第2章 方程式の解

2–1　無理数

≪ この項で学ぶこと ≫
[**方程式と無理数，指数の拡張，**$x^n = a$ **の解，**]

★　方程式と無理数

[*]

IA.1-2 では，a, b が**自然数**（正の整数）のとき，x についての 1 次方程式

$$x + a = b$$

を満たす解として，数を自然数から**整数**に拡張し，IA.1-3 では a, b が整数（ただし $a \neq 0$）のとき，x についての 2 次方程式

$$ax = b$$

[*] この項で述べている内容は，方程式論で分かっていることの知識を与えるためのものではない．現行教育会では, 画一的なカリキュラムの範囲内，範囲外ということにとらわれ過ぎた教授傾向にあるが，一部の学生にとってはガロアがその年代で独創した内容と同じ問題意識は持てる筈である．そのような学生には，範囲内の難問を解かせるよりも，段階に応じて先の教育をする．ある場合には，いわゆる「代数的閉体」のところ位まで進んでもよいだろう．

を満たす解として，数を整数から**有理数**に拡張して来た．

この章では，x についての 2 次以上の方程式，すなわち，a_0，a_1，$\cdots$，a_{n-1}，$a_n \in \mathbb{Z}$，$n \geqq 2$，$a_n \neq 0$ のとき，[†]

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{2.1}$$

を満たす解を調べることによって，数を有理数から拡張する．II.1-3 では，有限小数，または，循環小数で表すことのできる数を**整数でない有理数**とし，循環しない小数を**無理数**と呼ぶことを習った．II.1-3 ，および，IB.1-3 では，直線上の点に対応する数であり，有理数と無理数を合わせた数の総称である**実数**を習ったのであるが,「2 次方程式を解くことができるか.」「3 次方程式を解くことができるか.」$\cdots$ という古くからの問いは,「n 次方程式を満たす解が実数の範囲で存在するか.」というように言い換えることができる．(2.1) 式の実数解は，有理数であるか，無理数である．しかし，注意すべきことは，無理数のすべてが方程式 (2.1) の解であるとは限らない．その例としては，II.1-3 で定義した　π，e があり，これらの数は**超越数**と呼ばれている．また，方程式 (2.1) の解は実数とは限らない．このことは次の節 2-3 の主題となって来る．

★　指数の拡張

IA.1-3 で，a^n，$n \in \mathbb{Z}$ の場合の指数法則を取り上げたが，$\underline{a > 0}$ のとき，

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$$

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a$$

$$\ddots \cdots\cdots$$

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{n\ \text{個}} = a$$

を満たす数 $a^{\frac{1}{2}}$，$a^{\frac{1}{3}}$，$\cdots$，$a^{\frac{1}{n}}$ を，単に,「a の $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\cdots$，$\dfrac{1}{n}$ 乗」と呼ぶことにする．[‡]

問 **1** ．次の不等式を示せ．

$$(1)\ 1.414 < 2^{\frac{1}{2}} < 1.415 \quad (2)\ 1.732 < 3^{\frac{1}{2}} < 1.733 \quad (3)\ 2.236 < 5^{\frac{1}{3}} < 2.237$$

[†] $\{a_i\} \subset \mathbb{Q}$ としてもよいが，係数を通分してしまえば，分子は整係数となる．

[‡] $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$，$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$，$\cdots$ であるが，後者の記号はなるべく使わないことにする．また，平方根，立方根と言う用語も使わない．方程式の解であることを抜きにして,「a の平方根は，$\sqrt{a}$ および $-\sqrt{a}$ である.」などと覚え込ませるのはよくない．

(4) $3.162, 10^{\frac{1}{3}}, 3.163$　(5) $1.259 < 2^{\frac{1}{3}} < 1.260$

§

さらに，$a^{\frac{1}{n}}$ が定義されいれば，

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \cdots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{m\text{ 個}} = a^{\frac{m}{n}}$$

として，a の $\dfrac{m}{n}$ 乗が定まるから，a^p, $p \in \mathbb{Q}$ の場合の指数を構成することができ，指数法則もそのまま受け継がれる．すなわち，

指数法則 p, $q \in \mathbb{Q}$, $\underline{a > 0,\ b > 0}$ のとき，
【1】$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
【2】$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
【3】$(a^p)^q = a^{pq}$

となる．ここでは，底が負，すなわち，$a < 0$ の場合の a^p は考えていないことに注意しよう．一方，n が整数のときには指数 a^n は $a < 0$ の場合にも使っている．

$a < 0$ のとき，

$$\begin{cases} n \text{ 偶数のとき，} & a^n > 0 \\ n \text{ 奇数のとき，} & a^n < 0 \end{cases}$$

となる．また，$a = 0$ の場合，$n > 0$ ならば，$a^n = 0$ であるが，$n \leqq 0$ のときは使えないことにも注意するように．

問 **2** ．次の計算をせよ．

(1) $8^{\frac{2}{3}}$　(2) $25^{-\frac{1}{2}}$　(3) $25^{1.5} \times 32^{-0.2}$

¶

§ 問 1 の答：(1)〜(4) は辺々 2 乗，(5) は 3 乗した関係より．

¶ 問 2 の答：(1) 4　(2) $\dfrac{1}{5}$　(3) $\dfrac{125}{2}$

★ $x^n = a$ の解

$\boxed{\text{例}}$ **1** ．次の方程式の解を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

$$x^2 = a \tag{2.2}$$
$$x^3 = a \tag{2.3}$$
$$x^3 = -a \tag{2.4}$$
$$x^4 = a \tag{2.5}$$
$$x^n = a \tag{2.6}$$

【解】例えば，(2.2) 式を解くのに，指数法則を用いて両辺を $\dfrac{1}{2}$ 乗して，

$$(x^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad x = a^{\frac{1}{2}}$$

と答えるのは，誤りである．何故ならば，上の指数法則は底が正の場合，この場合には $x > 0$ のときしか考えていないからである．

(2.2) 式は，次のように解くべきである．右辺の a を移項して，

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 - \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0$$

IA.1-3 の乗法公式 【2】を用いて，

$$\left(x + a^{\frac{1}{2}}\right)\left(x - a^{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

したがって，

$$x + a^{\frac{1}{2}} = 0,\ \text{または，}\ x - a^{\frac{1}{2}} = 0$$

故に，2 次方程式 (2.2) の実数解は，

$$\underline{\underline{x = -a^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{1}{2}}}}$$

と，2 つ存在する．

この計算の右辺を 0 とした後の左辺の計算は，第 1 章のトレーニングでやった因数分解である．第 1 章のトレーニングでやった剰余の定理かにおける余り $R = 0$ の場合から導かれたことであるが，一般に，$f(x) = 0$　の解の 1 つが $x = \alpha$ であることと，$f(x)$ が $x - \alpha$ の因数を持つことは同値であった．

以降の方程式の解を議論する前に，$n \in \mathbb{N}$ のとき，

$$P = r^{2n} + r^{2n-1} + \cdots + r + 1 > 0$$

を証明しておく．

上式 P の両辺に $r-1$ を掛けると，

$$(r-1)P = (r-1)(r^{2n} + r^{2n-1} + \cdots + r + 1)$$

右辺は，

$$(r-1)(r^{2n} + r^{2n-1} + \cdots + r + 1)$$

$$= (r^{2n+1} + r^{2n} + \cdots + r^2 + r) - (r-1)(r^{2n} + r^{2n-1} + \cdots + r + 1)$$

$$= r^{2n+1} - 1$$

$$\therefore \quad (r-1)P = r^{2n+1} - 1$$

① $r \geqq 0$ のとき．$r-1>0$ かつ $r^{2n+1}-1>0$ だからといってもよいが，直接的に，各項は負にならないから，

$$P \geqq 1 > 0$$

は自明である．

② $r<0$ のとき．$2n+1$ が奇数なので，$r^{2n+1}<0$ だから，$r-1<0$ かつ $r^{2n+1}-1<0$.

$$\therefore \quad P > 0$$

よって，任意の実数 r について，

$$r^{2n} + r^{2n-1} + \cdots + r + 1 > 0 \tag{2.7}$$

(2.3) 式は，

$$x^3 - a = 0$$

$$x^3 - \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 0$$

IA.1-3 の乗法公式【3】を用いて，

$$\left(x - a^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^2 + a^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{2}{3}}\right) = 0$$

したがって，

$$x - a^{\frac{1}{3}} = 0,\ \text{または,}\ x^2 + a^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{2}{3}} = 0$$

ここで，$r = \dfrac{x}{a^{\frac{1}{3}}}$ とおくと，

$$x^2 + a^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{2}{3}} = 0$$

の両辺を $a^{\frac{2}{3}}$ で割った式

$$\left(\frac{x}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2 + \frac{x}{a^{\frac{1}{3}}} + 1 = 0$$

の右辺は　$r^2 + r + 1$ の形であるから，(2.7) 式（$n = 1$ の場合）から 0 にはならない．したがって　2 次方程式

$$x^2 + a^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{2}{3}} = 0$$

は実数解をもたないので，3 次方程式 (2.3) の実数解は，

$$\underline{\underline{x = a^{\frac{1}{3}}}}$$

と，ただ 1 つ存在する．

同様に，(2.4) 式は，

$$x^3 + a = 0$$

$$x^3 + \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 0$$

IA.1-3 の乗法公式 【3】を用いて，

$$\left(x + a^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^2 - a^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{2}{3}}\right) = 0$$

したがって，

$$x + a^{\frac{1}{3}} = 0,\ \text{または,}\ x^2 - a^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{2}{3}} = 0$$

ここで，$r = -\dfrac{x}{a^{\frac{1}{3}}}$ とおくと，

$$x^2 + a^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{2}{3}} = 0$$

の両辺を $a^{\frac{2}{3}}$ で割った式

$$\left(-\frac{x}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2 + \left(-\frac{x}{a^{\frac{1}{3}}}\right) + 1 = 0$$

の右辺は　r^2+r+1 の形であるから，(2.7) 式（$n=1$ の場合）から 0 にはならない．したがって　 2 次方程式

$$x^2 - a^{\frac{1}{3}}x + a^{\frac{2}{3}} = 0$$

は実数解をもたないので，3 次方程式 (2.4) の実数解は，

$$\underline{\underline{x = -a^{\frac{1}{3}}}}$$

と，ただ 1 つ存在する．

(2.5) 式は，

$$x^4 - \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 0$$

$$\left(x^2\right)^2 - \left\{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2\right\}^2 = 0$$

となるが，左辺を因数分解すると，

$$\left(x + a^{\frac{1}{4}}\right)\left(x - a^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^2 + a^{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

となり，

$$x^2 + a^{\frac{1}{2}} > 0$$

であるから，4 次方程式 (2.5) の実数解は，

$$\underline{\underline{x = -a^{\frac{1}{4}},\ a^{\frac{1}{4}}}}$$

と，2 つ存在する．

(2.6) 式は，まず，

① n が奇数のとき．から考えよう．a を移項した式

$$x^n - a = 0$$

の両辺を $a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$ で割った式

$$\left(\frac{x}{a^{\frac{1}{n}}}\right)^n - 1 = 0$$

は，$r = \dfrac{x}{a^{\frac{1}{n}}}$ とおくと，

$$r^n - 1 = 0$$

ここで，II.1-3 で習った等比級数についての (1.14) 式を用いると，

$$1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\frac{r^n-1}{r-1}$$

したがって，r^n-1 は因数分解できて，

$$r^n-1=(r-1)\left(r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+r+1\right)$$

となるが，n が奇数のとき $n-1$ は偶数であるから，(2.7) 式が適用できて，

$$r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+r+1\neq 0$$

であるから，

$$r-1=0,\ \text{すなわち,}\frac{x}{a^{\frac{1}{n}}}-1=0$$

したがって，n が奇数のとき n 次方程式 (2.6) の実数解は，

$$\underline{\underline{x=a^{\frac{1}{n}}}}$$

と，ただ 1 つ存在する．

② n が偶数のとき．$n=2m$ とおくと，m は自然数である．

$$x^{2m}-a=0$$

の両辺を $a=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m$ で割った式

$$\left(\frac{x^2}{a^{\frac{1}{m}}}\right)^m-1=0$$

は，$r=\left(\frac{x}{a^{\frac{1}{2m}}}\right)^2$ とおくと，

$$r^m-1=0$$

左辺は因数分解して，

$$r^m-1=(r-1)\left(r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+r+1\right)$$

となるが， r は平方数で，$r>0$ であるから，

$$r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+r+1>0$$

したがって，

$$r-1=0,\ \text{すなわち,}\left(\frac{x}{a^{\frac{1}{2m}}}\right)^2-1=0$$

再び，因数分解して，

$$\left(\frac{x}{a^{\frac{1}{m}}}+1\right)\left(\frac{x}{a^{\frac{1}{m}}}-1\right)=0$$

$$\frac{x}{a^{\frac{1}{2m}}}=-1,\ 1$$

$$x=-a^{\frac{1}{m}},\ a^{\frac{1}{m}}$$

$2m=n$ であったから，n が偶数のとき n 次方程式 (2.6) の実数解は，

$$\underline{\underline{x=-a^{\frac{1}{n}},\ a^{\frac{1}{n}}}}$$

と，2 つ存在する．

$\boxed{\textbf{問}}$ **3** ．次の方程式の解を求めよ．

$$(1)\ x^2=8\quad(2)\ x^3=-27$$

$$(3)\ x^n=-a,(a>0) \tag{2.8}$$

‖

‖ $\boxed{\text{問 2}}$の答：(1) $x=-2\cdot 2^{\frac{1}{2}},\ 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}$　(2) $x=-3$　(3) n 偶数のとき，解なし ,n 奇数のとき,$x=-a^{\frac{1}{n}}$