ISSE 数学

II. 極限の数学

数学カリキュラム１年度

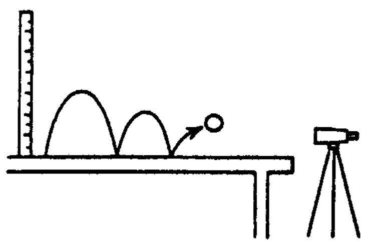
ISSE テキスト編集部

はじめに

「最初の真理などというのはありえないだろう．最初には誤りがあるだけだ.」

詩論と科学論の両方に著作を残すガストン・バシュラール（1824 − 1962 フランス）の言ったことですが，もっともっと人々に広く浸透すべき言葉ではないでしょうか.「近似をして計算する.」と言うと，多くの人は「正しい答は別にあって，求めるのが難しいため妥協して不正確な値で我慢する.」というように考えてしまうでしょう．はたして そうなのでしょうか.

例えば，円板の表面積を計算する場合に，円周率 3.14 程度では満足できないとして，3.14159265⋯⋯ などと，何桁もの値を使って計算をするのは，実は骨折り損のくたびれ儲けなのです．なぜかというと，円板の径は物指しではそれ程詳しくは実測できない訳で，ここに大きな誤差を含んでいるのに，円周率だけ見て極微な誤差を考慮するのは全く無意味なのです.



もう一つ例をあげましょう．はじめ，高さ h_0 まではずんだボールが床と衝突するたびに，次々とその前の高さの $\dfrac{1}{2}$ しかはずまなくなる場合を考えましょう. 多数回はずんだ後のボールは，もうはずまなくなり転がるだけになると予想されます．ここに，この単元で初めに習う数列の極限の考え方が出て来ます. 1 回目の衝突から 2 回目の衝突の間でボールのはずむ最高点の高さ h_1 は

$$h_1 = \frac{1}{2}h_0 = 0.5h_0$$

2 回目と 3 回目の間の最高点の高さ h_2 は

$$h_2 = \frac{1}{2}h_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 h_0 = 0.25h_0$$

3 回目と 4 回目の間の最高点の高さ h_3 は

$$h_3 = \frac{1}{2}h_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 h_0 = 0.125h_0$$

⋯⋯ これでは有限回の衝突では，ボールは高さ 0，つまり，転がることはないように思われてしまいます．こういう場合に数学では，n 回目と $n+1$ 回目間の最高点の高さ h_n は

$$h_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n h_0$$

であるとし，$n \to \infty$，つまり，無限回の衝突後

$$h_n \to 0$$

の「極限値」となると考えます．*

答は形式的に求められても，観察を大事にする人にとっては,「ボールが転がるのは，∞ 回衝突をくりかえした後」というのでは，納得できないでしょう．

議論に具体性を持たせるために，$h_0 = 1$ m とし，測定では図のようにして，ボールが 1 mm まではねあがるのまでは読み取れる装置を用意したとしましょう．そうすると，

$$h_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 1 \text{ m} = \frac{1}{1024} \text{ m} < 1 \text{ mm}$$

となるから，10 回目の衝突後は，もうこの測定器でははずんでいるとは見えなくなる．先ほどの観察家に対する答は「∞ 回目ではなく 10 回目」なのか，あるいは「 $\infty = 10$ ？」なのか．

こんな議論は，無限大や無限小，あるいは，極限値をはっきり定義せずに，∞ 等を使うから起こるのです．極限の考え方は，19 世紀になってやっとコーシーによってまとめられました．この定義によると，数学の定義ですから「目的とする精度」とか「測定器の限界」というような言葉は入らないのは当然ですが，その代わりに不等式と「任意の」という用語によって，極限と近似はほとんど同じものと言うことができます．

こうして，自然科学者が近似的な検証の極に科学的な実在を認めるという思考過程と，並行して数学者の極限概念ができ上がり，さらに，科学者もさかんに応用するようになる微積分学へと展開して行ったのです．

---

*極限の計算について行けない人は習ってから改めて読み直してみよう．

目 次