1–2　加法と減法

≪ この項で学ぶこと ≫
[**整数，整数の表記，整式，1 元整式の加法・減法，方程式と恒等式**]

この章はまず**集合**から始めた．何のためにこのような一見とらえどころのないような論理を勉強するのか，その必要性に疑問を持つ人もいるかも知れない．数学を式を計算するための技術と考えてしまうような人にとっては，確かに 1-1 節は不要なものである．しかし，これから学ぼうとしている目標は，以下に述べるようなところにある．

この節から**数**と**式**を対応させながら，数の仲間，式の仲間を増やして行く．（初めは既に知っていることだからといっておろそかにしては，物語の流れを追って行けなくなる．注意をするように．*）各節の段階での数と式の共通点は，同じ構造の算法を持った集合である.」という点にある．

この節に限らず，集合の必要性は初めは小さいものであるが，数学の学習を先に進めれば進めるほど集合を意識することが必要となってくるのである．†

★　整数

前節の $\boxed{例}$ 9 で見たように，2 つの正の整数の和は，また正の整数である． $\mathbb{N}$ は加法について閉じている．しかし，減法については閉じていないことは，かんたんな反例,「2 と 3 は正の整数であるが，$2-3$ は正の整数ではない.」等で明らかである．これを集合の記号で書けば，命題

$$a, b \in \mathbb{N} \Longrightarrow a-b \in \mathbb{N}$$

*学習の目標を知識を増やす事におくために，あらゆるところから情報を得ている現代の学生はこの点で注意力を失うのである.（「生徒」という用語は，私は差別用語に類すると思うので使わない.）

†数学が苦手．と言う人には，分数が分からない.」等，いろいろな段階があるが，ここでは,「算数は得意であったが，代数となってから数学が嫌いになった.」と言う種類の階段を登りそこねる人たちを十分意識してテキストを構成している．教授する側の注意としては，各一般化，抽象化のステージで，あらゆる角度からその意味（ここでの「意味」はセンスに近い”意味”で使っている）を語るのを決して省略してはならないということである．さらに，その「語り方」について．自己顕示欲の強い教師によくありがちなことであるが，学生の程度も考えずに**「群」**とか**「体」**を持ち出してしまうことは禁物である．また，引用好きの教師も，例えばここの場面であれば,「万物は数である.（ピタゴラス)」とか,「代数学と幾何学が別なものであった間は，数学の進歩は遅かった．(ラグランジュ)」といった先人の言葉を持ち出してもむしろ事態をあいまいにする場合があるので, 気を付けなければならない.

は $a > b$ の場合に限って成り立ち，一般には真でない．$a - a = 0$，および，$a < b$ のとき $a - b = -(b - a)$ の書き方をして，0，および，負の整数 $-1, -2, -3, \cdots$ を導入し，減法の定義を拡張する．整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ とおき，

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

とすると，$\mathbb{Z}$ も無限集合である．$\mathbb{Z}$ は加法，減法について閉じている．そして，数を拡張したのであるから，

$$\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$$

である．

ここで述べたことは,「0 と負の整数があった方が何かと便利である.」といったことを，もっと正確に表現しただけのことである．

★　整数の表記

1 つの整数を書き表す方法は，いろいろある．最もよく使われているのが 10 進法である．ここでは，しばらく，0，または，正の整数の場合のみを考える．例えば 365 という数の表し方は，

$$3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5$$

の値を簡略化してそう書いている．このように 1 千未満の数を表す一般的規則は，

$$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$$

を abc と表現することである．ここで $a, b, c \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ とする．また，$a = 0, b \neq 0$ の場合は $0bc$ でなく bc，$a = 0, b = 0$ の場合は $00c$ でなく c と記す約束である．同様に，1 万未満の数の場合には，10^3 の係数から始まる 4 個の数字を並べて表す．$\cdots$，以下，何桁の数でも同じように考えることができる．[‡]

問 1　3 万 9 千 9 百 3 十 5 [†]という書き方も 10 進法の表記法の一種である．ここで使われている「万」,「千」,「百」,「十」を $10^n, (n \in \mathbb{N})$ の形に直せ[‡]

問 2　(1) 1 万未満の数を表す一般的規則を述べよ．

[‡]このいわゆる「インド式記数法」がまずヨーロッパに定着したのは，何よりもルネッサンス期にルカ・パチョーリの提唱した会計簿記に採用され，これが盛んに使われるようになったことによるであろう．

[†]キロメートルをつけると，地球の子午線の長さ．

[‡]問 1 の答：万 $= 10^4$，千 $= 10^3$，百 $= 10^2$，十 $= 10$

(2)（II − 1 − 1 数列を習い終えた学生を対象に.）数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$を用いて,10 進法の表記の一般的規則を述べよ.[§]

コンピューターの中では，電気信号のパルスの山があれば 1，なければ 0 というように，0 と 1 の数字のみ，すなわち 2 進法で数を取り扱っている．例えば，上の例の 365 は，次に示す計算のように 365 を次々と 2 で割ったときに残される余りを終わりから見ることによって，

$$
\begin{array}{rl}
2\,\underline{)365} & \quad \text{余り} \\
2\,\underline{)182} & \cdots 1 \\
2\,\underline{)91} & \cdots 0 \\
2\,\underline{)45} & \cdots 1 \\
2\,\underline{)22} & \cdots 1 \\
2\,\underline{)11} & \cdots 0 \\
2\,\underline{)5} & \cdots 1 \\
2\,\underline{)2} & \cdots 1 \\
2\,\underline{)1} & \cdots 0 \\
0 & \cdots 1
\end{array}
$$

365（10 進法の表記）
$= 1\cdot 2^8 + 0\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1$
$= 101{,}101{,}101$（2 進法の表記）
のように 9 桁もの数字で表されることになる．2 進法はコンピューターにとっては必要なことであっても，人間にとってはたいして大きくない数が大きい桁となってかなりわかりにくいものである．

10 進法や 2 進法以外の数の表記法も用いられている．時間の測り方にはかなり不規則な表記法が慣習化されている．例えば，27 日 7 時間 43 分 15 秒[¶]を秒に直す場合には，

$$27\cdot 24\cdot 60^2 + 7\cdot 60^2 + 43\cdot 60 + 15 = 2{,}360{,}595(\text{秒})$$

としなければならず，不規則であるため，表記法で，日，時，分，秒 の単位を省略して言うことはできない．

ここで，時間の測り方を正確な 60 進法にしてしまうのは，季節などの感覚にあわなくなること以外にも不便なことがある．小学校で習って来た九九に相当する 60 進法の乗法を覚えるのは大変である．10 進法の 81 通りに対して $59\times 59 = 3481$ 通りを覚えておかないと暗算できない．

[§] $\boxed{\text{問}}$ 2 の答：(1) $a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$ を $abcd$ と表現する．ここで $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ とする．また，$a = 0, b \neq 0$ の場合は $0bcd$ でなく bcd，$a = 0, b = 0, c \neq 0$ の場合は $00cd$ でなく cd，$a = 0, b = 0, c = 0$ の場合は $000d$ でなく d と記す約束をする．(2) $a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \cdots a_1\cdot 10 + a_0$ を $a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0, (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\})$

[¶]月の自転周期.

★ 整式

初めにも述べたように，このテキストでは，数は数，式は式で議論を進めずに，並行して話を進めていくことにする．そうすることの目的は，例えば科学の理論を理解するためには，意味が分かって数の計算をするのと同様に，式の計算の意味が分かることが要求されるからである．[‖]

例えば，注文に応じて縦横いろいろな値の長方形の布を 1 平方センチメートル当たり 3 円で売りたい場合，いちいち計算しないですむように，計算機の中にプログラムを入れておくことにする．横 x センチメートル，縦 y センチメートルとして，それには，

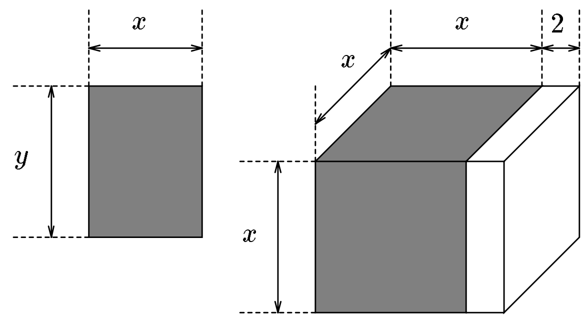

図 1.6: 文字式の例

$$3xy$$

の計算のの答が,「x は?」と「y は?」と問われたときに入力すれば出力されるようにしておけばよい.（図 1.6 の左の図.）

別の例．いろいろな大きさの立方体の家の側面に，同じ高さ，同じ奥行きで，幅 2 メートルの物入れを作ることにする．全体の総体積は，立方体の 1 辺を x メートルとして，

$$x^3 + 2x^2$$

立方メートルである．後で x の値を知り，この式に代入すればよい.（図 1.6 の右の図.）

前項の表記法の例であれば，abc と書かれていたら， 10 進法では,

$$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$$

に等しいが，abc が 10 進法を表すとは限らないとすれば，x 進法として，の 10 の所を x に置き換えた記述

$$ax^2 + bx + c \tag{1.1}$$

（ここでは乗法を表す $\cdot$ を省略して書くことにする.）に等しい．ただし，a,b,c については，x より小さい 0 または正の整数である．

[‖]「今のような形で文字式を使い出したのはデカルトである.」との教科書の記載は多く，それはその通りなのであるが，この表記法が反デカルト主義者とも言えるニュートンのその見事な計算の下書きのも残っている．このことは，10 進法の使用の伝播と文字式の使用の伝播とが時代を超えて何か通底するところを持っていることが考えられる．その何かを，もっと強調すべきである．

またそれほど意味のある式ではないが，試みに, 時間の表記

$$27 \cdot 24 \cdot 60^2 + 7 \cdot 60^2 + 43 \cdot 60 + 15$$

の 24 の所を x，60 の所を y と置き換えた記述を作ってみると，

$$27xy^2 + 24y^2 + 15 \tag{1.2}$$

と表される．ここで，$3xy$,$x^3 + 2x^2$,$ax^2 + bx + c$,$27xy^2 + 24y^2 + 15$ は**整式**と呼ばれる．** 数と文字，および，それらの積の部分 $3xy$,x^3,$2x^2$,ax^2,bx,c,$27xy^2$,$24y^2$,15 などを**項**という．整式はこれらの項の和として表示される記述である．1 つの整式における文字の数を**元**，各項において掛け合わせる文字の数を**次数**，文字以外の部分を**係数**，文字の含まれていない項を**定数項**という．また，1 つの整式の中の最大次数をもってその整式全体の次数と呼ぶ．例えば，(1.1) 式は 1 元 2 次整式，$x^3 + 2x^2$ は 1 元 3 次整式，$3xy$ は 2 元 2 次整式　(1.2) 式は 2 元 3 次整式である．

ここで $ax^2 + bx + c$ について，まだ何も言わなかったのは訳がある．目的によっては，ある文字にのみ着目し，その他の文字は数と同様に係数，あるいは，定数項と見なすように整理することもある．ここでは，文字は x のみに着目し，a,b を係数，c を定数項と考える．このとき，a,b,c はどのような数の集合に属するじゃ，今のところ，数は整数についてしか取り上げられていないが，ここからのこの節（1-2）と次の節（1-3）の議論の中で「数」と言うときは，四則演算について閉じている集合に含まれる一般的要素に拡張できることも念頭においておくとよい．†† 文字 x,y であっても，(1.2) 式を y に着目して，

$$(27x + 7)y^2 + 43y + 15$$

と整理すると， y についての 2 次整式で y^2 の係数は $27x + 7$ と考えることができる．

整式の各項を和の形で並べるとき，数の場合には 365 の 3 と 6 を並べ換えて 635 としたら全く異なる数になってしまうが，$3x^2 + 6x + 5$ を $6x + 3x^2 + 5$ と書いても異なる整式にはならない．しかし，整式をどの文字に着目して次数を考えているかが分かるように，次数の高いものから順に並べておくことが必要である．

$\boxed{\text{問}}$ **1** 次の式を， x, y ，x，y に着目して整理し，それぞれの場合に何次式か，係数，定数項を言え．

(1) $ax + ay + xy + y^2$,　　(2) $2x^3 - 3x^2y^3 + y^4 - 8$ *

** 英語では，polynomial でこの直訳は「多項式」であろうが，テキストの流れからも表題の用語を採用した方が良いと判断した．

†† 「有理数」については次の節に,「実数」については II 極限の数学で習う．

* $\boxed{\text{問}}$ 3 の答：(1) $xy + y^2 + ax + ay$，2 次式，係数：$1, 1, a, a$，定数項：なし．$(y + a)x + y^2 + ay$，1 次式，係数：$y + a$，定数項：$y^2 + ay$，$y^2 + (x + a)y + ax$，2 次式，係数：$1, x + a$，定数項：ax．(2) $-3x^2y^3 + y^4 + 2x^3 - 8$，5 次式，係数：$-3, 1, 2$，定数項：$-8$．$2x^3 - 3y^3x^2y^4 - 8$，3 次式，係数：$2, -3y^3$，定数項：$y^4 - 8$，$y^4 - 3x^2y^3 + 2x^3 - 8$，4 次式，係数：$1, -3x^2$，定数項：$2x^3 - 8$

★ 1 元整式の加法・減法

1 元整式の和，差の規則は，整数の和，差の規則に対応するように組み立てられる．ただし，文字通りは対応しないところもある．

規則を構成する手がかりは，前項で見た 10 進法と x の 1 元整式の似た形にある．例えば，$4x^2+3x+6$ と $2x^2+1$ の和は，係数だけ見て 436 と 201 の同じ次数ごとに足せばよい．ただし，1 元整式の場合は 10 を超える整数も次に高い次数に繰り上がったりはしない．すなわち，加減法とも同じ次数の項ごとに係数の計算をすればよい．

例 1 2 つの整式

$$A=4x^2+3x+6, \qquad B=2x^2+1$$

に対して，$A+B, A-B$ を求めよ．

【解】 これらの計算は次のように，整数の足し算，引き算に部分的には対応している．

$$\begin{array}{rr} & 436 \\ +) & 201 \\ \hline & 637 \end{array} \iff \begin{array}{rrrr} & 4x^2 & +3x & +6 \\ +) & 2x^2 & & +1 \\ \hline & 6x^2 & +3x & +7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 436 \\ -) & 201 \\ \hline & 235 \end{array} \iff \begin{array}{rrrr} & 4x^2 & +3x & +6 \\ -) & 2x^2 & & +1 \\ \hline & 2x^2 & +3x & +5 \end{array}$$

もし，$x=10$ の場合であれば，両方の計算は表記法の違いだけで全く一致する．ただし,「部分的に対応している」と書いてある意味は，この例のように各桁の数とこれに対応する係数の間の足し算，引き算に（例えば $6+5=11$ のような.）繰り上がり，例えば $11-5=6$ のような.）繰り下がりが起こる場合には各桁の数と各次数の係数との間には対応がなくなるからである．その理由は，前々項で述べたように，整数 abc においては，$a, b, c \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ という制限があったのに対して，整式 ax^2+bx+c においては，a, b, c は四則演算の定義されている一般の数，式としてよいからである．小学校の低学年に足し算，引き算を習ったとき，桁の繰り上がり，繰り下がりに頭を使ったはずである．このとき習ったことは，*10* 進法という整数の表記法に関連したことであった．整式の場合には，異なる次数の項の係数は全く独立であって，他の次数の項の係数を変えてしまったりすることはない．

整式の場合には，この各次数の項ごとに「独立に計算する」という特徴を生かして，次のように計算してもよい．

$$\begin{aligned} A+B &= (4x^2+3x+6)+(2x^2+1) \\ &= (4+2)x^2+3x+(6+1) \\ &= 6x^2+3x+7 \\ A-B &= (4x^2+3x+6)-(2x^2+1) \\ &= (4-2)x^2+3x+(6-1) \\ &= 2x^2+3x+5 \end{aligned}$$

例 2 2 つの整式

$$A = 4x^2 - 2x + 4, \qquad B = 7x^2 - 4x - 8$$

に対して，$A + B, A - B$ を求めよ.
【解】

$$\begin{aligned} A + B &= (4x^2 - 2x + 4) + (7x^2 - 4x - 8) \\ &= (4+7)x^2 + (-2-4)x + (4-8) \\ &= 11x^2 - 6x - 4 \\ A - B &= (4x^2 - 2x + 4) - (7x^2 - 4x - 8) \\ &= (4-7)x^2 + (-2+4)x + (4+8) \\ &= -3x^2 + 2x + 12 \end{aligned}$$

問 2 次の整式 A, B について $A + B, A - B$ を求めよ.
(1) $A = x^2 + 1, B = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$
(2) $A = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}, B = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ †

例 3 2 つの整式

$$\begin{aligned} A &= x^2 + (2y-1)x + y^2 - 3y + 2 \\ B &= x^2 + (2y-3)xy^2 - y \end{aligned}$$

のとき，$A + B, A - B$ を求めよ.
【解】 整式の和，差を二重に使う.

$$\begin{aligned} A + B &= \{x^2 + (2y-1)x + y^2 - 3y + 2\} + \{x^2 + (2y-3)xy^2 - y\} \\ &= 2x^2 + \{(2y-1) + (2y-3)\}x + \{(y^2 - 3y + 2) + (y^2 - y)\} \\ &= 2x^2 + \{(2+2)y + (-1-3)\}x + \{(1+1)y^2 + (-3-1)y + 2\} \\ &= 2x^2 + (4y-4)x + 2y^2 - 4y + 2 \\ &= 2\{x^2 + 2(y-1)x + y^2 2y + 1\} \\ A - B &= \{x^2 + (2y-1)x + y^2 - 3y + 2\} - \{x^2 + (2y-3)xy^2 - y\} \\ &= \{(2y-1) - (2y-3)\}x + \{(y^2 - 3y + 2) - (y^2 - y)\} \\ &= \{(2-2)y + (-1+3)\}x + \{(1-1)y^2 + (-3+1)y + 2\} \\ &= 2x - 2y + 2 \\ &= 2(x - y + 1) \end{aligned}$$

最終的な答の形（もっとまとめるか，もっとばらばらにするか）は，その後これを使って何をするかによる.

---

† 問 4 の答：(1) $A + B = 2x^3 + 3x, A - B = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, (2) $A + B = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}, A - B = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$.

$\boxed{\textbf{問}}$ **3**　次の計算をせよ．

(1) $\{x^2+(2y-3)xy^2-y\}+\{2(x-y+1)\}$

(2) $\{x^2+(2y-1)x+y^2-3y+2\}-\{2(x-y+1)\}$*

整係数の 1 元整式の集合を $\mathbb{Z}[x]$ と書くことにする．

$$a,b,c,\cdots\in\mathbb{Z},\quad \mathbb{Z}[x]=\{a,bx+c,dx^2+ex+f,\cdots\}$$

のとき，

$$A,B\in\mathbb{Z}[x]\Longrightarrow A\pm B\in\mathbb{Z}[x]$$

つまり，1 元整式の集合も加法・減法に関して閉じている．すでに述べたように，$\boxed{\text{問}}$ 4 (2) や $\boxed{\text{例}}$ 3 の整式は $a,b,c,\cdots\in\mathbb{Z}$ となっていない．ここでは，整式の係数，定数項の「数」のところが拡張された場合まで含めて学習している．

★　恒等式と方程式

$\boxed{\text{例}}$ 2 で

$$(4x^2-2x+4)+(7x^2-4x-8)=11x^2-6x-4$$

が成り立つということは，文字 x にどんな数を代入してもつねに成り立つという意味である．このような等式†を**恒等式** という．

これに対して，例えば，

$$2x-1=-x+5$$

という等式は，恒等式としては成り立たない．しかし， $x=2$ を代入したとき，右辺と左辺の値はともに 3 であって，一致する．このように着目した文字に適当な値を代入したときに成り立つ等式を，その文字についての**方程式**という．また，等式の中のある文字に着目し式を変形してその文字の値を定めることを，方程式をその文字について**解く**という．

---

* $\boxed{\text{問}}$ 5 の答：(1) $x^2+(2y-1)x+y^2-3y+2$，(2) $x^2+(2y-3)xy^2-y$.

† 今は，整式のみを取り扱っているが，この節の用語は，将来は整式以外にも拡張されて用いられる．