1–3　無限級数

≪ この項で学ぶこと ≫
[**級数，等比級数，実数，いろいろな無限級数**]

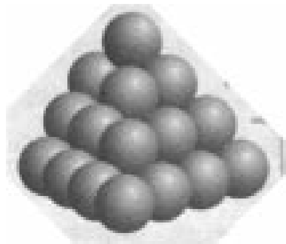


図 1.10: 金属結晶の模型

★　級数

例 **1**　金属の結晶は，図のように同じ大きさの剛体*球を空間内に最も密に詰めたような配列となっている．頂点の 1 個の球（原子）から段を下って，n 段目に並ぶ球の数はいくつであろうか．
1 段目,2 段目,3 段目，$\cdots$ を切り取って，各段を見ると，図の○の部分を順次積み上げげたもので，1，$1+2$，$1+2+3$，$1+2+3+4$，$\cdots$ となっている．さらに，各段の和を求めるために，図のそれぞれに全く同じ形の●の部分を組み合わせたときそれぞれが平行 4 辺形となり，各段の和が数えやすくなる．すなわち，各段の○のみの個数は○と●を合わせた個数の半分であるから，

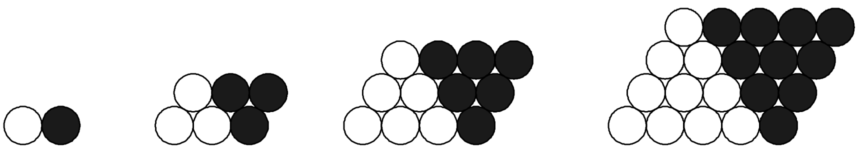


図 1.11: 1∼4 段目まで

$$1=\frac{1\cdot 2}{2},\ 1+2=\frac{2\cdot 3}{2}=3,\ 1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2}=6,\ 1+2+3+4=\frac{4\cdot 5}{2}=10,\ \cdots$$

一般に，上から n 段目の球の個数は $\underline{\underline{\dfrac{n(n+1)}{2}\text{個}}}$ である．

この例での配列の構造は，以下のようになっている．ここで，初項 $a_0=0$ を付け加えて考えることにすると，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$\cdots$，すなわち，0 および正の整数の数列を次々と項数を増やして加えた数列，

$$
\begin{aligned}
&S_0=a_0\\
&S_1=a_0+a_1\\
&S_2=a_0+a_1+a_2\\
&S_3=a_0+a_1+a_2+a_3\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&S_n=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n
\end{aligned}
$$

が，各段の球の個数となっている．この例の数列に限らず，ある数列 $\{a_n\}$ の各項を加えていった式

$$S_n=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

を**有限級数**[†]と呼ぶ．また，$n=0$，1，2，3，$\cdots$ のときの有限級数を各項とする数列 $\{S_n\}$ の極限，すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} S_n=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

を**無限級数**と呼ぶ．

数列 $\{a_n\}$ と級数 S_n の関係を前節 1-1 で習った「階差数列」という表現すると，数列 $\{S_n\}$ の階差数列が数列 $\{a_n\}$ である．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&(S_0=a_0)\\
&S_1-S_0=a_1\\
&S_2-S_1=a_2\\
&S_3-S_2=a_3\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&S_n-S_{n-1}=a_n
\end{aligned}
$$

となる．

$\{a_n\}$ が初項 a_0，公差 d の等差数列

$$a_n=a_0+nd$$

のとき，等差級数 S_n の値を求める場合にも，$\boxed{\text{例}}$ 1 と同じように考える．

$$S_n=a_0+(a_0+d)+(a_0+2d)+\cdots+\{a_0+(n-2)d\}+\{a_0+(n-1)d\}+(a_0+nd)$$

[†]漢字の「級」は階段の意味もある.「数列の和」,「部分和」という用語は使わない.

これは，各段ごとに〇の数が d 個増える階段とみなせる．

項の順序を逆から書いてみると，

$$S_n = (a_0 + nd) + \{a_0 + (n-1)d\} + \{a_0 + (n-2)d\} + \cdots (a_0 + 2d) + (a_0 + d) + a_0$$

これは，ひっくり返した同形の●の階段の相当する．2 つの式を辺々加えることは，平行4 辺形の面積に対応する．すなわち，

$$\begin{aligned} 2S_n &= (2a_0 + nd) + (2a_0 + nd) + (2a_0 + nd) + \cdots + (2a_0 + nd) + (2a_0 + nd) + (2a_0 + nd) \\ &= (n+1)(2a_0 + nd) \end{aligned}$$

初項 a_0，公差 d の等差数列 $a_k = a_0 + kd$ の初項から第 n 項までの和，すなわち，有限等差級数の値は，

$$\sum_{k=0}^{n}(a_0 + kd) = \frac{1}{2}(n+1)(2a_0 + nd) = \frac{1}{2}(n+1)(a_0 + a_n) \tag{1.11}$$

ここで，**和の記号** $\sum$ を導入し，

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{m-1} + a_m$$

と約束する．この記号を用いれば，有限級数は $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ で表される．また，無限級数は，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

と書くことができる．

さらに，p，q を n に無関係な定数とするとき，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を組み合わせた級数に関して

$$\sum_{k=n}^{m}(pa_k + qb_k) = p\sum_{k=n}^{m} a_k + q\sum_{k=n}^{m} b_k$$

が成り立つ．

問 1　有限等差級数の値を，関係式

$$\sum_{k=0}^{n}(a_0 + kd) = a_0\sum_{k\ 0}^{n} 1 + d\sum_{k=0}^{n} k$$

の右辺より求めよ．‡

‡ 問 1 の答：$\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$，$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ より，$\sum_{k=0}^{n}(a_0 + kd) = \frac{1}{2}(n+1)(2a_0 + nd)$

$\boxed{\textbf{例}}$ **2** 碁盤いっぱいに並べた碁石の数は 19^2 個であるが，これを 1-1 節の $\boxed{\text{例}}$ 2 のように，奇数の和の有限級数であるとすると，関係式

$$\sum_{k=0}^{18}(2k+1) = 1+3+5+\cdots+37 = 19^2$$

が成り立つが，このことは有限等差級数の公式

$$\sum_{k=0}^{n}(1+2k) = \frac{1}{2}(n+1)(2\cdot 1+2n) = (n+1)^2$$

からも，$n = 18$ とおいて確かめられる．

$\boxed{\textbf{問}}$ **2** 図のように，碁盤の中央に碁石を置き，順次周囲をかこむように石を並べて行ったときの数列は，初項 $a_0 = 1$ を例外として次の項からは§等差数列となる．この並べ方で碁盤がいっぱいとなったとき碁石の数は 19^2 個となることを，有限等差級数の公式を用いて示せ．

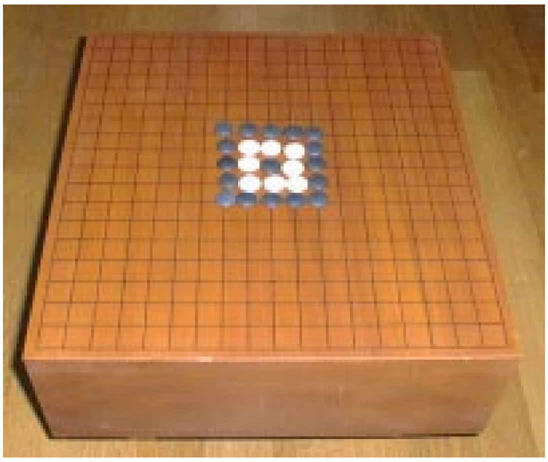


図 1.12: $\boxed{\text{問}}$ 2 の図

$\boxed{\textbf{例}}$ **3** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2 = 0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2$

の値は，次のようにして求められる．

恒等式 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$ に， $k=0$ から $k=n$ を代入して順次並べると，

$$\begin{aligned}
&1^3 - 0^3 = 3\cdot 0^2 + 3\cdot 0 + 1\\
&2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1\\
&3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&(n+1)^3 - n^3 = 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1
\end{aligned}$$

これらの式を辺々加えると，

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - 0^3 &= 3(0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2) + 3(0+1+2+\cdots+n) + n + 1\\
&= 3\sum_{k=0}^{n}k^2 + 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n + 1
\end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{3}(n+1) = \underline{\underline{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}} \tag{1.12}$$

§ $\boxed{\text{問}}$ 2 の答：$1 + 8\sum_{k=0}^{8} = 1 + 360 = 19^2$

問 3　この項の 例 1 で取り上げた原子の配列を n 段としたとき，全原子の数はいくつか．[¶]

問 4　恒等式 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ を用いて，

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 \tag{1.13}$$

を示せ．[‖]

★　等比級数

初項 a_0，公比 r の有限等比級数は，

$$a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^n = \sum_{k=0}^{n} a_0 r^k = a_0 \sum_{k=0}^{n} r^k$$

と，a_0 をくくり出すことができるから，その値を求めるためには，まず，

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

の値を求めて，a_0 倍すればよい．また，$r = 1$ の場合には，容易に求まり，

$$\sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

となるから，以下では，$r \neq 1$ の場合に限って議論する．

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

の両辺に r を掛けると，

$$rS_n = r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1}$$

2 つの式を辺々差し引くと，

$$(1-r)S_n = 1 - r^{n+1}$$

¶ 問 3 の答：$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k\right) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

‖ 問 4 の答：$(n+1)^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 4S_n + 6 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1$ より．

故に

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

初項 a_0，公比 $r(\neq 1)$ の等比数列 $a_k = a_0 r^k$ の初項から第 n 項までの和，すなわち，有限等比級数の値は，$$\sum_{k=0}^{n} a_0 r^k = a_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

(1.14)

問 **5**　次の和を計算せよ．**

$$(1)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k - 1}{3^k} \qquad (2)\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

[参考]

例 **4　原子核の崩壊**

ウランやラジウムのような放射性物質は，放置しておいても自然に放射線を出して崩壊してしまうものがある．放射線は原子の内部にある原子核から放出される．放射線を出した原子核は別種類の原子核に変わってしまうから，元の原子核を持った放射性物質の数はしだいに減少する．私たちが取り扱っている物質中には膨大な数の原子核があるので，原子核の崩壊はつねに一定の確率で起こると考えてよい.「放射能」という用語は，放射性物質が放射線を出す現象または性質という意味で使われることも多いが，正確には，ある物質の中で不安定な原子核が 1 秒間に何個崩壊するかを表わす量である．物質に含まれる原子核の数は直接測定することはできない．ガイガーカウンターなどを用いて測っているのは，この放射能である．

測り始めを 0 秒として，時刻 1 秒までに崩壊した原子核数 (放射能) を a_0，時刻 1 秒から時刻 2 秒までの数を $a_1, \cdots$ とする．任意の n 秒から $n+1$ 秒までの放射能 a_n と，$n+1$ 秒から $n+2$ 秒までの放射能 a_{n+1} との間の減少の割合は一定であることから，a_{n+1} と a_n の比を $r, (0 < r < 1)$ とすると，

$$a_{n+1} = a_n r$$

すなわち，$\{a_n\}$ は等比数列となる．

** 問 5 の答：(1) $\frac{3}{2}\left(1 - \frac{2^{n+1} - 1}{3^{n+1}}\right)$ (2) $\frac{1}{2}\{1 - (-1)^{n+1}\}$

次に，測り始めから時刻 $n+1$ 秒までに崩壊した原子核の総数を S_n とすると，等比級数の公式から

$$S_n = \frac{a_1(1-r^{n+1})}{1-r} \tag{1.15}$$

となる．ここで，測り始めに存在した放射性原子核の数を b_0 個とおくと，

$$a_0 = b_0 - b_0 r = b_0(1-r) \tag{1.16}$$

の関係がある．時刻 n 秒にまだ崩壊しないで残っている放射性原子核の数 b_n 個とすると，数列 $\{b_n\}$ の階差数列にマイナスを付したものが，数列 $\{a_n\}$ となっている．すなわち，

$$b_k - b_{k+1} = a_k$$

の関係があるから, この式を $k=0$ から $k=n$ まで辺々加えると，

$$b_0 - b_{n+1} = \sum_{k=0} na_k$$

右辺に (1.15) の関係を用いて，

$$b_{n+1} = b_0 - S_n = b_0 - \frac{a_0(1-r^{n+1})}{1-r}$$

さらに a_0 に (1.16) の関係を代入して，

$$b_{n+1} = b_0 - b_0(1-r^{n+1}) = b_0 r^{n+1}$$

したがって，$\{b_n\}$ も等比数列

$$b_n = b_0 r^n \tag{1.17}$$

となっていることがわかる．

$n=T$ 秒のとき，放射性原子核の数が始めの半分 $\dfrac{1}{2}b_0$ 個になったとしよう．(1.17) より，

$$b_T = b_0 r^T = \frac{1}{2}b_0$$

$$r^T = \frac{1}{2} \tag{1.18}$$

T のことを**半減期**と呼ぶ．通常よく用いられるの取り扱いは，時刻 n 秒をつねに半減期 T の何倍かで測り，式もこれに基づいて書き換えた式を

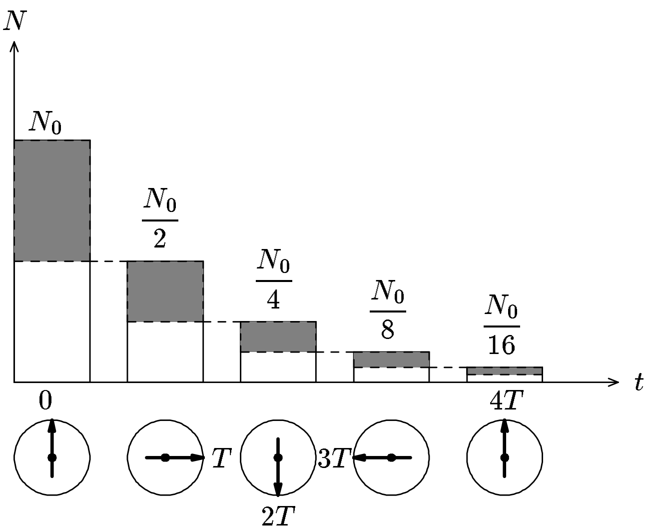


図 1.13: 半減期

用いる．$m = \dfrac{n}{T}$ とおいて，数列 $\{b_n\}$ の中から b_0 と b_T ，それに T の倍数になる項のみをを飛び飛びに選び出し，あらたに数列 $\{N_m\}$ を作る．ただし，

$$N_0 = b_0, \quad N_1 = b_T$$

とする．

$$N_m = b_{mT} = b_0 r^{mT} = N_0 (r^T)^m$$

④ 式を用いると，

$$\boxed{N_m = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^m, \quad (m = 0.1, 2, \cdots)} \tag{1.19}$$

これが物理で用いられる放射性原子核に関する統計法則である．作り方からわかるように，この式は m が 0 または，正の整数以外でも，測定した時間間隔（ここでは，仮に 1 秒とした）ごとに成り立つ．

等差級数など，その値が n の整式となっているような有限級数の極限であるような無限級数は発散する．一方，無限等比級数は，$|r| < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ であるから，

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = \frac{a_0}{1-r} - \frac{a_0}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \frac{a_0}{1-r}$$

> 初項 a_0，公比 $r (\neq 1)$ の無限等比級数は，
> $|r| < 1$ のときに限り収束し，その値は，
> $$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = \frac{a_0}{1-r}$$ (1.20)

問 6　初項 $a_0 = 1$ の無限等比級数のうち，次の値となるものを求めよ．

(1) 2　　(2) 100　　(3) $\dfrac{2}{3}$ [††]

★　実数

以下では，正の数のみを取り扱うが，すべての結論は負の数についてもあてはまることは，議論を少し修正すればわかるであろう．

[††] 問 6 の答：それぞれ，公比 (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{99}{100}$　(3) $-\dfrac{1}{2}$ の等比級数

IA-1-3 の個所において，$a(\neq 0)$ が b の約数である場合，分数 $x=\dfrac{b}{a}$ で表せる数として**有理数**を導入した．一方，整数の 10 進法表記

$$a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a0 = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \cdots a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10 + a_0$$

の拡張として，

$$\begin{aligned} b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots &= b_0+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{100}+\cdots+\frac{b_n}{1\underbrace{0\cdots0}_{n\text{ 個}}}+\cdots \\ &= b_0+b_1\cdot 10^{-1}+b_2\cdot 10^{-2}+\cdots+b_n\cdot 10^{-n}+\cdots \end{aligned}$$

ただし，$b_0 = a_m a_{m-1}\cdots a_2 a_1 a_0$ のような整数部分をまとめたものであり，$b_k, (k = 1,\ 2,\ \cdots)$ は 10 未満の正の整数である．上の式のように，数を小数で表すとき，例えば 0.125 のように，$\{b_n\}$ が有限数列となる**有限小数**と，例えば 3.1415926$\cdots$ のように，$\{b_n\}$ が無限数列となる**無限小数**とがある．

そのうち，有限小数は，例えば，

$$0.125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8},\qquad 27.32=\frac{2732}{100}=\frac{683}{25}$$

のように，必ず分数で表せるので有理数である．

一方，無限小数のうち，小数点以下のある位から先の数字が一定の順序でくりかえされる場合を**循環小数**と呼ぶ．循環小数は，例えば $3.33\cdots=3.\dot{3}$，$1.2345345\cdots=1.2\dot{3}4\cdot 5$ のように，循環する部分を $\dot{\square}$，あるいは，$\dot{\square}\square\cdots\square\dot{\square}$ で表す．

例 5　次の循環小数を分数で表せ．

(1) $3.\dot{3}$　　(2) $0.\dot{4}2857\dot{1}$

【解】(1) 次のように分解する．

$$\begin{aligned} 3.\dot{3} &= 3.333\cdots \\ &= 3+0.3+0.03+0.003+\cdots \\ &= 3+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots = 3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k \end{aligned}$$

これは初項 3，公比 $\dfrac{1}{10}$ の無限等比級数であるから収束し，その極限値は

$$3.\dot{3}=3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 3\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{3}$$

(2) 同様に，

$$\begin{aligned} 0.\dot{4}2857\dot{1} &= 0.428571+0.000000428571+0.000000000000428571\cdots \\ &= \frac{428571}{10^6}+\frac{428571}{10^{12}}+\frac{428571}{10^{18}}+\cdots=\frac{428571}{10^6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^6}\right)^k \end{aligned}$$

これは初項 $\dfrac{428571}{10^6}$，公比 $\dfrac{1}{10^6}$ の無限等比級数であるから収束するから，

$$0.\dot{4}2857\dot{1} = \frac{428571}{10^6}\frac{1}{1-\frac{1}{10^6}} = \frac{4228571}{999999} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$$

$\boxed{\text{問}}$ **7**　次の循環小数を分数で表せ．

(1) $0.\dot{1}$　(2) $0.\dot{9}$　(3) $0.\dot{1}\dot{2}$　(4) $4.3\dot{2}\dot{1}$ †

$\boxed{\text{問}}$ **8**　$0.\dot{1}4285\dot{7} = \dfrac{1}{7}$ を示し，次の関係式を用いて $\dfrac{3}{7}$, $\dfrac{2}{7}$, $\dfrac{6}{7}$, $\dfrac{4}{7}$, $\dfrac{5}{7}$ を循環小数で表せ．

(1) $\dfrac{3}{7} = 10 \times \dfrac{1}{7} - 1$　(2) $\dfrac{2}{7} = 10 \times \dfrac{3}{7} - 4$　(3) $\dfrac{6}{7} = 10 \times \dfrac{2}{7} - 2$

(4) $\dfrac{4}{7} = 10 \times \dfrac{6}{7} - 8$　(5) $\dfrac{5}{7} = 10 \times \dfrac{4}{7} - 5$

‡

循環しない無限小数は，分数では表せないから，有理数ではない．このような数を**無理数**と呼ぶ．また，有理数と無理数を合わせたものを**実数**と呼ぶ．

$$\text{実数}\left\{\begin{array}{l} \text{有理数}\left\{\begin{array}{l} \text{整数}\left\{\begin{array}{l}\text{正の整数（自然数）}\\ 0 \\ \text{負の整数}\end{array}\right. \\ \text{整数でない有理数（既約分数）}\cdots\left\{\begin{array}{l}\text{有限小数}\\ \text{循環小数}\end{array}\right.\end{array}\right. \\ \text{無理数}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\text{循環しない小数}\end{array}\right.$$

実数は直線上に原点 O をとり，単位の長さ 1 を定めたときの直線上の点の座標に対応する．

$\boxed{\text{例}}$ **6**　2 等辺 3 角形でない方の 3 角定規の 3 角形の最短辺の長さを 1 とおくと，次に短い辺の長さが $\sqrt{3}$ となることはよく知られているが，作図を利用してこの長さを小数で表す操作を試みる．

まず，$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{3}$ を数直線 OX 上に作図する．不等式

$$1 < \sqrt{3} < 2$$

が成り立つことは，各辺を 2 乗した不等式

---

† $\boxed{\text{問}}$ 7 の答：(1) $\dfrac{1}{9}$ (2) $\dfrac{9}{9} = 1$ (3) $\dfrac{12}{99} = \dfrac{4}{33}$ (4) $\dfrac{4321}{990}$

‡ $\boxed{\text{問}}$ 8 の答：(1) $0.\dot{4}2857\dot{1}$ (2) $0.\dot{2}8571\dot{4}$ (3) $0.\dot{8}5714\dot{2}$ (4) $0.\dot{5}7142\dot{8}$ (5) $0.\dot{7}1428\dot{5}$

$$1 < 3 < 4$$

から明らかであるから，点 P は座標 1 の点 A と座標 2 の点 B の間にある．次に，10 等分の目盛がある線分 AC を用意して，A を頂点とした ∠BAC をつくり，AC 上の各目盛の点から BC に平行な直線を引くことによって，点 P は 7 目盛目と 8 目盛目の間に位置することがわかるから，不等式

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

が成り立つことが判明する．この式も各辺を 2 乗した不等式

$$1.4^2 = 2.89 < 3 < 1.8^2 = 3.24$$

によっても確かめられる．

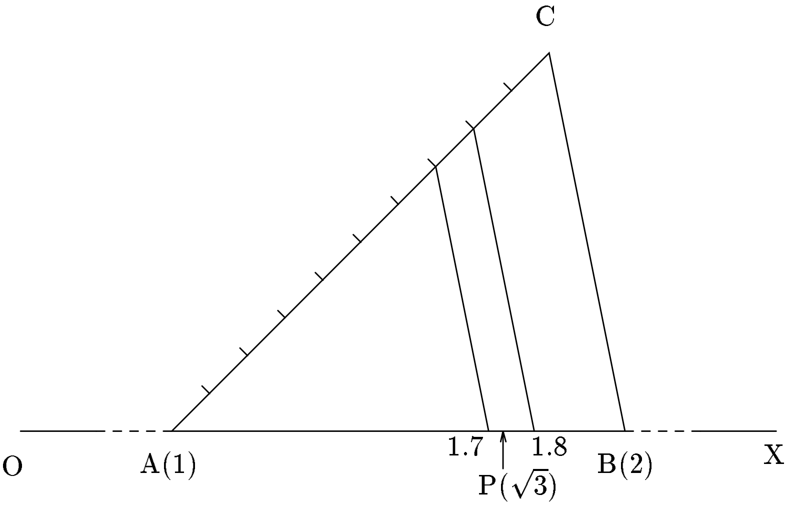


図 1.14: 例 5 の図．その 1

さらに，点 P は座標 1.7 の点 A_1 と座標 1.8 の点 B_1 の間にあるから，AC と同様に 10 等分の目盛がある線分 A_1C_1 を用意して，A_1 を頂点とした $\angle B_1A_1C_1$ をつくる．A_1C_1 上の各目盛の点から B_1C_1 に平行な直線を引くと，今度は

$$1.73 < \sqrt{3} < 1.74, \ (1.73^2 = 2.9929 < 3 < 1.74^2 = 3.0276)$$

の不等式が成り立っていることがわかる．

以下，同様な手順をくりかえすと，

$$\sqrt{3} = 1.73\cdots$$

が必要な桁数まで得られる．

IA-1-3 p.24 では $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ が有理数でないことを証明しているが，$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ についても全く同様に分数で表せないことが証明できる．つまり，$\sqrt{3}$ は循環しない無限小数であって，この作図の手順は，鉛筆で描ける限り，いつまでも続く．

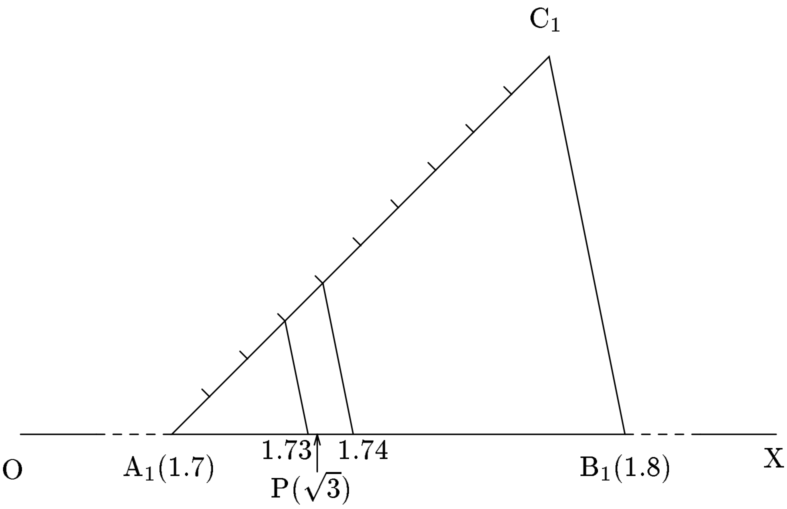


図 1.15: 例 5 の図．その 2

問 9　無限級数 $S = \sqrt{2}$ を考える．

(1) $S_0 = a_0$ とおいたとき，

$$a_0^2 < 2 < (a_0+1)^2$$

を満たす整数 a_0 を求めよ．
(2) 次に，$S_1 = a_0 + \dfrac{a_1}{10}$ とおくとき，

$$\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)^2 < 2 < \left(a_0 + \frac{a_1+1}{10}\right)^2$$

を満たす整数 a_1 を求めよ．
(3) さらに，$S_2 = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2}$ とおくとき，

$$\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}\right)^2 < 2 < \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2}\right)^2$$

を満たす整数 a_2 を求めよ．

この操作によって，$\sqrt{2} = a_0.a_1a_2$ のように表して，$\sqrt{2}$ を小数点以下 2 桁まで求めることができる．[§]

$\boxed{\text{問}}$ **10**　1.21^3，1.22^3，$\cdots$，1.29^3 の数表を作ることによって，$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ の値を小数点以下 *2* 桁まで求めよ．[¶]

一般に，実数 S は無限小数を含む小数

$$S = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

と表記され, 初項 a_0 を整数，$k \neq 0$ の項 a_k を 10 未満の正の整数とした，無限級数

$$S = a_0 + a_1\cdot 10^{-1} + a_2\cdot 10^{-2} + \cdots + a_n\cdot 10^{-n} + \cdots$$

によって定められる数である．S は有限級数

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_0\\
S_1 &= a_0 + a_1\cdot 10^{-1}\\
S_2 &= a_0 + a_1\cdot 10^{-1} + a_2\cdot 10^{-2}\\
\cdots & \quad \cdots\\
S_n &= a_0 + a_1\cdot 10^{-1} + a_2\cdot 10^{-2} + \cdots + a_n\cdot 10^{-n}
\end{aligned}$$

の数列 $\{S_n\}$ の極限

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

である．II-1-2 p.26【1】～【3】に示したように，収束する数列の和，差，積，商の極限が，それぞれの極限の和，差，積，商に等しいので，2 つの実数 $S = \lim_{n\to\infty} S_n$，$T = \lim_{n\to\infty} T_n$ の間には，今まで有理数の間で成り立っていた四則演算が実数においても保証される．

[§] $\boxed{\text{問}}$ 9 の答：(1)$a_0 = 1$ (2) $a_1 = 4$ (3) $a_2 = 1$
[¶] $\boxed{\text{問}}$ 10 の答：$\sqrt[3]{2} = 1.25$

★　いろいろな無限級数

‖

例 7　次の無限級数の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$\displaystyle=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}+\cdots$

【解】(1)　$\displaystyle\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$ となることを利用して，まず，$k=n$ までの和を求める．

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+2}$$

したがって，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=\underline{\underline{1}}$$

2 (2) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$ となることを利用して，まず，$k=n$ までの和を求める．

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$$

$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+2})$$

$$=\sqrt{n+2}-1$$

‖交代級数には立ち入らないことにする．

したがって，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-1)=\underline{\underline{+\infty}}$$

つまり，この無限級数は発散する．

問 **11** 次の無限級数の値を求めよ．

$$\text{(1)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+4k+3}\qquad \text{(2)}\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})}$$

**

有限級数の値を求めることが難しい場合にその無限級数の収束，発散を調べるには，不等式を用いるとよい．

2 つの数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ があって，

$$0\leqq a_0\leqq b_0,\ 0\leqq a_1\leqq b_1,\ 0\leqq a_2\leqq b_2,\cdots 0\leqq a_n\leqq b_n,\ \cdots$$

が成り立つとする．これらの式を辺々加えると，

$$0\leqq\sum_{k=0}^{\infty}a_k\leqq\sum_{k=0}^{\infty}b_k$$

この大小関係から判断して，

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}b_k\text{: 収束}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{k=0}^{\infty}a_k\text{: 収束}\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_k\text{: 発散}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{k=0}^{\infty}b_k\text{: 発散}\end{cases}$$

例 **8** 次の無限級数は収束するか，発散するか．

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$

ただし，$0!=1$，$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$ とする．

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}(k+1)!(k+2)!}{(2k+3)!}=\frac{1\cdot2}{1\cdot3}+\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\cdots$

【解】(1) $0<\dfrac{1}{k!}\leqq\dfrac{1}{2^k}$ の関係を用いる．

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$$

** 問 11 の答：(1) 1 (2) 1

右辺は

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=1+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

右辺第 2 項は公比 $\frac{1}{2}$ の等比級数だから収束し，$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ となる.

$$0<\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}<1+2$$

すなわち，$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ は，3 未満の正の値に収束する.

(2) まず，第 n 項までを考える.

$$\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}\leqq\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}=1\frac{2}{2^1}$$

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}<\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 4}=\frac{3}{2^2}$$

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}<\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6}=\frac{4}{2^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+3)}<\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n+2)}{1\cdot 2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n+2)}=\frac{n+2}{2^{n+1}}$$

右辺の和は,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k+2}{2^{k+1}}=3-\frac{n+4}{2^{n+1}} \tag{1.21}$$

となる. (1.21) 式の証明は後で行う.

右辺の第 2 項の極限は,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{2^{n+1}}=0 \tag{1.22}$$

(1.22) 式の証明も後で行う..

(1.21), (1.22) を用いれば,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}(k+1)!(k+2)!}{(2k+3)!}<3$$

この無限級数も 3 未満の正の値に収束する．

【(1.21) の証明】IB-1-3 で習う数学的帰納法を用いて証明する．

1° (1.21) 式の右辺に $n=1$ を代入すると，

$$3-\frac{1+4}{2^{1+1}}=3-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}=\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}$$

で，(1.21) 式は $n=1$ のとき成り立つ．(もちろん，$n=0$ も成り立つ．)

2° (1.21) 式が，$n=m-1$ のとき成り立つ．すなわち，

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k+2}{2^{k+1}}=3-\frac{m+3}{2^m}$$

が成り立つと仮定する．両辺に $\dfrac{m+2}{2^{m+1}}$ を加えると，

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k+2}{2^{k+1}}+\frac{n+2}{2^{m+1}}=3-\frac{m+3}{2^m}+\frac{m+2}{2^{m+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{k+2}{2^{k+1}}=3-\frac{2(m+3)-(m+2)}{2^{m+1}}=3-\frac{m+4}{2^{m+1}}$$

故に，(1.21) 式は $n=m$ のときも成り立つ．よって，(1.21) 式は n が 0 および自然数のとき成り立つ．

【(1.22) の証明】$a_n=\dfrac{n+4}{2^{n+1}}$ とおくと，

$$0<\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{1}{2}\frac{k+5}{k+4}<\frac{5}{8}$$

$k=0$ から $k=n-1$ を代入した式を掛け合わせると，

$$0<\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_1}{a_0}=\frac{a_n}{a_0}<\left(\frac{5}{8}\right)^n$$

最右辺の極限は，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n=0$$

だから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

$\boxed{\text{例}}$ 7 の極限値は，いずれも無理数であって，

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e=2.71828\cdots$

は**オイラー定数**と呼ばれ，

(2) $\displaystyle 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}(k+1)!(k+2)!}{(2k+3)!}=\pi=3.14159\cdots$

は**円周率**であり，π には，別のいろいろな級数展開もある．

問 12　次の無限級数は収束するか，発散するか．

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$

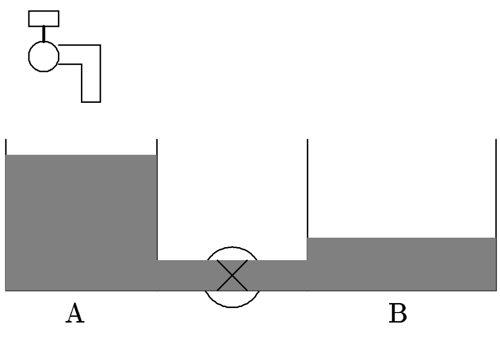
(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$ [††]

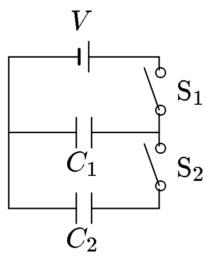
[††] 問 12 の答：(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$, $\cdots$ 発散　(2) $0<\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}$ を使う．収束

トレーニング

$\boxed{1}$ 十分高いところから，物体を時刻 $t=0$ のとき初速 0 で落下させる．重力加速度を g とする．以下，速度，加速度は鉛直下向きを正と約束する．
(1) 時刻 $t=T,\ 2T,\ 3T,\ 4T,\ \cdots$ と，T の時間間隔で，物体を $\frac{1}{2}gT$ だけ減速させる．（物体の質量を m として，$-\frac{1}{2}mgt$ の力積を加える．）時刻 $t=nT$ のときの物体の速度 v_n と，出発点からの落下距離 x_n を求めよ．ただし n は自然数である．
(2) 今度は，時刻 $t=T,\ 3T,\ 6T,\ 10T,\ \cdots$ のときに，同じ力積を加えた．時刻 $t=\frac{1}{2}n(n+1)T$ のときの物体の速度 V_n と，出発点からの落下距離 X_n を求めよ．†

$\boxed{2}$ 右図のように，細い管でコックの付いた連結したの水槽 A, B がある．A，B の深さはともに V で，底面積 $C_1,\ C_2$ とする． A の上には水道の蛇口があり，次の一連の操作を何回も繰り返した．ただし，A, B は最初は空だったとする．
操作 I. コックを閉じ，水道の蛇口を開いて A をいっぱいにする．
操作 II. 次に，蛇口を閉じて，コックを開く．
(1) n 回目の操作終了後の水槽に入った水の底面からの高さを V_n とする．V_n と V_{n+1} の関係を式で表せ．
(2) $C_1=C_2$ の場合，前問 (1) の漸化式から，n 回この操作が終わったときの水槽 B の高さ V_n を V で表せ．
(3) 何回もこの操作を繰り返していると，水槽 B から水があふれ出すことがあるか．‡
この問題は，次の回路図のように，容量 $C_1,\ C_2$ の 2 つのコンデンサーをスイッチで切り替えながら起電力 V_0 の電池で充電するのと同じことである．





† $\boxed{1}$ の答：(1) $v_k-(v_{k-1}+gT)=-\frac{1}{2}gT$, $v_n=\frac{1}{2}ngT$, $x_k=x_{k-1}+v_{k-1}T+\frac{1}{2}gT^2$, $x_n=\frac{1}{2}n^2gT^2$, (2) $V_k-(V_{k-1}+kgT)=-\frac{1}{2}gT$, $V_n=\frac{1}{2}n^2gT$, $X_k=X_{k-1}+V_{k-1}kT+\frac{1}{2}g(kT)^2$, $X_n=\frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(3n+2)gT^2$

‡ $\boxed{2}$ の答：(1) $(C_2+C_2)V_{n+1}=C_1V+C_2V_n$ (2) $V_n=\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}V$. (3) $\lim_{n\to\infty}=V$ だから，十分時間がたつと，B は縁まで水が来るがあふれることはない．

第2章 関数の極限(次の分冊.指数関数を含む.)