ のグラフ

すなわち，

$$(x,\ y) = \left(-\frac{b}{2},\ -\frac{1}{4}(b^2 - 4c)\right)$$

にあり，放物線の軸は $X = 0$，すなわち，

$$x = -\frac{b}{2}$$

となる．(2.17) より，

2 次関数のグラフ
2 次関数 $y = x^2 + bx + c$ のグラフは，判別式 $D = b^2 - 4c$ を用いて変形すると， $y + \frac{D}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ と表される．すなわち，$y = x^2$ のグラフを x 方向に $-\frac{b}{2}$，y 方向に $-\frac{D}{4}$ だけ，平行移動して得られる．

グラフを描くには，さらに，x 軸や y 軸と交わる点を求めておくとよい．y 軸と交わる点は，(2.16) 式に $x = 0$ を代入して，

$$y = 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

と，すぐ得られる．図 2.3 には，$y = c$ の値が記入してある．

一方，グラフが x 軸を交わる点は，常に存在するとは限らない．(2.16) 式に $y = 0$ を代入した式

$$0 = x^2 + bx + c$$

は，2 次方程式 (2.12) である．すなわち，

「2 次関数 $y = x^2+bx+c$ のグラフが x 軸と交点を持つことと，2 次方程式 $x^2+bx+c = 0$ が次数解を持つことは，同値である.」

グラフと x 軸との交点

2 次関数 $y = x^2 + bx + c$ と x 軸との交点の数は，

【1】$D > 0$ のとき，相異なる 2 点，

【2】$D = 0$ のとき，1 点，

【3】$D < 0$ のとき，交わらない.

$\boxed{例}$ **2** ．2 次関数

$$y = x^2 - 2x + k$$

のグラフと x 軸との交点の個数は，k の値によってどのように変るか.

【解】この問題は，$\boxed{例}$ 1 の問題と対応するものである．判別式は，

$$D = (-2)^2 - 4k = 4(1 - k)$$

であって，

$$\begin{cases} k < 1 \text{ のとき，} & D > 0 \\ k = 1 \text{ のとき，} & D = 0 \\ k > 1 \text{ のとき，} & D < 0 \end{cases}$$

であった．したがって，交点の個数は，

$$\begin{cases} \underline{\underline{k < 1 \text{ のとき}}}, & \underline{\underline{\text{相異なる 2 点}}}. \\ \underline{\underline{k = 1 \text{ のとき}}}, & \underline{\underline{\text{1 点}}}. \\ \underline{\underline{k > 1 \text{ のとき}}}, & \underline{\underline{\text{交わらない}}}. \end{cases}$$

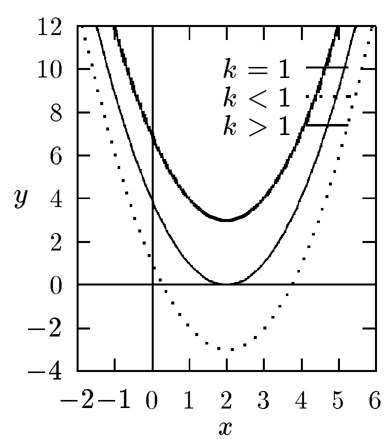


図 2.4: $y = x^2 - 2x + k$ のグラフ

問 4 ．x 軸が，2 次関数

$$y = x^2 + 2kx + 4$$

の接線となるように定数 k の値を定めよ．また，これらの場合の 2 次関数のグラフを描け.

問 5 ．次の 2 次関数のグラフを描け.

(1) $y = x^2 - 1$　(2) $y = x^2 + 1$

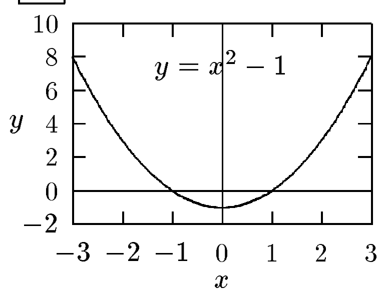
(3) $y = x^2 + 4x - 21$　(4) $y = x^2 - x + 1$

(5) $y = x^2 + 2x - 2$　(6) $y = x^2 - 2^{\frac{1}{2}}x + \frac{1}{2} = 0$

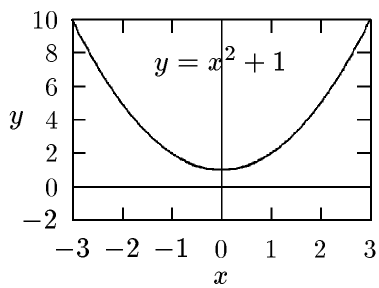
問 4 の答：$k = -2$, 2，グラフ省略.

問 5 の答：

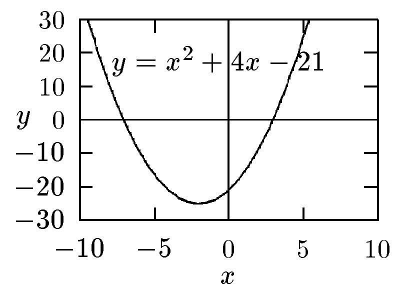
(1)



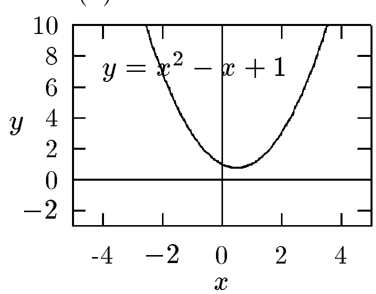
(2)



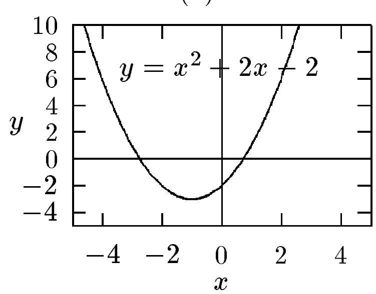
(3)



(4)



(5)



(6)