☆　トレーニング　☆

●　科学的表記法による計算

I. **表記法** 物理では，しばしば，非常に大きな数や非常に小さな数を取り扱う．例えば，太陽と地球間の距離は約

$$150,000,000,000 \text{ m}（メートル）$$

であり，水素原子の質量は約

$$0.00000000000000000000000000167 \text{ kg}(キログラム）$$

であるが，このままでは読み取りにくいし，計算にも不便である．そこで，これらの数を次の形式の科学的表記法で表すことにする．約束として，

$$[1 \text{ の位から始まる小数}] \times 10^n, \quad (n \in \mathbb{I})$$

と表記する．上の例では，

$$1.5 \times 10^{11} \text{ m}, \qquad 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

となり，それぞれ，10^{11}（1 千億，0 の数が 11 個付く位の数），10^{-27}（1 兆倍の 1 千兆分の 1，小数点以下 27 番目に 0 でない数が初めて現れる数）というように，大きさの程度が読み取りやすくなります.

(1) 次の数を科学的表記法で示せ．(単位も付せ.）

(a) 6800　(b) 340 000　(c) 70 000　(d) 85 000 000 000

(e) 0.000 68　(f) 0.000 000 34　(g) 0.0056　(h) 0.0040

(i) 1 989 100 000 000 000 000 000 000 000 000

(j) 0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 938 97†

II. **加減** 科学的表記法による足し算，引き算は，指数部分を同じ値に合わせてから行う.

$$3.0 \times 10^6 + 4 \times 10^5 = 3.0 \times 10^6 + 0.4 \times 10^6 = 3.4 \times 10^6$$

$$1.0 \times 10^6 - 4 \times 10^5 = 10 \times 10^5 - 4 \times 10^6 = 6 \times 10^5$$

$$3 \times 10^{-6} + 4 \times 10^{-5} = 0.3 \times 10^{-5} + 4.0 \times 10^{-5} = 4.3 \times 10^{-5}$$

$$1 \times 10^{-6} - 4.0 \times 10^{-5} = 0.1 \times 10^{-5} - 4.0 \times 10^{-5} = -3.9 \times 10^{-5}$$

†答：(1)(a) 6.8×10^3　(b) 3.4×10^5　(c) 7×10^4　(d) 8.5×10^{10}　(e) 6.8×10^{-4}　(f) 3.4×10^{-7}　(g) 5.6×10^{-3}　(h) 4.0×10^{-3}　(i) 1.9891×10^{30}（太陽質量 kg）(j) 9.109397×10^{-31}（電子質量 kg）

など，どちらの指数に合せるかは，場合によって判断する．
(2) 次の計算を実行して，答を科学的表記法で表せ．
(a) $5.3\times10^4+4.7\times10^4$ (b) $3\times10^{-7}+8\times10^{-7}$ (c) $3.8\times10^9-6.8\times10^9$
(d) $2.26\times10^{-18}-2.28\times10^{-18}$
(e) $5\times10^{10}+9.5\times10^{11}$ (f) $7\times10^{-5}+9.4\times10^{-4}$ (g) $1.5\times10^{11}-7\times10^{10}$
(h) $7\times10^{-4}-2.00\times10^{-2}$[‡]

III. **乗除** 科学的表記法による掛け算，割り算，初めに 10 の指数部分を計算し，次に数値部分の繰り上がり，繰り下がりを考えて指数を調節する．

$$(3\times10^3)(4\times10^{11})=12\times10^{3+11}=12\times10^{14}=1.2\times10^{15}$$

$$(3\times10^5)(4\times10^{-9})=12\times10^{5-9}=12\times10^{-4}=1.2\times10^{-3}$$

$$\frac{9\times10^4}{3\times10^2}=3\times10^{4-2}=3\times10^2$$

$$\frac{4\times10^3}{8\times10^6}=0.5\times10^{3-6}=0.5\times10^{-3}=5\times10^{-4}$$

(3) 次の計算を実行して，答を科学的表記法で表せ．
(a) $(9.5\times10^{11})(6\times10^6)$ (b) $(6\times10^{-4})(5\times10^{-8})$ (c) $\dfrac{8\times10^{-8}}{2\times10^{-4}}$ (d) $\dfrac{2\times10^8}{8\times10^{-4}}$
(e) $\dfrac{(6\times10^{12})(6\times10^{-6})}{1.2\times10^6}$[§]

• 剰余の定理と因数分解

I. **記号の約束** 式をひとまとめに示すときに，今までは，

$$A=2x^2+x+2,\quad B=x+3$$

のように，1 つの文字 A,B などで表して来たが，これらが x についての式であること示すときには，すでに IB-1-1 で習った関数の書き方を用いて，

$$A(x)=2x^2+x+2,\quad B(x)=x+3$$

のように，$A(x),B(x)$ と書くことにする．[¶] 初めに $A(x),B(x)$ をこのように約束しておくなら，x にいろいろな値を代入した式は，例えば，$x=y$ のとき $A(y),B(y)$，$x=10$ のと

[‡] (2)(a)1.0×10^5 (b)1.0×10^{-6} (c)-3.0×10^9 (d)-2×10^{-20} (e)1.00×10^{12} (f)1.01×10^{-3}(g)8×10^{10} (h)-1.93×10^{-2}
[§] (3)(a) 5.7×10^{23} (b)3×10^{-11} (c)4×10^{-4} (d)2.5×10^{11} (e)3×10
[¶] $\mathbb{Z}[x],\mathbb{Q}[x]$ と混同しないように．

き $A(10), B(10)$，$x=2$ のとき $A(2), B(2)$，$x=-1$ のとき $A(-1), B(-1)$ と表すことができる．それぞれ，これらの値は，

$$A(y) = 2y^2 + y + 2, \quad B(y) = y + 3$$

$$A(10) = 2 \cdot 10^2 + 10 + 2 = 212, \quad B(10) = 10 + 3 = 13$$

$$A(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 + 2 = 12, \quad B(2) = 2 + 3 = 5$$

$$A(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) + 2 = 3, \quad B(-1) = (-1) + 3 = 2$$

となる．

(1) $A(x) = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 9$ のとき，つぎの値を求めよ．

(a) $A(1)$　(b) $A(-2)$　(c) $A(2a)$　(d) $A(10^2)$　(e) $A(10^{-2})$[‖]

II. **剰余の定理** $A(x) = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 9$ を $B(x) = x + 2$ で割った商 $Q(x)$ と余り R を求めると，商は $Q(x) = 2x^2 + 7$ で余りは $R = -5$ である．余りの次数は $B(x)$ の次数すなわち，x の 1 次以下であるから，定数となるため，$R(x)$ ではなくたんに R としたのである．これを等式で表せば，

$$2x^3 + 4x^2 + 7x + 9 = (x+2)(2x^2+7) - 5, \text{すなわち}, A(x) = (x+2)Q(x) + R$$

問題 (1)(b) の答は $A(-2) = -5$ であったが，右上の式の両辺に $x = -2$ を代入すると，

$$A(-2) = ((-2) + 2)\,Q(-2) + R = R = -5$$

となる．この関係は，一般的に利用できる．すなわち，整式 $A(x)$ を 1 次式 $x - \alpha$ で割ったときの余りは定数であり，これを R とおくと，

$$A(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$$

の形で表され，商 $Q(x)$ がどんな値であっても，両辺に $x = \alpha$ を代入すると，

$$A(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + R = R$$

となる．これをまとめておくと，

【剰余の定理 】整式 $A(x)$ を 1 次式 $x - \alpha$ で割ったときの余り R は，次のように与えられる．

$$R = A(\alpha)$$

[‖]答：(1)(a) $A(1) = 22$　(b)$A(-2) = -5$　(c)$A(2a) = 16a^3 + 16a^2 + 14a + 9$　(d)$A(10^2) = 2.040709 \times 10^6$　(e)$A(10^{-2}) = 9.070402$

(2) 次の左の式を右の式で割った余りを求めよ．

(a) $4x+5,\quad x-2$ (b) $2x^3+5x^2-1,\quad x+1$ (c) $3x^2+2x+1,\quad 3x-1$

(d) $x^2-x-2,\quad x+1$[**]

III. **因数分解** 正の整数であって，1 以外の他の正の整数で割り切れない数を**素数**という．また，正の整数を素数の積で表すことを**素因数分解**と呼ぶ．例えば，6,12,13464 を素因数分解した式は，

$$6=2\cdot 3,\quad 12=2^2\cdot 3,\quad 13464=2^3\cdot 3^2\cdot 11\cdot 17$$

である．

対比して考えて，整式を可能な限り低い次数の整式の積の形で表すことを**因数分解**と呼ぶ．27 ページにあげた乗法公式を，右辺から左辺を導くというように見直せば，

【1】$x^2\pm 2\alpha x+\alpha^2=(x\pm\alpha)^2$

【2】$x^2-\alpha^2=(x+\alpha)(x-\alpha)$

【3】$x^3\pm\alpha^3=(x\pm\alpha)(x^2\mp\alpha x+\alpha^2)$

となり，これら特殊な形の**因数分解の公式**となる．

(3) 次の式を因数分解せよ．

(a) $4x^2+12x+9$ (b) $a^2b^2-2ab+1$ (c) $x^2-\dfrac{1}{9}$

(d) x^3+27 (e) $64x^3-125$[††]

特殊な形でなく，もっと一般的な整式を因数分解するには，剰余の定理を用い，余り $R=0$ の場合を考える．すなわち，

「整式 $A(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れれば，$A(\alpha)=0$ であり，逆に，$A(\alpha)=0$ ならば，$A(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる．」これを用いれば，$A(\alpha)=0,A(\beta)=0,\cdots$ を見つけて，次々と，整式 $A(x)$ の因数 $x-\alpha,x-\beta,\cdots$ を見つけることができる．x の 1 次式に分解できない 2 次以上の因数は，$A(x)$ を $(x-\alpha)(x-\beta)\cdots$ で割り算した商として得られる．

例えば，$A(x)=x^4-5x^2-10x-6$ を因数分解するには，まず，定数 -6 から，0 となる可能性として，$A(1),A(-1),A(2),A(-2),A(3),A(-3),A(6),A(-6)$ を調べてみる．すると，

$$A(-1)=(-1)^4-5\cdot(-1)^2-10\cdot(-1)-6=0,\quad A(3)=3^4-5\cdot 3^2-10\cdot 3-6=0$$

が分かる．

$$\frac{x^4-5x^2-10x-6}{(x+1)(x-3)}=x^2+2x+2$$

より，

$$A(x)=(x+1)(x-3)(x^2+2x+2)$$

[**] (2)(a)9 (b)2 (c)2 (d)0

[††] (3)(a) $(2x+3)^2$ (b) $(ab-1)^2$ (c) $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$ (d) $(x+3)(x^2-3x+9)$ (e) $(4x-5)(16x^2+20x+25)$

ここで，x^2+2x+2 が，もうこれ以上 x の 1 次式に分解できないかどうかは，整式の係数，定数としてどの範囲の数の集合に属する要素とするかによって違う．実は，この議論が次の章における主なテーマとなるのである．目下は係数，定数は有理数の集合の要素とする．

(4) 次の式を因数分解せよ．

(a) $x^2+9x-10$ (b) $6x^2-13x-15$ (c) x^3-7x-6 (d) $2x^2+xy-3y^2+4x+y+2$ [‡‡]

[‡‡](4)(a) $(x+10)(x-1)$ (b) $(6x+5)(x-3)$ (c) $(x+1)(x+2)(x-3)$ (d) $(x-y+1)(2x+3y+2)$