第1章　数列の極限

1–1　数列

≪ この項で学ぶこと ≫
[**いろいろな数列，等差数列，等比数列，その他の数列**]

★　いろいろな数列

数を順に並べたものを**数列**と呼ぶ．数列のなかには，次にどんな数が来るか予想もつかないものもあり，* また，その並び方の規則性を発見することが研究の対象となるものもあり得るが，ここでは，まず，何かある規則に従って並べられている数列の例を見て行こう．

例 **1**　負でない整数，つまり，0 と自然数を大きさの順に並べたもの，それ自体が数列である．

$$0, 1, 2, 3, 4, \cdots$$

*乱数

図 1.1: 例 2 の図

例 2 碁盤の隅に石を 1 つ置き，これを囲むように石を並べたもの.

$$1, 3, 5, 7, 9, \cdots$$

つまり，奇数の列.

例 3 ある月の日曜日.

$$5, 12, 19, 26$$

例 4 紙を重ねては半分に切っていったときの枚数.

$$1, 2, 4, 8, 16, \cdots$$

例 5 100 kgの砂糖を 2 人,3 人,4 人, ⋯ で分けたときの 1 人当たりの kg数.

$$\frac{100}{2}, \frac{100}{3}, \frac{100}{4}, \frac{100}{5}, \frac{100}{6}, \cdots$$

例 6 連分数の列.

$$1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}, \cdots = 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \cdots$$

実は，この計算は 16 世紀の数学者が $\sqrt{2}$ の値を求めるために使ったものである.

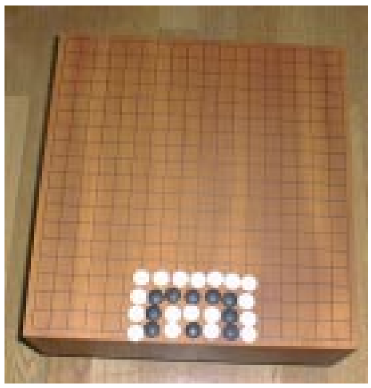


図 1.2: 問 2 の図

問 1 数列の例を 3 通りあげよ.

問 2 碁盤 1 辺の中央に石を 1 つ置き，これを囲むように石を並べたもの.

†

† 問 2 の答：$1, 5, 9, 13, \cdots$

$\boxed{\text{問}}$ **3** 電卓を用いて, $\boxed{\text{例}}$ 5，および, $\boxed{\text{例}}$ 6 の数列の初めの 5 個の数を，小数の数列に直せ．その際，小数点以下，何桁も続く小数についてはどこまで残すかを判断せよ.[‡]

数列を一般的に

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

または

$$\{a_n\}$$

と表す．a_0 を**初項**，a_1 を**第 1 項**，以下同様で，n が 0，および，自然数をとるという約束の下に，a_n を**第 n 項**と呼ぶ．[§][¶]

$\boxed{\text{例}}$ 3 の数列は項数 4，第 3 項までしか存在しない．このように項数が有限の数列を**有限数列**という．一方，$\boxed{\text{例}}$ 1, $\boxed{\text{例}}$ 2, $\boxed{\text{例}}$ 4, $\boxed{\text{例}}$ 5, $\boxed{\text{例}}$ 6, $\boxed{\text{問}}$ 2 の数列は，例えば，$\boxed{\text{例}}$ 2 では前の項に 2 を足すことでどんな大きな奇数も作れるというように，同じ規則で次々と先の数列の項を作って行くことができる．このような 数列を**無限数列**という．

$\boxed{\text{問}}$ **4** 次の項を求めよ．

(1) $\boxed{\text{例}}$ 2 の第 18 項.(2) $\boxed{\text{例}}$ 5 の第 6 項.(3) $\boxed{\text{例}}$ 6 の第 5 項

[‖]

$\boxed{\text{例}}$ **7** $\boxed{\text{例}}$ 1 ～ $\boxed{\text{例}}$ 6 の数列の第 n 項は

(1) $\boxed{\text{例}}$ 1 : n (2) $\boxed{\text{例}}$ 2 : $1 + 2n$ (3) $\boxed{\text{例}}$ 3 : $5 + 7n, (n \leqq 3)$ (4) $\boxed{\text{例}}$ 4 : 2^n

(5) $\boxed{\text{例}}$ 5 : $\dfrac{100}{n+2}$

(6) $\boxed{\text{例}}$ 6 は, $1 + \underbrace{\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}_{n\text{ 個の分母}}$ という形でしか表せない．さらに，並び方についての規則が明らかにされていない場合には,「数列の第 n 項を求めよ.」という問いは，解答不能であることも注意しておこう.

[‡] $\boxed{\text{問}}$ 3 の答：$\boxed{\text{例}}$ 5 : 50,33.333,25,16.666. 常識的に言って，g 単位まで分ければよいだろう．最後の項は 四捨五入して，16.667 とすると分けられない．$\boxed{\text{例}}$ 6 : 1,1.5,1.4,1.416, 1.4137(,1.41428)．次の項と大小が比べられる桁まで残す.

[§]数列を a_1 から始め, a_1 を初項，または，第 1 項と呼ぶ場合もある．しかし，ここではやがて，数列の増減を xy 座標を使ってグラフで見る等のために，初項は $x = 0$ から始まるようにする．建物の階数についての呼び方も，地面に近い床から，1 階，2 階，$\cdots$ と呼ぶ流儀と，イギリスのようにグランド，ファースト・フロア，セカンド・フロア，$\cdots$ と呼ぶ流儀とがある.

[¶]数列に規則があることを前提とした「一般項」という言い方は採用しない.

[‖] $\boxed{\text{問}}$ 4 の答：(1) 37．碁盤はいっぱいになる．(2) $\dfrac{100}{8}$，(3) $\dfrac{99}{70}$

$\boxed{\textbf{問}}$ **5** 第 n 項が次の式で表される数列の, 初項から第 4 項までを書け.

$$(1)\ a_n = 10 - 3n \quad (2)\ a_n = n(n+1) \quad (3)\ a_n = (-1)^{n}$$ **

★ 等差数列

$\boxed{例}$ 1, $\boxed{例}$ 2, $\boxed{例}$ 3, $\boxed{問}$ 2, $\boxed{問}$ 5 (1) の数列は, $\boxed{例}$ 1 では 1, $\boxed{例}$ 2 では 2, $\boxed{例}$ 3 では 7, $\boxed{問}$ 2 では, 4, $\boxed{問}$ 5 (1) では -3, というように, 前の項に一定の数を加えると次の項になる. この規則は一般に, 一定数を d とおくと,

$$a_{n+1} - a_n = d$$

と表される. このような数列を**等差数列** といい, d をこの等差数列の**公差**と呼ぶ. また,「一つ前の項 a_n の, 次に続く項 a_{n+1} を定める規則」を表した式を**漸化式**という.

等差数列の各項は初項 a_0 に始まり,

$$a_0, a_1 = a_0 + d, a_2 = a_0 + 2d, a_3 = a_0 + 3d, \cdots$$

となるから, 第 n 項は

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{初項 } a_0\text{, 公差 } d \text{ の等差数列の第 } n \text{ 項は} \\ a_n = a_0 + nd\end{array}} \tag{1.1}$$

と表される.

$\boxed{\textbf{問}}$ **6** $\boxed{例}$ 1,$\boxed{例}$ 2,$\boxed{例}$ 3,$\boxed{問}$ 2,$\boxed{問}$ 5(1) の等差数列について,
(1) それぞれ, 初項, 公差を言え. また, 第 n 項を a_0+dn の形に表せ.
(2) それぞれについて, 横軸に n, 縦軸に a_n をとってグラフを描け.

†

図 1.3: $\boxed{問}$ 7 の図

$\boxed{\textbf{問}}$ **7** 初項 4, 公差 3 の等差数列がある.
(1) 第 20 項を求めよ.
(2) 碁石を碁盤の目に端から縦に並べてこの数列を作れ. 第何項まで並ぶかについて式を立てよ.

** $\boxed{問}$ 5 の答：(1) 10,7,4,1,−2 (2) $0\cdot1, 1\cdot2, 2\cdot3, 3\cdot4, 4\cdot5$ (3) $1,-1,1,-1,1$

† $\boxed{問}$ 6 の答：(1) $\boxed{例}$ 1:0,1,$0+1n$ $\boxed{例}$ 2: 1,2,$1+2n$ $\boxed{例}$ 3: 5,7,$5+7n, (n \leqq 3)$ $\boxed{問}$ 2 : 1,4,$1+4n$, $\boxed{問}$ 5 (1):10,−3, $10-3n$ (2) グラフ略. 何項まで描くかは, 自主判断させる.

ただし，碁盤の目は 19×19 である．[‡]

★　等比数列

$\boxed{\text{例}}$ 4，$\boxed{\text{問}}$ 5 (3) の数列は，$\boxed{\text{例}}$ 4 では 2 倍，$\boxed{\text{問}}$ 5 (3) では -1 倍，というように，前の項に一定の数を掛けると次の項になる．この規則を漸化式で表すと，定数を r とおき，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

と表される．このような数列を**等比数列** といい，r をこの等比数列の**公比**と呼ぶ．
等比数列の各項は初項 a_0 に始まり，

$$a_0, a_1 = a_0 r, a_2 = a_0 r^2, a_3 = a_0 r^3, \cdots$$

となるから，第 n 項は

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{初項 } a_0\text{，公比 } r \text{ の等比数列の第 } n \text{ 項は} \\ a_n = a_0 r^n\end{array}} \tag{1.2}$$

と表される．[§]

問 8　$\boxed{\text{例}}$ 4,$\boxed{\text{問}}$ 5(3) の等比数列について，
(1) それぞれ，初項，公比を言え．また，第 n 項を $a_0 r^n$ の形に表せ．
(2) それぞれについて，　横軸に n，縦軸に a_n　をとってグラフを描け．

[¶]

問 9　初項 8，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列がある．
(1)　第 3 項を求めよ．
(2) 横軸に n をとり，縦軸に a_n をとってグラフを描け．ただし，*1* 目盛を 1 センチメートルとせよ．

[†]

[‡] $\boxed{\text{問}}$ 7 の答：(1)64　(2) $4 + 3n \leqq 19$，$n \leqq 5$．すなわち，第 5 項になったら，つまり，6 列目から碁石は並び切れなくなることは図から明らかである．このことは，数列の極限でふたたび問題となる．

[§] 詳しい指数法則は I-A-1-3 でやる．ここでは，$r^n = \underbrace{r \cdot r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}_{n\text{ 個}}$ の範囲で使う．

[¶] $\boxed{\text{問}}$ 8 の答：(1) $\boxed{\text{例}}$ 4:1,2,$1 \cdot 2^n$　$\boxed{\text{問}}$ 5 (3):1,-1,$1 \cdot (-1)^n$　(2) グラフ略．何項まで描くかは，自主判断させる．

[†] $\boxed{\text{問}}$ 9 の答：(1) -1　(2) グラフ略．ただし，鉛筆の芯の太さによって数列が描けるのは何項目までかということを話題とすること．

★ その他の数列

$\boxed{\text{例}}$ 5 は，各項の逆数をとると，

$$\frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \frac{4}{100}, \frac{5}{100}, \cdots$$

となり，初項 $\dfrac{2}{100}$，公差 $\dfrac{1}{100}$ の等差数列となる．このように各項の逆数が等差数列となる数列を**調和数列**という．

$\boxed{\textbf{問}}$ **10**　a, b, c が 調和数列となっているとき，$\dfrac{1}{b}$ を a, c で表せ．

‡

$\boxed{\text{問}}$ 5 (2) の数列

$$0\cdot 1,\ 1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4,\ 4\cdot 5,\ \cdots$$

すなわち，

$$0, 2, 6, 12, 20, \cdots$$

次の項 a_{n+1} との差 $a_{n+1} - a_n$ をとると，

$$0 \underbrace{\ ,\ }_{2} 2 \underbrace{\ ,\ }_{4} 6 \underbrace{\ ,\ }_{6} 12 \underbrace{\ ,\ }_{8} 20, \cdots$$

初項 2，公差 2 の等差数列，つまり，偶数の列となっている．この例のように，数列 $\{a_n\}$ に対して

$$b_n = a_{n+1} - a_n, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

として得られる数列 $\{b_n\}$ を $\{a_n\}$ の**階差数列**という．
与えられた数列の規則性を調べるために，階差数列を利用することが多い．

$\boxed{\textbf{問}}$ **11**　0.9, 0.99, 0.999, $\cdots$
というように，次々と，小数点以下の桁数を増やし，その度に 9 を付け加えて行く数列の階差数列を求めよ．

§

---

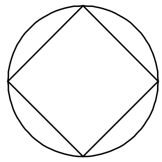
‡ $\boxed{\text{問}}$ 11 の答：$\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right)$

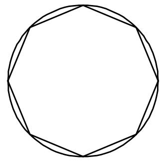
§ $\boxed{\text{問}}$ 12 の答：

$$0.9 \underbrace{\ ,\ }_{0.09} 0.99 \underbrace{\ ,\ }_{0.009} 0.999 \underbrace{\ ,\ }_{0.0009} 0.9999 \underbrace{\ ,\ }_{0.00009} 0.99999, \cdots$$

初項 0.09 公比 0.1 の等比数列となっている．

トレーニング





$\boxed{1}$ 直径 1 の円に内接する正方形，正 8 角形，正 16 角形，$\cdots$ の周の長さは，

$$2\sqrt{2}, 2^2\sqrt{2-\sqrt{2}}, 2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}, 2^4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \cdots$$

となる．

(1) この数列の第 n 項は正何角形の周を表しているか．また，これを n を用いて表せ．

(2) $n=2$ の場合を示し，周の長さを小数点以下 2 桁まで求めよ．電卓を使ってよい．

実は，この計算は古代ギリシャの数学者が円周率 π の値を求めるために使ったものである．¶

$\boxed{2}$

												半金属 半導体		絶縁体			
							H										0
IA	IIA	金属										IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	He
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIII			IB	IIB	Al	Si	P	S	Cl	Ar
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
Cs	Ba	※	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
Fr	Ra	※															

(1)　第 0 段から各段の最後までに並ぶ元素の数を数列で表せ．

(2) 設問 (1) の数列の階差数列を調べて，並び方の規則を考えよ．‖

¶ $\boxed{1}$ の答：(1) 正 2^{n+2} 角形．$2^{n+1}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n+1\text{ 個の根号}}$ (2) 証明略．3.06

‖ $\boxed{2}$ の答：(1) 0,2,10,18,36,54 (2) 2,8,8,18,18．電子殻の知識などここで教え込まないこと．せいぜい，階差数列が，$2\times 1^2, 2\times 2^2, 2\times 2^2, 2\times 3^2, 2\times 3^2$ の規則性を持つところまで．