# 1–2　数列の極限

≪ この項で学ぶこと ≫
[**不等式，収束する数列，発散する数列，等比数列の極限，極限の計算**]

## ★　不等式

いくつかの自然数は，これらを順序立てて並べることが極めて簡単な例であり，直線上の点，線分の長さの大小なども，すぐに順序づけができる．一般の数の順序づけ，つまり，大小関係は，数を小数で表せばすぐに分かるが，話を数学的対象に限っても，I-A-2 で習う複素数や，I-3 で学ぶベクトルのように，順序づけができないものもある．ここでは，次の節で習う実数のことはまだ考えずに，有理数と文字を有理数と考えているときの式についての大小関係の取り扱いを調べて行く．[*]

初めに，不等号の約束：2 つの数 $a$, $b$ に対して,「$a$ **が** $b$ **を超えない**」とき，$a \leqq b$（または，$b \geqq a$）と書き，特に，$m \leqq n$ かつ　$a \neq b$ の場合,「$a$ **は** $b$ **よりも小さい**」と言い，$a < b$，あるいは,「$b$ **は** $a$ **よりも大きい**」と言い，$a > b$ と書く．不等号を含む式が不等式である．

定義からすぐに，

$$a \leqq b,\ b \leqq c \Longrightarrow a \leqq c$$

という性質が出て来る．[†] この関係を，$a \leqq b \leqq c$ のように書いてもよい．

$\boxed{\textbf{問}}$ **1**　①, ②, ③のうち，成り立たない式をあげよ．

① $2 \leqq 3$　② $2 \leqq 2$　③ $3 \leqq 2$[‡]

$\boxed{\textbf{問}}$ **2**　① → ④の条件のうち,$a < c$ の結論が導けるものをあげよ．

① $a \leqq b$かつ $b < c$　② $a \leqq b$かつ $b = c$　③ $a < b$かつ $b < c$　④ $a < b$かつ $b = c$ [§]

---

[*]実数不等式について以下の基本的性質が成り立つことは，本講座では実数を無限級数として導入するので，極限を習った後で言及する．

[†]推移律

[‡]$\boxed{\text{問}}$ 1 の答：(c)．(b) は正しい．

[§]$\boxed{\text{問}}$ 2 の答：①,③,④

　不等式の基本法則は次の通りである．[¶]

【1】2 数 $a$, $b$ について，次の ①, ②, ③ の関係のうち，どれか 1 つだけが成り立つ．[‖]

$$① \ a < b, \quad ② \ a = b \quad ③ \ a > b$$

【2】同じ数を，不等式の両辺に加えてもよい．

$$a \leqq b \Longrightarrow a + c \leqq b + c$$

　$c$ は負の数でもよいから，もちろん,「同じ数を，不等式の両辺から引いてもよい.」また，$a \neq b \Longrightarrow a + c \neq b + c$ であるから，

$$a < b, \ c > 0 \Longrightarrow a + c < b + c$$

の規則も成り立つ．

【3】正の同じ数を，不等式の両辺に掛けてもよい．

$$a \leqq b, \ c > 0 \Longrightarrow ac \leqq bc$$

　$d < 0$ の場合，$a \leqq b, \ -d > 0 \Longrightarrow -ad \leqq -bd$．両辺に，$ad + bd$ を加えれば，$bd \leqq ad$ となるから，

$$a \leqq b, \ d < 0 \Longrightarrow ad \geqq bd$$

にも注意するように．

　$c$ は $c = \dfrac{1}{d}$ の形の分数を含むから，この場合，右辺の結論は $\dfrac{a}{d} \leqq \dfrac{b}{d}$，すなわち,「正の同じ数で，不等式の両辺を割ってもよい.」また，$a \neq b \Longrightarrow ac \neq bc$ であるから，

$$a < b \Longrightarrow ac < bc$$

の規則も成り立つ．

　基本法則【2】,【3】より，等式の場合，例えば，$a + b = c \Longleftrightarrow a = c - b$, $b \neq 0$ のとき $ab = c \Longleftrightarrow a = \dfrac{c}{b}$ のように演算の際，移項することができたように，不等式の場合も，$a + b \neq c \Longleftrightarrow a \neq c - b$, $b > 0$ のとき $ab \geqq c \Longleftrightarrow a \geqq \dfrac{c}{b}$ 等の**不等式の場合の移項**が可能である．

　また，等式 $a = b$, $a' = b'$ について，辺々和をとった等式：$a + a' = b + b'$，積をとった等式：$aa' = bb'$ が成り立つと同様に，不等式　$a \geqq b$, $a' \geqq b'$ をについて，辺々和をとった不等式：$a + a' \geqq b + b'$，$a > 0$, $b > 0$, $a' > 0$, $b' > 0$ のとき，積をとった不等式：$aa' \geqq bb'$

[¶]証明は，もし話題とするなら，I-B-1-3 節の学習後にやる．以下，$\boxed{例}$ 1, $\boxed{例}$ 2 等の証明も証明法の学習前には深入りしない．

[‖]3 分律

が成り立つ．これらの証明は，$a+a' \geqq b+a' \geqq b+b'$，あるいは，$aa' \geqq ba' \geqq bb'$（基本法則【2】,【3】より.）と考えればよい.

**例** **1** 次の不等式を証明せよ.

(1) $a \leqq b \Longleftrightarrow a-b \leqq 0$ を示せ.
(2) $a>0,\ b>0$，または，$a<0,\ b<0 \Longleftrightarrow \quad ab>0$
(3) $a>0,\ b>0$ のとき，$a \geqq b \Longleftrightarrow a^2 \geqq b^2$

【証明】(1)　基本法則【2】$a \leqq b \Longrightarrow a+c \leqq b+c$ において $c=-b$ とおくと，$a-b \leqq 0$ となる．逆に，$a-b \leqq 0$ の両辺に $b$ を加えると，$a \leqq b$ となる.

これは単に，$a \leqq b$　において，$b$ を左辺から右辺に移項して得られる.

【証明】(2) $a>0,\ b>0$ のとき，$a>0$ の両辺に $b$ を掛けると $ab>0$.

$a<0,\ b<0$ のとき，$a'=-a,\ b'=-b$ とおくと，$a'>0,\ b'>0 \Longrightarrow a'b'>0$. $a'b'=(-a)(-b)=ab$ だから，$ab>0$.

逆に，$a>0$ のとき，$ab>0$ の両辺を $a$ で割ると，$b>0$. $a<0$ のとき，$ab>0$ の両辺を $-a$ で割ると，$-b>0$．すなわち，$b<0$.

【証明】(3) $a \geqq b$ の両辺に $a$ を掛けてた不等式 $a^2 \geqq ab$ が成り立つ.（不等式の基本法則【3】より.）

同様に，$a \geqq b$ の両辺に $b$ を掛けてた不等式 $ab \geqq b^2$ が成り立つ．したがって，$a^2 \geqq ab \geqq b^2$, $\therefore a^2 \geqq b^2$.

逆に，$a^2 \geqq b^2$ を移項して，$a^2-b^2 \geqq 0$. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ より，$(a-b)(a+b) \geqq 0$. $a>0,\ b>0$ より，$a+b>0$. $(a-b)(a+b) \geqq 0$　の両辺を $a+b$ で割ると，$a-b \geqq 0$, $\therefore a \geqq b$.

これは単に，$a \leqq b$ と同じ不等式 $a \leqq b$　の積を辺々とっても得られる.

**問** **3** (1) $a^2 \geqq 0$ となるのは $a$ がどんな場合か．特に，$a^2=0$ となるのは $a$ がどんな場合か.

(2) 距離 $r$ 離れている電荷 $q,\ Q$ を帯びた点状の 2 物体間には静電気力 $F$ が働く．$F$ は電荷の正負の組み合わせによって引力の場合と，斥力の場合とあり，$F<0$ は引力，$F>0$ は斥力を表すと約束し，$k$ を正の定数とすると，

$$F=k\frac{qQ}{r^2}$$

と表される.

この式から，電荷の符号と引力・斥力の関係を述べよ.

(3)(a) $y=(x-a)^2+b$ が最小となる $x$ を求め，$y$ の最小値を言え.

(b) $z=(x-a)^2+(y-b)^2+c$ が最小となる $x$, $y$ を求め，$z$ の最小値を言え．**

例 1 (1) の関係は，$a$, $b$ の大小判定に使える．すなわち，

$$\boxed{a \leqq b \Longleftrightarrow a-b \leqq 0 \quad a \geqq b \Longleftrightarrow a-b \geqq 0} \tag{1.3}$$

ある数 $a$ の**絶対値** $|a|$ を

$$\boxed{\begin{cases} a \geqq 0 \quad \text{のとき} \quad |a| = a \\ a < 0 \quad \text{のとき} \quad |a| = -a \end{cases}} \tag{1.4}$$

と定義する．

**例 2**　次の不等式を証明せよ．*

$$|a+b| \leqq |a|+|b| \tag{1.5}$$

【証明】$A^2 \leqq B^2 \Longrightarrow A \leqq B$ を用いる．

$$(|a|+|b|)^2 = |a|^2 2|a||b| + |b|^2 = a^2 + 2|a||b| + b^2$$

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

これより，

$$|a+b|^2 - (|a|+|b|)^2 = 2(ab - |ab|)$$

$ab \leqq |ab|$ だから，$|a+b|^2 - (|a|+|b|)^2 \leqq 0$ したがって，$|a+b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$

$$\therefore \ |a+b| \leqq |a|+|b|$$

**問 4** 次の不等式を証明せよ．†

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqq |ab| \tag{1.6}$$

---

** 問 3 の答：(1) $a$ 任意の (実) 数．$a^2=0 \Longleftrightarrow a=0$　(2) $qQ<0$ すなわち，異符号の場合，引力．$qQ<0$ すなわち，同符号の場合，斥力．$q=0$ または $Q=0$ のとき，$F=0$ すなわち，静電気力は働かない．(3)(a) $x=a$ のとき，最小値 $y=b$．

(b) $x=a, y=b$ のとき，最小値 $z=c$．$A^2=0 \Longleftrightarrow A=0$，$A^2+B^2=0 \Longleftrightarrow A=0$ かつ $B=0$ の応用．

*3 角不等式と呼ばれるが，ベクトル，複素数のときでなければ，その意味はない．

† 問 4 の答：$\dfrac{a^2+b^2}{2} - |ab| = \dfrac{1}{2}\{|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2\} = \dfrac{1}{2}(|a|-|b|)^2 \geqq 0$．$a^2$ と $b^2$ の相加平均と相乗平均との関係．

$\boxed{\text{例}}$ 2 で証明した不等式は，文字 $a$，$b\cdots$ にどんな数を代入してもつねに成り立つ．このような不等式を**絶対不等式**と呼ぶ.

これに対して，例えば，

$$2x - 1 \geqq -x - 5$$

という不等式は，$x$ が $x \geqq 3$ を満たす数については成り立つが，$x < 3$ を満たす数については成り立たない．この関係は，I-A-1.2 で学んだ恒等式と方程式の関係に対応している．

$\boxed{\textbf{問}}$ **5**　次の不等式を解け.

(1) $x - 2 \leqq 5x + 6$　(2) $|x - 1| \geqq 2$[‡]

## ★　収束する数列

$\boxed{\textbf{例}}$ **3**　1-1 の $\boxed{\text{例}}$ 5 の数列を横軸に項番号 $n$，縦軸に項の値 $a_n$ をとると，下図のようになる．$n$ が大きくなると，$a_n$ はしだいに 0 に近づいていることが分かる.

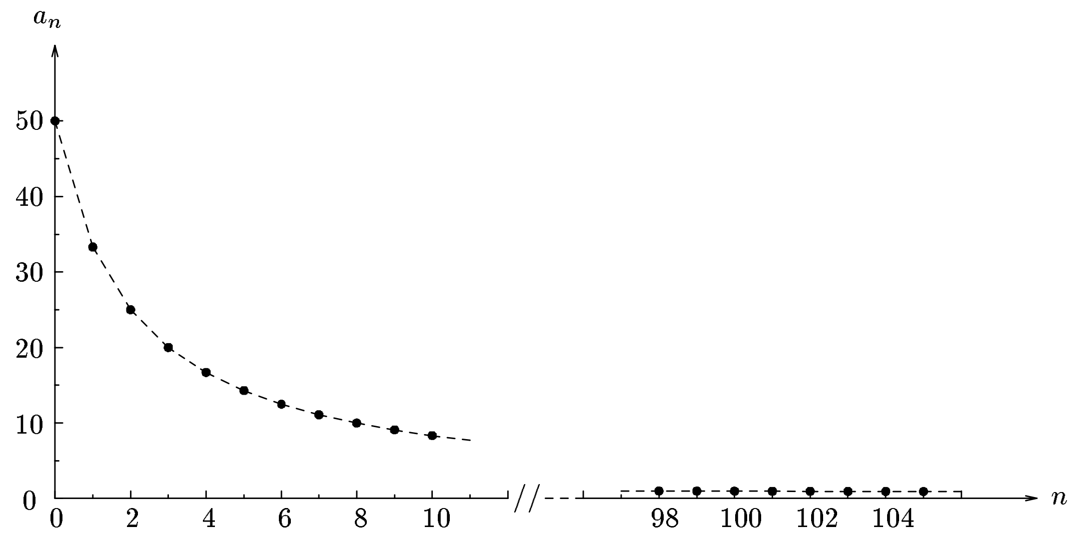



図 1.4: $\boxed{\text{例}}$ 3 の図

ここで，「100 kg の砂糖を何人かで分ける.」という元の目的から考えてみよう．化学天秤を用いれば，0.1 mg，すなわち，$\dfrac{1}{10,000,000}$ kg[§]まで測ることができるから，砂糖を 10

‡ $\boxed{\text{問}}$ 5 の答：(1) $x \geqq -2$　(2) $x \leqq -2$ または $x \geqq 3$

§ I-A-1-3 の指数法則を習った後ならば，$10^{-7}$ kg で教える.

億人（$10^9$ 人）に分けることは可能であるが，食用とすれば意味をなさない．それでも分けるとしても，砂糖 1 分子の質量は，約 10 兆の 1 兆倍分の 6 kg（$5.68\times10^{-25}$ kg）であるから，1 人分の量が計算上それ以下の質量になるとしたら,「砂糖を分ける」ことにはならない．

1-1 の $\boxed{\text{例}}$ 5 の数列は，各項が正であって，

$$\frac{100}{2} \geqq \frac{100}{3} \geqq \frac{100}{4} \geqq \cdots \geqq \frac{100}{n+2} \geqq \frac{100}{n+3} \geqq \cdots$$

の関係がある．砂糖を分ける目的から言って $n$ のある値以上に対しては,「分配量なし」，つまり，0 kg と見なすのが妥当である．

この数列は，

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq a_{n+1} \geqq \cdots$$

という関係があり，項が進むと項の値はしだいに小さくなっている．一般に，数列 $\{a_n\}$ において，$a_n \geqq a_{n+1}$ なる数列の変化を**単調減少**と呼ぶ．また，$a_n \leqq a_{n+1}$ なる数列の変化を**単調増加**と呼ぶ．

ここでは，数列の極限が 0 であるということは，どういうことかを調べているのであるが，先の方の項がほぼ 0 となる数列は，各項が正で単調減少する数列や，各項が負で単調増加する数列だけではない．

**例 4**　数列 $\{\dfrac{100n}{(n+3)^2}\}$

この数列も，第 $n$ 項 $a_n = \dfrac{100n}{(n+3)^2}$ に，例えば，$n = 1000$ を代入すれば，$a_{1000} = \dfrac{100 \cdot 1000}{(1000+3)^2} = 0.099\cdots$ となることから予想できるように，数列のある項から先をほぼ 0 と見なせるものである．

$$a_0 = \frac{100 \cdot 0}{(0+3)^2} = 0,$$
$$a_1 = \frac{100 \cdot 1}{(1+3)^2} = \frac{100}{16},$$
$$a_2 = \frac{100 \cdot 2}{(2+3)^2} = \frac{200}{25} = 8,$$
$$a_3 = \frac{100 \cdot 3}{(3+3)^2} = \frac{300}{36},$$
$$a_4 = \frac{100 \cdot 4}{(4+3)^2} = \frac{400}{49},$$
$$a_5 = \frac{100 \cdot 5}{(5+3)^2} = \frac{500}{64}, \ \cdots$$

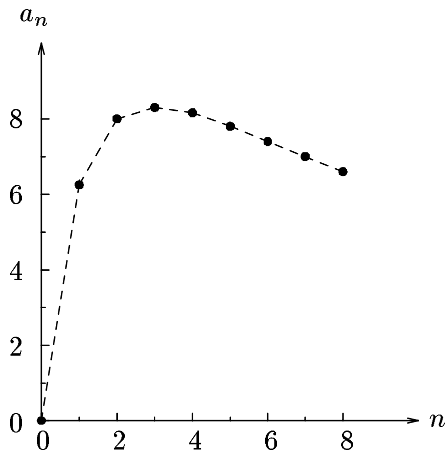



図 1.5: $\boxed{\text{例}}$ 4 の図

この数列は $n=3$ のとき，最大値となっていて，以下，

$$a_3 \geqq a_4 \geqq a_5 \geqq \cdots$$

となっていることは，グラフからも明らかである．

この例では，ある値，第 $k$ 項以上が，

$$a_k \geqq a_{k+1} \geqq a_{k+2} \geqq \cdots \geqq a_n \geqq a_{n+1} \geqq \cdots$$

単調減少となっている．

**例** **5** 次に，1-1 の 問 9 の数列を横軸に項番号 $n$，縦軸に項の値 $a_n$ をとると，次ページの図のようになる．$a_n$ は正負に振動しながらしだいに $0$ に近づく．このグラフ上の点は，第 7 項以上になると横軸を表す線に重なってしまう．もっと点の大きさを小さくしても，縦軸の目盛を大きくとっても，いずれはある項から先は縦軸との差を描くことはできなくなるであろう．

1-1 の 問 9 の数列は，

$$|8| \geqq |-4| \geqq |2| \geqq |-1| \geqq \left|\frac{1}{2}\right| \geqq \cdots \geqq \left|8\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| \geqq \left|8\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right| \geqq \cdots$$

つまり，

$$|a_0| \geqq |a_1| \geqq |a_2| \geqq \cdots \geqq |a_n| \geqq |a_{n+1}| \geqq \cdots$$

の関係がある．特定の目盛でグラフを描く目的ならば，$n$ のある値以上に対しては，「点の位置が横軸と一致してしまう」，つまり，$a_n$ の値 0 と見なしていることになる．

**例** **6** 数列 $\left\{\{1+(-1)^n\}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

この数列は，

$$2,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{1}{32},\quad 0,\ \cdots$$

となり，偶数項は単調減少するが，奇数項は 0 が続く．この場合でも，数列のある項から先をほぼ 0 と見なすことができる．

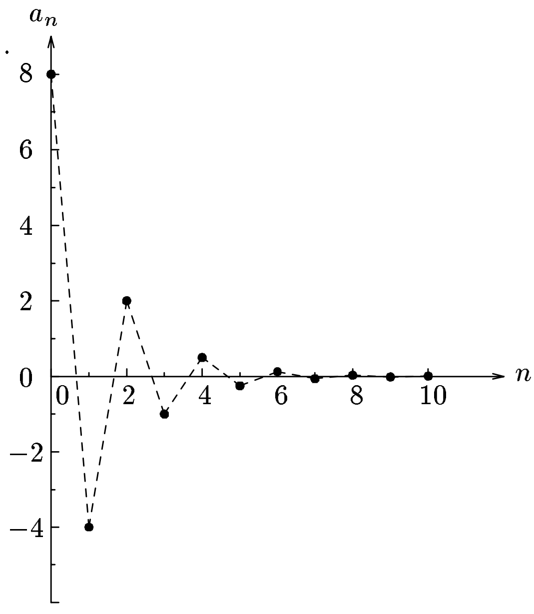



図 1.6: 例 6 の図

これらの例のように，ある種の数列は，これを応用して推論を進めていくと，何か具体的な理由から，第 $n$ 項から先は非常に小さくなる場合がある．このとき，ある項以上は $a_n$ の

値を 0 と見なすのが正しい取り扱いなのであるが，このような考え方を数学上で一般化して，応用面の具体的な目的によらず，展開して行くことが可能である．取り扱うべき数列は，**無限数列**である．

定式化の際，$n = N$ の項 $a_N$ を 0 と見なしたからと言って，$n \geqq N$ のとき，$0 \geqq |a_n|$ が成り立っている訳ではない．そこで，いろいろな状況によって採用した判定の基準となる小さい数[¶] $\epsilon$ を「**十分小さい数**」と呼ぶことにする．そして，十分小さい数 $\epsilon$ に対して，$|a_n|$ が（途中からでも）単調減少する数列ならば，

$$\epsilon \geqq |a_N| \geqq |a_{N+1}| \geqq \cdots$$

が成り立つとき，もっと一般には，$\boxed{\text{例}}$ 4 のような数列も含めて，

$$\epsilon \geqq |a_N|,\ \epsilon \geqq |a_{N+1}|,\ \cdots,\ \epsilon \geqq |a_{N+k}|,\ \cdots$$

（$k$ は自然数）が成り立つとき，$n \geqq N$ の代わりに,「記号 $n \to \infty$」と書き，$|a_n| \leqq \epsilon$ の代わりに,「記号 $a_n \to 0$」と書くことにする．すなわち，

$$n \to \infty \text{ のとき} \quad a_n \to 0$$

あるいは，これを

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

と書き表す．$\infty$ は無限大を意味する記号であるが，$\infty$ は数字ではなく，$n \to \infty$ は上に述べたような考え方を記号化したものである．

この考え方をもっと一般化しよう．

$\boxed{\textbf{例}}$ **7**　1-1 の $\boxed{\text{問}}$ 12 について，同じように，横軸に項番号 $n$，縦軸に項の値 $a_n$ をとったグラフを描いてみると，$n$ が大きくなると，$a_n$ はしだいに 1 に近づいていることが分かる．

1-1 の $\boxed{\text{問}}$ 12 の数列は，各項が 1 を超えない数であって，

$$0.9 \leqq 0.99 \leqq 0.999 \leqq \cdots \leqq 1$$

すなわち，

$$(1 - 0.9) \geqq (1 - 0.99) \geqq (1 - 0.999) \geqq \cdots$$

計算をする目的から言って，ある項以上は 1 との差が 0，つまり，値を 1 と見なして差し支えないと判断される．

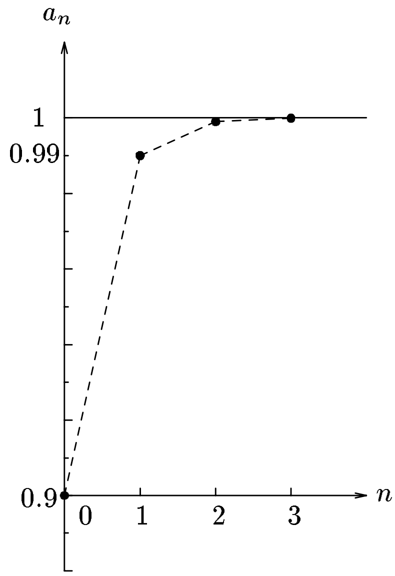



図 1.7: $\boxed{\text{例}}$ 7 の図

[¶] ここでは，あえて,「任意の」という表現を避けた．

1-1 の $\boxed{\text{問}}$ 12 のような数列では，ある $n$ 以上の項 $|a_n|$ 自体がとても小さくなるのではなく，ある定数 $\alpha$ があって，

$$|a_0-\alpha| \geqq |a_1-\alpha| \geqq |a_2-\alpha| \geqq \cdots \geqq |a_n-\alpha| \geqq |a_{n+1}-\alpha| \geqq \cdots$$

この例のように，ある種の数列は，何か具体的な理由から，第 $n$ 項から先は $a_n$ とある特定な値 $\alpha$ との差を論じることは無意味となる場合がある．このとき，ある項以上は $a_n$ の値を $\alpha$ と見なす．　$|a_n-\alpha|$ が単調減少しない場合も含めて考えると，<u>十分小さい数</u> $\epsilon$ 選ぶと，$n=N$ が定まり．$N$ 以上の項は

$$\epsilon \geqq |a_N-\alpha|,\ \epsilon \geqq |a_{N+1}-\alpha|,\ \cdots \epsilon \geqq |a_{N+k}-\alpha|,\ \cdots$$

（$k$ は自然数）が成り立つとき，‖

$$\boxed{\begin{array}{l} n\to\infty \text{ のとき } a_n\to\alpha \\ \text{または，} \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \end{array}} \tag{1.7}$$

と書き，$\alpha$ を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**と呼び，極限値をもつ数列を**収束する数列**と言う．$\boxed{\text{例}}$ 3 〜 $\boxed{\text{例}}$ 6，$\boxed{\text{例}}$ 7 の数列はいずれも収束する数列であって，それらの極限値は $\boxed{\text{例}}$ 3 〜 $\boxed{\text{例}}$ 6 では 0，$\boxed{\text{例}}$ 7 では 1 である．

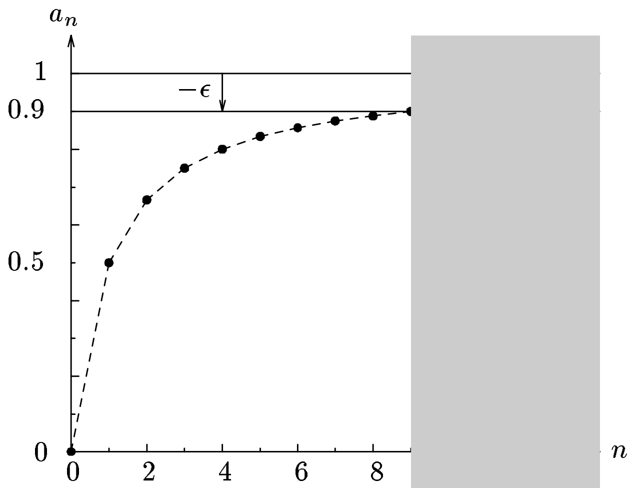



図 1.8: $\boxed{\text{例}}$ 8 の図

$\boxed{\textbf{例}}$ **8**　数列 $\dfrac{0}{1},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \cdots$

の極限値をグラフを描いて推定し，数列がその極限値に誤差 $\epsilon=0.1$ 以内で一致するのは第何項からかを求めよ．

この数列の第 $n$ 項は，$a_n=\dfrac{n}{n+1}$ となる．図 1.8 のように，横軸に項番号 $n$，縦軸に項の値 $a_n$ をとったグラフから，極限値は 1，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\underline{\underline{1}}$$

$a_n \leqq 1$ だから，

$$1-\frac{n}{n+1} \leqq 0.1 \text{ より，} \underline{\underline{n \geqq 9}}$$

グラフからも，$n=9$ から，$1-0.1 \leqq a_n \leqq 1$ となることが分かる．

‖ここでは，あえて，$\forall\epsilon,\ \exists N: n \geqq N \Longrightarrow |a_n-\alpha|<\epsilon$ と極度に抽象化はしない．

**問** **6**　数列 $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\cdots$

の極限値をグラフを描いて推定し，数列がその極限値に誤差 $\epsilon = 0.1$ 以内で一致するのは第何項からかを求めよ．*

## ★　発散する数列

数列が収束しないときを，「**発散する**」と言うが，発散には以下の 3 つの場合がある．

**例** **9**　1-1 の 問 7 で見たように，等差数列 $a_n$, $a_n = 4 + 3n$ は，

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$$

となっている数列であるが，これを碁盤の上に並べられる範囲で考えるのは，第 5 項までで，碁盤の横 1 列の目が 19 であるので，

$$19 < a_6 < a_7 < \cdots$$

の項は，置けなくなった．

**例** **10**　同様に，1-1 の 例 2 の配列は，奇数を表す等差数列 $a_n$, $a_n = 1 + 2n$ であり，

同じく，

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$$

となっているが，碁盤をいっぱいに使って終わる項は，$a_N = 19 + 18 = 37$ だから，

$$1 + 2N = 37, \ \therefore \ N = 18$$

となって，

$$37 < a_{19} < a_{20} < \cdots$$

**例** **11**　また，1-1 の 例 4 は等比数列 $a_n$, $a_n = 1 \cdot 2^n$ であるが，具体的な作業としては，

どんなに鋭利な刃物であっても，もうこれ以上重ねれば紙が切れなくなる限界の枚数があって，これを仮に 256 枚とすると，$a_N = 256$ だから，

$$2^N = 256, \ \therefore \ N = 8$$

* 問 6 の答：$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{1}$, $\underline{\underline{n \geqq 9}}$

となって，

$$256 < a_9 < a_{10} < \cdots$$

の紙の枚数は作ることができない．

以上は，数列の変化が，

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

すなわち，単調増加の場合である．

数列が収束するときと同様，単調増加でない場合も含めて一般化しする．状況に応じて採用した判定の基準となる大きな数 $M$ 「**十分大きい数**」と呼ぶことにする．そして，十分大きい数 $M$ を選ぶと，項数 $n = N$ が決まり，

$$M < a_N,\ M < a_{N+1},\ \cdots M < a_{N+k},\ \cdots$$

（ $k$ は自然数）が成り立つとき，

$$\boxed{\begin{array}{l} n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \infty \\ \text{または，} \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \end{array}} \qquad (1.8)$$

と書き，数列は**正の無限大に発散する**と言う．また，同じように考えると，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

つまり，**負の無限大に発散する**場合も，約束できる．数列が，収束も，正負の発散もしない場合には，**振動する**．1-1 の $\boxed{\text{問}}$ 5 (3) の $a_n = (-1)^n$ の場合がそうである．

**例** **12** 等比数列 $\{-10 \cdot 2^n\}$

が発散することをグラフを描いて推定し，数列の絶対値が十分大きな値 $M = 1000$ を超えてしまうのは第何項からかを求めよ．

グラフは右図の通りである．各項はいずれも負，$a_n < 0$ であり，

$$a_0 = -10 \cdot 2^0 = -10,\ a_1 = -10 \cdot 2 = -20,$$
$$a_2 = -10 \cdot 2^2 = -40,\ a_3 = -10 \cdot 2^3 = 80,\ \cdots$$

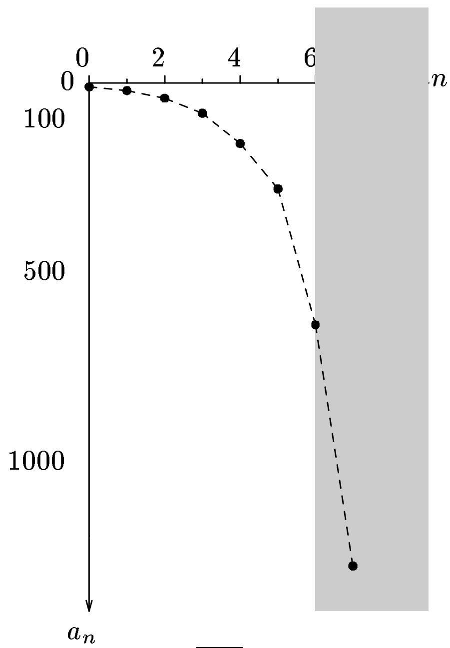



図 1.9: $\boxed{\text{例}}$ 12 の図

隣り合う項は，$a_n = -10 \cdot 2^n > a_{n+1} = -10 \cdot 2^{n+1}$ で
あるから，

$$a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$$

となっていて，$n = 6$ のとき，$a_6 = -10 \cdot 2^6 = -640$．$n = 7$ のとき，$a_7 = -10 \cdot 2^7 = -1280$ であるから，$|a_n|$ が $M$ を超える項は，$N = 7$ であって，

$$-M = -1000 > a_7 = -1280 > a_8 = -2560 > \cdots$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-10 \cdot 2^n) = -\infty$$

**問 7**　等差数列 $\{8 - 3n\}$

が発散することをグラフを描いて推定し，数列の絶対値が十分大きな値 $M = 100$ を超えてしまうのは第何項からかを求めよ†

## ★　等比数列の極限

$\{a_n\}$ が等比数列の場合，等比数列の漸化式より，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ である．公比 $r$ の値によって，等比数列の極限はいろいろ変わる．‡

① $|r| < 1$ のとき，$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |r| < 1$ だから，

$$|a_0| > |a_1| > |a_3| > \cdots > |a_n| > |a_{n+1}| > \cdots$$

このとき，十分小さい数 $\epsilon$ に対して，$n = N$ が定まり，$N$ 以上の項は $|a_n|$ が単調減少であるから，

$$\epsilon \geqq |a_N| > |a_{N+1}| > \cdots$$

が成り立つから，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

② $r = 1$ のとき，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r = 1$ だから，

$$a_0 = a_1 = a_3 = \cdots = a_n = a_{n+1} = \cdots$$

このとき，十分小さい数 $\epsilon$ に対して，$n = N$ が定まり．$N$ 以上の項は

$$\epsilon > |a_N - a_0| \geqq |a_{N+1} - a_0| \geqq \cdots$$

† 問 7 の答：グラフ略．$\lim_{n\to\infty}(8 - 3n) = -\infty$，$N = 36$

‡ $h > 0$ のとき，$r^n = (1 + h)^n > 1 + nh$ の不等式を用いる証明は採用しない．

が成り立つから（等号の場合），$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$
③ $r > 1$ のとき，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r > 1$ だから，$0 < a_n < a_{n+1}$，あるいは，$0 > a_n > a_{n+1}$

$$a_0 > 0 \text{ のとき,} a_0 < a_1 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

で，十分大きい数 $M$ に対して，項数 $n = N$ が決まり，

$$M \leqq a_N < a_{N+1} < \cdots$$

が成り立つから，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$$a_0 < 0 \text{ のとき,} a_0 > a_1 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$$

で，十分大きい数 $M$ に対して，項数 $n = N$ が決まり，

$$-M \geqq a_N > a_{N+1} > \cdots$$

が成り立つから，$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
④ $r \leqq -1$ のとき，$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |r| \leqq 1$ だから，

$$|a_0| \leqq |a_1| \leqq |a_3| \leqq \cdots \leqq |a_n| \leqq |a_{n+1}| \leqq \cdots$$

しかし，符号が交互に変るから，$\{a_n\}$ は振動し，極限はない．
以上，まとめると，$a_0 \neq 0$ として，

$$\boxed{\begin{cases} |r| < 1 & \text{のとき} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_0 r^n = 0 \\ r = 1 & \text{のとき} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_0 r^n = a_0 \\ r > 1,\ a_0 > 0 & \text{のとき} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_0 r^n = \infty \\ r > 1,\ a_0 < 0 & \text{のとき} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_0 r^n = -\infty \\ r \leqq -1 & \text{のとき} \quad \{a_0 r^n\} \text{ は振動する.} \end{cases}} \tag{1.9}$$

**問 8**　第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限のようすを調べよ．

(1) $(-0.99)^n$　(2) $(1.001)^n$　(3) $(-1.001)^n$　(4) $-(0.001)^n$　(5) $2\cdot(-1)^n$[§]

## ★　極限の計算

もっと複雑な数列の極限の計算には，収束する数列の和，積，商の極限がそれぞれの極限の和，積，商となる性質を使う．

[§] 問 8 の答：(1) 0　(2) $\infty$　(3) 振動 (4) $-\infty$　(5) 振動．

【1】$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$
【証明】絶対不等式 (1.5) $|a+b| \leqq |a| + |b|$ を使うと，

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$$

$n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$，$b_n \to \beta$ だから，この式の最右辺は十分に小さくできる．故に，$a_n + b_n \to \alpha + \beta$.

和のところを差にしても，同じように成り立つ．すなわち，$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$
【2】$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \alpha\beta$
【証明】不等式

$$|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n b_n - a_n\beta + a_n\beta - \alpha\beta| \leqq |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha|$$

$|a_n|$ と $|\beta|$ を合わせた最大の値を $M$ とおくと，[¶]

$$a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \leqq M(|b_n - \beta| + |a_n - \alpha|)$$

したがって，

$$|a_n b_n - \alpha\beta| \leqq M(|b_n - \beta| + |a_n - \alpha|)$$

$n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$，$b_n \to \beta$ だから，この式の右辺は十分に小さくできる．故に，$a_n \cdot b_n \to \alpha \cdot \beta$.

ここで，$\{b_n\}$ がずっと定数 $c$ の続く数列だとして,【2】を適用すれば,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{のとき}, \lim_{n\to\infty} b_n = c \text{であるから}, \lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\alpha$$

となる．
【3】$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$,　　$b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$
【証明】まず，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{\beta}$ を証明すれば,【2】を使って，

$$\lim\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

が示せる．

$n \to \infty$ のとき，$b_n \to \beta$ だから，数列のある項以上になると，$|b_n| \geqq \dfrac{|\beta|}{2}$ が成り立つ．

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|\beta - b_n|}{|\beta||b_n|} \leqq \frac{2|\beta - b_n|}{\beta^2}$$

---
[¶]「有界」の議論を避けた．

$n \to \infty$ のとき, 右辺は十分に小さくできる．故に，$\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{\beta}$. したがって，$\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{\alpha}{\beta}$.

1-1 の $\boxed{\text{例}}$ 5，および，この節の $\boxed{\text{例}}$ 3 で取り扱った数列 $\{\dfrac{100}{n+2}\}$ は，$\lim \dfrac{100}{n+2} = 0$ となる例だったが，この式の両辺を 100 で割った関係 $\lim \dfrac{1}{n+2} = 0$ も成り立ち，また，$n > 2$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-2}$$

となるから，$a_n = \dfrac{1}{n+2}$，$a_{n-2} = \dfrac{1}{n}$ とおくと，もっと見やすい関係式：

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0} \tag{1.10}$$

が得られる．この関係式と数列の和，積，商の極限に関する【1】,【2】,【3】の性質を用いて，いろいろな収束する数列の極限を求めることができる．

$\boxed{\textbf{例}}$ **13** 第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限を求めよ．

(1) $\dfrac{n+1}{n}$ (2) $\dfrac{n}{n^2+1}$ (3) $\dfrac{(2n-1)^2}{n^2+n+1}$

(4) $\dfrac{r^n}{1+r^n}$ $(a)$ $|r| < 1$ のとき (2) $|r| > 1$ のとき (3) $r = 1$ のとき

【解】(1) $a_n = n+1$，$b_n = n$ などとおいて，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ に 【3】を適用することはできない．なぜならば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

となり，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は収束する数列ではないからである．

このような場合，少し計算して，式が $\dfrac{1}{n}$ の項を含むようにする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \underline{\underline{1}}$$

【1】の関係を使って入ることに注意.

(2) ほとんど自明ではあるが，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ だから,【2】を用いて，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ である．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}n} = \underline{\underline{0}}$$

ここでは,【1】,【2】,【3】の関係を使っている.
(3) これも，分母分子を $n^2$ で割る.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{n^2}\right)^2}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\underline{\underline{4}}$$

(4)(a) $|r|<1$ のとき，等比数列の極限の関係から，$\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\underline{\underline{0}}$$

(b) $|r|>1$ のとき，$\left|\frac{1}{r}\right|<1$ だから，分母分子を $r^n$ で割ると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\underline{\underline{1}}$$

(c) $r=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} r^n=1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$\boxed{\text{問}}$ **9** 第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限を求めよ.‖

(1) $\dfrac{2n^2+1}{n^2}$　(2) $\dfrac{2n-1}{4n+3}$　(3) $\dfrac{-3n^2+2n-1}{4n^2-5n+6}$

(4) $\dfrac{1}{1+r^n}$　($a$) $|r|<1$ のとき (2) $|r|>1$ のとき　(3) $r=1$ のとき

$\boxed{\text{例}}$ **14**　次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)=3$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(a_n)^2+\frac{1}{(a_n)^2}\right\}$

ただし，$\{a_n\}$ は収束する数列で，$a_n\neq 0$ とする.

(2)$a_0=1$，$a_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}a_n$のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$

【解】(1)【1】,【2】,【3】の関係が使えるから，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$* とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)=\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$$

‖$\boxed{\text{問}}$ 9 の答：(1) 2　(2) $\frac{1}{2}$　(3) $-\frac{3}{4}$　(4)(a) 1　(b) 0　(c) $\frac{1}{2}$

*$\alpha$ は有理数ではないが，当然，先へ行って，これまでの関係式が実数についても成立する.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(a_n)^2+\frac{1}{(a_n)^2}\right\}=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}$$

$$=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=3^2-2=\underline{\underline{7}}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}$ が成り立つからと言って，求める極限値を $\alpha$ とおいて，

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=1+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}a_n,\ \therefore\quad \alpha=1+\frac{1}{2}\alpha$$

から，$\alpha=2$ を求め，$\lim_{n\to\infty}a_n=2$ と結論するは，答は合っているが，この議論が $a_n$ が収束する場合のみ成り立つことを忘れたもので，誤った結論を導く恐れがある．例えば，

$$b_0=1\ \text{のとき},b_{n+1}=1+2b_n$$

の場合，$\beta=1+2\beta$，$\beta=-1$，$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}b_n=-1$ の結論は誤りである．何故ならば，この漸化式を満たす数列は $b_n=2^n+1$ となって，明らかに $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ となる．

$\{a_n\}$ についての漸化式を

$$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$$

と変形できるから，

$$|a_n-2|\geqq|a_{n+1}-2|$$

十分小さい数 $\epsilon$ に対して，$n=N$ が定まり．$N$ 以上の項は

$$\epsilon\geqq|a_N-2|\geqq|a_{N+1}-2|\geqq\cdots$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}a_n=\underline{\underline{2}}$$

$a_n$ の具体的な形を求めるには，

$$c_n=a_n-2\ \text{とおくと},\ c_{n+1}=\frac{1}{2}c_n$$

この漸化式を満たす数列 $\{c_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で，初項は
$a_0=1$ であるから，$c_0=a_0-2=-1$．故に，

$$c_n=-1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ a_n=2-c_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

極限値 2 は，この形からも直接確かめられる．

$\boxed{\text{問}}$ **10**　次の極限を求めよ．†

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2-a_n-(b_n)^2+b_n\}$

ただし，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は収束する数列とする．

(2)$a_0=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_n+1)$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が，ともに正の無限大に発散する，すなわち，$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ となるとき，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty,\ \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\infty$$

が成り立つ．

【証明】十分大きい $M$ に対して，

$$M>a_n,\ M>b_n,\ (n=N,\ N+1,\ \cdots)$$

となる $N$ が存在するが，このとき，

$$2M>a_n+b_n,\ M^2>a_n\cdot b_n,\ (n=N,\ N+1,\ \cdots)$$

となる．

また，数列 $\{-a_n\}$，$\{-b_n\}$ について考えれば，2 つの数列が負の無限大に発散するときの数列の和と積の極限に関する関係式も得られる．しかし，証明を追って行けば，$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ については，いろいろな場合が起こり，定まった関係がないことが分かる．これに関連して，既に述べたように，$\infty$ は数字ではないので，$\infty+\infty$，$\infty\cdot\infty$ などと書くことは許されない．まして，$\infty-\infty=0$，$\dfrac{\infty}{\infty}=1$ などと，誤って理解してはいけない．

**例 15**　次の極限を求めよ．

(1) $n^2-2n$　(2) $\dfrac{2n^2+1}{n-2}$　(3) $\dfrac{3^n-5^n}{2^n+3^n}$　(4) $\dfrac{2^n+(-3)^n}{3^n}$

【解】(1) そのまま極限をとると，$\infty-\infty$ のような形になってしまって，極限が求められなくなってしまう例．

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-2n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)=\underline{\underline{\infty}}$$

† $\boxed{\text{問}}$ 10 の答：(1) 0　(2) $\dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ の形になってしまう例.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}n=\underline{\underline{\infty}}$$

(3) 分母が 0 でない有限な値となるように，分子分母を $3^n$ で割る.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{5}{3}\right)^n\right\}=\underline{\underline{\infty}}$$

(4) $\dfrac{2^n+(-3)^n}{3^n}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+(-1)^n$ と変形すれば，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0,\quad \lim_{n\to\infty}(-1)^n\text{: 振動}$$

したがって，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-3)^n}{3^n}$ も振動し，<u>極限が存在しない.</u>

**問 11** 次の極限を求めよ.[‡]

(1) $n^2-n^3$ (2) $\dfrac{n^2+2n+3}{n+1}$ (3) $\dfrac{3^n}{2^n-1}$ (4) $\dfrac{1+(-3)^n}{2^n}$

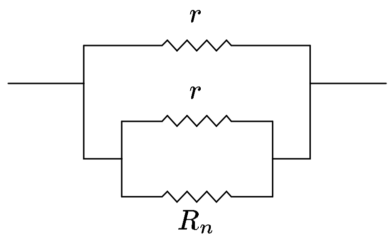
[‡] 問 11 の答：(1) $-\infty$ (2) $\infty$ (3) $-\infty$ (4) 振動

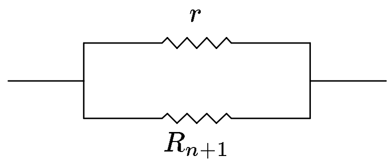
## トレーニング

$\boxed{1}$ 電気抵抗 $r_1$, $r_2$ を並列に連結したときの合成抵抗を $R$ とすると，

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$$

の関係が成り立つ．




右上の回路図の抵抗 $R_n$ の部分は，初め（$n=0$ とする）$R_0=2r$ の値とする．$r$ のうちの一方と $2r$ の抵抗を合成して 1 つの抵抗として見ると，右下の回路図で $R_{n+1}$ のところを $R_1$ とした場合となる．次に，下図の $r$, $R_1$ を並列接続したものを，上図の $R_n$ の部分に接続し直す．以下，同様な操作をして，上図の $R_n$ の部分は $r$ と，その 1 つ前の操作で作った $R_{n-1}$ との並列接続からなっているとする．

(1) $R_n$ と $R_{n+1}$ の関係を表す漸化式を作れ．
(2) 第 $n$ 項を表す $n$ の式を推定し，その式が正しいことを数学的帰納法で証明せよ．
[§]

$\boxed{2}$ 下図は水素原子から放出される光をプリズムによって分散させたようすを示す．

各線（スペクトル）は，それぞれ，$10^{14}$ ヘルツという単位で測って

$$4.568,\qquad 6.166,\qquad 6.906,\qquad 7.308,\qquad \cdots\cdots$$

の振動数（ 1 秒間にやって来る波の山の数）に対応していることが分かった．参考までに，人の目に見える光の色と波長，振動数を下表に示す．

[§] $\boxed{1}$ の答：(1) $R_{n+1}=\dfrac{R_n}{R_n+r}r$　(2) $R_n=\dfrac{2}{2n+1}r$．数学的帰納法は，I-B-1-3 で習う．習ってから問題をやればよい．

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 波長（$10^{-7}$m） | 7.7 | 6.4 | 5.9 | 5.5 | 4.9 | 4.3 | 0.38 |
| 振動数（$10^{14}$Hz） | 3.9 | 4.7 | 5.1 | 5.5 | 6.1 | 7.0 | 7.9 |
| 色 | ｜ 赤 ｜ 橙 ｜ 黄 ｜ 緑 ｜ 青 ｜ 紫 ｜ | | | | | | |

(1) 水素原子から放出される光の振動数 $f_n$ について，規則性を見ると，ある定数を $B$ として，

$$f_3 = \frac{5B}{36}, \qquad f_4 = \frac{12B}{64}, \qquad f_5 = \frac{21B}{100}, \qquad f_6 = \frac{32B}{144}, \qquad \cdots\cdots$$

一般の $n$，$(n \geqq 3)$ について $f_n$ の式を求めよ．また，定数 $B$ の値を定めよ．
(2) 実験の精度を上げると，5 本目の線も見つかることが予想される．この光に対応する振動数の値 $f_7$ を求めよ．この線は何色だろうか．
(3) 振動数の数列　$\{f_n\}$ 極限を求めよ．¶

¶ $\boxed{2}$ の答：(1) $f(n) = B\dfrac{(n-2)(n+2)}{2^2n^2} = B\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$，$B = 32.9$　(2) $f_7 = \dfrac{5 \cdot 9B}{2^2 \cdot 7^2} = 7.55$，紫．
(3) $\lim_{n\to\infty} f_n = \dfrac{B}{4} = 8.23$．スペクトルの写真のこの振動数に対応する波長，約 $4 \times 10^{-7}$ m 付近はたくさんの線が集まって連続しているように見えていることに注意．