1–3　乗法と除法

≪ この項で学ぶこと ≫

[**有理数，小数，指数法則，1 元整式の乗法，乗法公式，1 元整式の除法，有理式**]

★　有理数

a が b の約数*である場合には x は整数となるが，そうでない場合には

$$x = \frac{b}{a}, \qquad (a \neq 0) \tag{1.3}$$

と表される分数が導入される．

(1.3) 式において，$a > 0$ と仮定してもよい．なぜなら，もし a が負なら，(1.3) 式の右辺の分母分子にそれぞれ -1 を掛ければ分母が正になるからである．さらに，(1.3) 式の右辺の分数をできるだけ約分した場合のみを考えて，a, b は 1 以外に正の整数の公約数を持たないことを仮定してもよい．このとき「a, b は**互いに素**である」という．

整数と既約分数を合わせて**有理数**と呼ぶ．有理数の集合を集合論の記号を使って表すと，

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \right\} \tag{1.4}$$

0 と負の整数の導入によって減法についても閉じた整数の集合が形成されたのと同様に，0 で割ることを除いて除法について閉じているのが有理数の集合 $\mathbb{Q}$ である．†

正の整数の集合 $\mathbb{N}$，整数の集合 $\mathbb{Z}$ と有理数の集合 $\mathbb{Q}$ との関係は，

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

である．

整数はたんに数を数えるという過程に結びつくものであったが，有理数は量を量るという過程と関係して構成された．例えば，時間の最小単位を秒までしか設定していない段階

*習っていることを前提とする．

†$\mathbb{Z}$ は，$a, b \in \mathbb{N}$ のとき，方程式 $x + a = b$ の解全体の集合．あるいは，$\mathbb{Q}$ は，$a(\neq 0), b \in \mathbb{Z}$ のとき，方程式 $ax = b$ の解全体の集合．というような言い方も考えらるが，正確な表現は**同値関係**，**類別** といった概念を使わざるを得ず．ここでは避けることにした．

では，1 秒から 2 秒までの間の時間は 1 秒と 1 秒の $\frac{1}{3}$ などと分割して指定せざるを得ない．その次の段階ではミリ秒などという単位を使うようになるのだが，測定の精度を上げれば再びその端数がでる．抽象化された数としての有理数は単位と切り離されたものであるが，発生的にはこの例のように単位の考え方と密接な関係を持っていたのである．

$\boxed{\textbf{問}}$ **1** 例にならって，次表の空欄をうめよ．

	加法	減法	乗法	除法
（例）正の整数の集合 $\mathbb{N}$	○	×	○	×
整数の集合 $\mathbb{Z}$				
有理数の集合 $\mathbb{Q}$				

○… 閉じている　　×… 閉じていない

ただし，除法では 0 で割ること除く．‡

★ 小数

整数でない有理数は，$a \neq 0$ で,a,b がたがいに素であるとき，分数 $\frac{b}{a}$ で表させるとしたが，小数でも表記される．例えば，27.32 は，

$$27.32 = 2 \cdot 10 + 7 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{2732}{100} = \frac{683}{25}$$

という有理数を表す．

前項では，整数の 10 進法による記数法を見たが，その各桁はすべて a_n を 0 または 10 未満の正の整数として，$a_n 10^n$ の形をしていた．ここで n は 0 または 正の整数である．小数についても，各桁がすべて $a_n 10^n$ の形となっている項の和という表し方ができないだろうか．このような形式的なところから考えて行くと，

$$10^0 = \left(\frac{1}{10}\right)^0 = 1, \left(\frac{1}{10}\right) = 10^{-1}, \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 10^{-2} \cdots,$$

一般に，n を 0 または 正の整数として，$\left(\frac{1}{10}\right)^n = 10^{-n}$ あるいは，n を負の整数まで含めた整数として，10^n の約束をすることができる．

---

‡ $\boxed{\text{問}}$ 1 の答：

	加法	減法	乗法	除法
（例）正の整数の集合 $\mathbb{N}$	○	×	○	×
整数の集合 $\mathbb{Z}$	○	○	○	×
有理数の集合 $\mathbb{Q}$	○	○	○	○

前項 $\boxed{\text{問}}$ 2(2) で，$n+1$ 桁の整数の場合の 10 進法の表記の一般規則を，

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots a_1 \cdot 10 + a_0,$$

$$(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}, a_n \neq 0)$$

と表したが，上の 10^n についての，新しい約束を用いると，整数部 $n+1$ 桁，小数点以下 m 桁の有理数の場合の 10 進法の表記の一般規則は，

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m}$$

$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots a_1 \cdot 101 + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \cdots a_{-m},$$

$$(a_{-m}, \cdots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}, a_n \neq 0, a_{-m} \neq 0)$$

と表せる．[§]

このようにして，数字の配列がどこまでも続くことのない小数，すなわち，有限小数は分数に表すことができるが，逆に，すべての分数が有限小数で表されるとは限らない．

$$\frac{3}{7} = 0.428571428571428571 \cdots$$

のように，限りなく続く無限小数となる場合もある．この場合の詳しい議論は，II-1-3 でやることになる．

★　指数法則

前項では，$\left(\frac{1}{10}\right)^n = 10^{-n}$ と記すと，式の各項が同じ形式 $a_p 10^p, p \in \mathbb{Z}$ となり，有理数はその和といとして表記できるとしたが，ここではもっと一般の指数について考えて行こう．

n が正の整数（$n \in \mathbb{N}$），a が 0 でない数 ($a (\neq 0) \in \mathbb{Q}$ であるとき，a^n は

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\ \text{個}}$$

の意味であった．a^n の表記法において，n を**指数**[¶]，a を**底**と呼ぶ．この「a を n 回掛ける」という操作を四則演算以外の一種の演算と考えることもできる．四則演算にいろいろ

[§]通常表記では，末尾 a_m は 0 でない項で終るが，科学計算における有効数字を示す表記では，測定の詳しさを示すため必要な限り 0 を残す．

[¶]「べき」は使わない．したがって，整式の並べ方の際,「降べきの順」などとは言わなかった．

な規則があったように，指数の操作についてどのような規則が出て来るであろうか．しばらくこの規則，すなわち，$n,m,\cdots \in \mathbb{N}$ の場合の**指数法則**のを見て行こう．

【1】$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

具体的な例で確かめて見ると，$n=3$ とすると左辺は，

$$(ab)^3 = (ab)\cdot(ab)\cdot(ab) = aaabbb$$

（掛け算の · は省略して記した．）右辺は，

$$a^3 \cdot b^3 = aaabbb$$

となるから，明らかに成り立っている．一般の正の整数 n についても，左辺は，

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)\cdots(ab)}_{n\text{ 個}} = \underbrace{aaa\cdots a}_{n\text{ 個}}\cdot\underbrace{bbb\cdots b}_{n\text{ 個}}$$

右辺は，

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{aaa\cdots a}_{n\text{ 個}}\cdot\underbrace{bbb\cdots b}_{n\text{ 個}}$$

となって左辺と右辺は等しい．[‖]

この法則は，数の加法と乗法に関する分配法則：

$$n\cdot(a+b) = n\cdot a + n\cdot b$$

と形式的に似ている．つまり，$n\cdot a$ の代わりに a^n と置き換えれば,【1】の関係となる．

【2】$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$m=2,n=3$ の場合は，左辺は，

$$a^2\cdot a^3 = aa\cdot aaa = a^5$$

右辺は，

$$a^{2+3} = a^5$$

で成り立つ．一般の $m,n\in\mathbb{N}$ の場合にも，左辺，

$$a^m\cdot a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{m\text{ 個}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n\text{ 個}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{m+n\text{ 個}}$$

[‖]数学的帰納法は，単元 IB.1-3 で習う．履修していれば，整式に証明する．以下,【2】,【3】も同じであるが，ここでは，n,m 2 重の数学的帰納法となる．

右辺,

$$a^{m+n} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ 個}}$$

となり，左辺と右辺は等しい.

この法則は，数の加法と乗法に関するもう一つの分配法則：

$$(m+n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$$

には,，$n \cdot a$ の代わりに a^n と置き換えても対応していない．対応といっても，$n \cdot a = a \cdot n$ であるが，右辺を約束にしたがって置き換えた n^a は一般には定義されていないし，定義されている範囲でも $a^n \neq n^a$ である．このような対応，非対応をもっと厳密に論じるためには，さらに抽象化された代数学だ必要となるのである.

【3】$(a^m)^n = a^{mn}$

$m = 2, n = 3$ とおけば，左辺は,

$$(a^2)^3 = (aa)^3 = aa \cdot aa \cdot aa = a^6$$

右辺は,

$$a^{2 \cdot 3} = a^6$$

となって，正しいことが，確かめられる.

数の乗法に関する**結合法則**：

$$m \cdot (n \cdot a) = n \cdot (m \cdot a)$$

に対応させて，$n \cdot a$ を掛け算の順序を換えることなく a^n に置き換えみると,

$$(a^n)^m = (a^m)^n$$

この関係は正しく，指数の部分の演算では順序は問わないことが分かるからから，左辺も右辺もともに a^{mn} と表しておくことができるのである.

次に，底 a が負の数について注意をしておこう．$a = -1$ の場合だけを考えておけばよいだろう．$(-1) \cdot (-1) = 1, (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1 \cdots$ であるから,

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \cdots (n \text{ が偶数のとき}) \\ -1 & \cdots (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{問}}$ **2** n が正の整数のとき,

$$\frac{1 + (-1)^n}{2}$$

の値を求めよ．**

** $\boxed{\text{問}}$ 2 の答：n が偶数のとき，1，n が奇数のとき 0

ここまで，指数法則についてまとめて来た意味は，指数として，$n \in \mathbb{N}$ であった数域を拡大して，$n \in \mathbb{Z}$ にも指数法則【1】,【2】,【3】が成り立つように，a^n の約束を拡張しようと考えているからである.【2】に $n = 0$ を代入すると，

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m$$

これより，

$$a \neq 0 \text{ のとき}, a^0 = 1$$

と定めればよい．前の項で $10^0 = \left(\dfrac{1}{10}\right)^0$ としたのは，この約束に合っていた．

また,【2】に $n = -m$ を代入すると，

$$a^m \cdot a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

a^{-m} は $\dfrac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m\text{ 個}}}$ を意味するとし，

$$a \neq 0 \text{ のとき}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

と定める．これも，前項の $\left(\dfrac{1}{10}\right)^m = 10^{-n}$ の約束の一般化である．指数法則【2】は a^n についての乗法の規則であったが，これで除法の規則もできあがったことになる．

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

問 3 次の表現を a^n の表現に直せ.

(1) $\dfrac{1}{a}$ (2) 1 (3) $\dfrac{1}{a^7}$ (4) $\dfrac{1}{a^{-7}}$

††

問 4 次の値を求めよ.

(1) 2^{-3} (2) 10^{-5} (3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ (4) $(-5)^{-3}$

†

†† 問 3 の答：(1) a^{-1}，(2) a^0，(3) a^{-7}，(4) a^7.

† 問 4 の答：(1) $\dfrac{1}{8}$，(2) $\dfrac{1}{100000}$，(3) 1，(4) $-\dfrac{1}{125}$.

問 **5** 次の表現を a^n の表現に直せ.

(1) $a^2 \cdot a^5$　(2) $a^3 \cdot a^{-3}$　(3) $x^{-6} \cdot x^{-4}$

(4) $a^5 \div a^8$　(5) $a^{-5} \div a^3$　(6) $x^0 \div x^{-4}$

(7) $(a^{-2})^{-1}$　(8) $(ab^{-1})^{-3}$　(9) $\left(\dfrac{x^{-2}}{y}\right)^{-3}$ ‡

[**参考**]

$n \in \mathbb{Z}$ の数域をさらに拡大して，n が有理数の場合，$n \in \mathbb{Q}$ にも a^n の約束を拡張することができる．m を正の整数として $mn = 1$ の場合にも指数法則【3】が成り立つようにするには，指数が $n = \dfrac{1}{m}$ となる数 $a^{\frac{1}{m}}$ を定義する必要があるが,「$a^{\frac{1}{m}}$ は有理数の範囲には存在しない.」

$a = 2, m = 2$ の場合として，このことを証明しよう．反例を 1 つあげれば，この命題は証明されたことになる.

【証明】背理法と呼ぶ,「結論を否定する仮定をして，これが矛盾することを導く」証明法を用いる．すなわち，結論の否定である，$2^{\frac{1}{2}}$が有理数であると仮定する.

$2^{\frac{1}{2}}$ が有理数であれば，たがいに素である正の整数 p, q を用いて，

と表すことができる.

(1.4) 式の分母を払って，両辺を 2 乗すると，

$$2q^2 = p^2 \tag{1.5}$$

この式の左辺は偶数であるから，p^2 も偶数である．p^2 が偶数ならば，p も偶数である.（このことを証明するには，命題「p は奇数 $\Longrightarrow p^2$ は奇数」を証明し，この命題が「p^2 が偶数 $\Longrightarrow p$ も偶数」と同値であることをいう．やってみよ.）故に，p はある整数 k のよって

$$p = 2k \tag{1.6}$$

と表される．(1.6) 式を (1.5) 式の右辺に代入して，両辺を 2 で割れば，

$$q^2 = 2k^2 \tag{1.7}$$

(1.7) 式より，q^2 が偶数で，したがって，q も偶数である．これにより，p, q はともに偶数であって，公約数 2 をもつ．これは，p, q をたがいに素とした仮定に反する.

故に，$2^{\frac{1}{2}}$ は有理数ではない.**【証明終】**

なお，指数法則は後にさらに拡張される.

‡ 問 5 の答：(1) a^7，(2) 1，(3) x^{-10}，(4) a^{-3}，(5) a^{-8}，(6) x^4，(7) a^2，(8) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^3$

★ 1 元整式の乗法

加減法のときと同様に，例えば 2 つの整式 $2x^2+x+2$ と $x+3$ の乗法は 2 つの整式の係数と定数だけを並べた 212 と 13 という数の乗法に対応できるように約束し，次いでその演算規則を，例えば, $2x^2+x+4$ と $x+3$ の乗法のように, 214×13 と対応しない場合にも適用すればよいだろう.

そこでまず，桁の繰り上がりのない整数の掛け算と対応しているものから見て行こう.

例 1 *2* つの整式

$$A=2x^2+x+2, \qquad B=x+3$$

に対して，$A\cdot B$ を求めよ.

【解】 これらの計算は

$$\begin{array}{rrr} & 212 \\ \times) & 13 \\ \hline & 636 \\ 2 & 12 \\ \hline 2 & 756 \end{array} \iff \begin{array}{rrrrr} & 2x^2+ & x+ & 2 & \\ \times) & x+ & 3 & & \\ \hline & 2x^3+ & x+2x & & \\ & & 6x^2+3x+ & 6 & \\ \hline & 2x^3+7x^2+5x+ & 6 & & \end{array}$$

整式の場合には，次数の高いものからつめて並べておき，それぞれが最も高い次数どうしの掛け算から始める方がいいだろう．これというのも，2 項の掛け算は指数法則より，$ax^m\cdot bx^n=abx^{m+n}$ のようになって，数の計算の桁の繰り上がりに対応する指数 $m+n$ 以外の次数への影響などは決して起こらないからである.

ここまでに述べて来た整数の加法・乗法と，整式の加法・乗法の対応を集合の言葉で表せば，まず，整数 a,b の加法については, 整数の集合 $\mathbb{Z}$ が閉じている．すなわち,

$$a,b\in\mathbb{Z}\Longrightarrow a+b\in\mathbb{Z}$$

に対して，整式 A,B の加法についてはその集合 $\mathbb{Z}[x]$ は閉じている.（減法は，$-B$ の加法とする.）すなわち,

$$A,B\in\mathbb{Z}[x]\Longrightarrow A+B\in\mathbb{Z}[x]$$

これは，前節で見てきた．ここではさらに，整数 a,b の乗法については, 整数の集合 $\mathbb{Z}$ が閉じている．すなわち,

$$a,b\in\mathbb{Z}\Longrightarrow ab\in\mathbb{Z}$$

に対して，整式 A,B の乗法についてもその集合 $\mathbb{Z}[x]$ は閉じている.

$$A,B\in\mathbb{Z}[x]\Longrightarrow AB\in\mathbb{Z}[x]$$

もちろん，数に関しては既に有理数まで進んだのであるが，これに対応する有理式は，この節の最後に出て来る．

加法･乗法がともに成り立っているので，数の集合のときに成立している分配法則 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ として，

$$a(b+c) = ab + ac$$

に対応して，整式の分配法則

$$A(B+C) = AB + AC$$

が使える．整式の積を求めるには，例 1 でやったような数の掛け算に似たやり方のほかに，分配法則を用いて式を変形して行ってもよい．

例 2 $(ax+b)(cx+d)$ を x の整式の形に整理せよ．

【解】 $A = ax+b, B = cx, C = d$ とおいて，分配法則 $A(B+C) = AB+BC$ を用いると，

$$(ax+b)(cx+d) = A(B+C) = AB + BC = (ax+b)cx + (ax+b)d$$

最右辺の各項に，それぞれ，また，分配法則を用いると，[§]

$$(ax+b)cx = cx(ax+b) = acx^2 + bcx, \quad (ax+b)d = d(ax+b) = adx + bd$$

これらを加えれば，

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + bcx + adx + bd = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

例 3 $(ax+b)(cx^2+dx+e)$ を x の整式の形に整理せよ．

【解】 $(ax+b)(cx^2+dx+e)$

$$= ax(cx^2+dx+e) + b(cx^2+dx+e)$$

$$= acx^3 + adx^2 + aex + bcx^2 + bdx + be$$

$$= acx^3 + (ad+bc)x^2 + (ae+bd)x + be$$

問 6 次の積を計算せよ．

(1) $(2x^2+3y)z$ (2) $x^2(x^2-6x+4)$

(3) $(x+6)(2x+3)$ (4) $\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)\left(\dfrac{1}{3}x+3\right)$

(5) $(x-a)(x^2+ax+1)$ (6) $(x^2+2x+5)(2x^2-3x-6)$[¶]

[§] 交換法則は今のところ，あまり意識的に言わないでおく．

[¶] 問 6 の答:(1) $2x^2z+3yz$，(2) $x^4-6x^3+4x^2$，(3) $2x^2+15x+18$，(4) $\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{5}{6}x-6$，(5) $x^3+(1-a^2)x-a$，(6) $2x^4+x^3-2x^2-27x-30$．

★ 乗法公式

能率的に計算するためには，以下のような乗法公式を用いる．その証明は直接計算してもよいが，ここでは，$\boxed{例}$ 2，$\boxed{例}$ 3 の結果を利用する．

$\boxed{例}$ 2 で，$a=c=1, b=d=\pm\alpha$ とおいて，

$$(x\pm\alpha)^2=(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd=x^2\pm\alpha x+2\alpha^2$$

【1】$(x\pm\alpha)^2=x^2\pm 2\alpha x+\alpha^2$
$\pm$ の複号は左辺で上の記号 $+$ の場合には右辺でも上の記号 $+$ を，左辺で下の記号 $-$ の場合には右辺でも下の記号 $-$ を採用する．

$\boxed{例}$ 2 で，$a=c=1, b=\alpha, d=-\alpha$ とおいて，

$$(x+\alpha)(x-\alpha)(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd=x^2-\alpha^2$$

【2】$(x+\alpha)(x-\alpha)=x^2-\alpha^2$

乗法公式 【1】を用いて，

$$(x\pm\alpha)^3=(x\pm\alpha)(x^2\mp 2\alpha x+\alpha^2)$$

$\boxed{例}$ 3 で，$a=1, b=\pm\alpha, c=1, d=\mp 2\alpha, e=\alpha^2$ とおいて，

$$(x\pm\alpha)(x^2\mp 2\alpha x+\alpha^2)=(ax+b)(cx^2+dx+e)$$

$$=acx^3+(ad+bc)x^2+(ae+bd)x+be=x^3\pm\alpha^3$$

【3】$(x\pm\alpha)(x^2\mp\alpha x+\alpha^2)=x^3\pm\alpha^3$

$\boxed{\textbf{問}}$ **7** 次の式を展開せよ．

$(1)(3x+2y)^2$ $(2)(4x-3a)^2$ $(3)(2x+3)^3$

$(4)\left(x-\dfrac{1}{3}y\right)^3$ $(5)(x-5)(x^2+5x+25)$ ‖

‖ $\boxed{問}$ 7 の答：(1) $9x^2+12xy+4y^2$ (2) $16x^2-24ax+9a^2$ (3) $8x^3+36x^2+54x+27$ (4) $x^3-x^2+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{27}$

★　1 元整式の除法

整数と整式の演算の対応は除法の場合にはどうであろうか．余りのでる割り算，すなわち，商と余りを求める除法を見て行く．

$\boxed{\text{例}}$ **4**　$A = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 9, B = x^2 + 2$ のとき，A を B で割った商と余りを求めよ．

【解】この計算は，$2479 \div 102$ に対応している．

$$
\begin{array}{r}
24 \\
102\overline{)2479} \\
\underline{204} \\
439 \\
\underline{408} \\
31
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{r}
2x + \quad 4 \\
x^2 + 2\overline{)2x^3 + 4x^2 + 7x + 9} \\
\underline{2x^3 \qquad\quad + 4x \quad} \\
4x^2 + 3x + 9 \\
\underline{4x^2 \qquad + 8} \\
3x + 1
\end{array}
$$

これを等式で表せば，

$$2x^3 + 4x^2 + 7x + 9 = (x^2 + 2)(2x + 4) + 3x + 1$$

A, B を用いれば，

$$A = B(2x + 4) + 3x + 1$$

となる．このとき，$2x + 4$ が商，$3x + 1$ が余りである．

整数 $a, b, (b > 0)$ に対し，a を b で割った商が q，余りが r であるとき，

$$a = bq + r, \quad 0 \leqq r < b$$

が成り立つ．

同様に，x についての整式 A, B に対し，A を B で割った商が Q，余りが R であるということは，

$$A = BQ + R, \quad R \text{ の次数} < B \text{ の次数}$$

が成り立つことである．特に，$R = 0$ となるとき，つまり，A が B で割り切れるとき，B を A の**因数**という．

$\boxed{\text{問}}$ **8**　次の計算を行え．また，その結果を $A = BQ + R$ の形に書け．

(1) $(3x^2 + 2x + 1) \div (3x - 1)$　(2) $(2x^3 + 5x^2 - 1) \div (x^2 + 2x - 1)$

(3) $(4x - 5) \div (x + 2)$　(4) $(y^4 - 2y^2 - y + 8) \div (y^2 - y - 2)$**

** $\boxed{\text{問}}$ 8 の答：(1) $(3x - 4)(x + 2) + 9$　(2) $(x^2 + 2x - 1)(2x + 1)$　(3) $(x + 2) \cdot 4 - 1$　(4) $(y^2 - y - 2)(y^2 + y + 1) + 2y + 10$

★ 有理式

例 4 の計算の答は,

$$\frac{2479}{102} = 24\frac{31}{102} \Longleftrightarrow \frac{2x^3+4x^2+7x+9}{x^2+2} = 2x+4+\frac{3x+1}{x^2+2}$$

と表現できる．一般に A を整式，B を 1 次以上の整式とするとき，$\frac{A}{B}$ の形の式を**分数式**といい，整式と分数式を合わせて**有理式**という．A,B が共通の因数を持たないような，A ,B が互いに素な分数式に直しておくことも考えられるが，例えば

$$\frac{2(x-4)}{(x+1)(x-4)} = \frac{2}{x+1}$$

は恒等式ではない．なぜならば，左辺は $x = 4$ については値が定まらないが，右辺は $\frac{2}{4+1} = \frac{2}{5}$ という値となるからである．

(1.4) 式より，有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a} \middle| a,b \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \right\}$$

と表せたが，これに対応して, 有理式の集合 $\mathbb{Q}[x]$ は，整式の集合 $\mathbb{I}[x]$ を使って次のように書ける．

$$\mathbb{Q}[x] = \left\{ \frac{B}{A} \middle| A, B \in \mathbb{Z}[x], A \neq 0 \right\}$$

問 9 分数式の計算は，分数の計算に対応して考えることができる．次の計算をせよ．

(1) $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}$ (2) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1}$

(3) $\frac{x-4}{x+4} \times (x^2+x)$ (4) $\frac{x^2-49}{x^2+2x} \div \frac{x-7}{x+2}$ ††

†† 問 9 の答：(1) $\frac{3x}{(x-2)(x+1)}$ (2) $\frac{1}{x+1}, (x \neq 1)$ (3) $x(x-4), (x \neq -1)$ (4) $\frac{x+7}{x}, (x \neq -2, 7)$