波動の教授法(中間報告)

徳永 旻

I. 問題点の所在

初学者，ただし力学についてはある程度体系的に学習して来た，にとって，波動の説明はかなり途惑うものではないだろうか.

水面の波，弦の波，音波，光波 …… これほど見かけ上異質なものを，いわゆる媒質の運動形態，しかもその中には直接的に観測できないものも含まれている，だけから同じく波動であると言い切って先へ進むのには，教える側にも抵抗がないのであろうか．それも初学者にとっては，力学の説明にあったような出発点となるような基礎法則が最低限どれとどれなのか，判然としている訳ではない．判然としないまま，しばらく進んでから，諸例に共通な波動の性質があるのだということを，現象論的に納得させられるのである．それも一つの教授法だと言ってしまえばそれまでだが，力学で，折角身に付けた物理的思考法の流儀はこの時点で御破算になってしまうではないか.

さらに,「納得させられる.」と言っても，とどのつまり,「波とは一体何であったのか.」というより本質的な疑問に関しては，少しも答えてもらえなかったことに気付く始末であろう.

演繹的な教授法を難しくしている原因の一つには，本来の出発点となるべき波動方程式が，編微分方程式であることにもよる．古典物理学を学ぶ初学者にとって，それまでにどの程度の数学的準備が課せられていなければならないか．数学は数学，物理学は物理学，という鎖国的なカリキュラムが施行され，多くの人に指摘されながら少しも改革されない現状は，やりきれないものであるが，両科の連関をうまく考えた場合にせよ，物理の初学者がこの段階で，編微分までをマスターしているということは，あまり考え得る事態ではない.

ここで参考までに，世界の各国におけるハイスクール程度の物理教科書の中で，以下の 2 点がどのように教えられているか，を列記してみよう.

① （速度・）加速度の説明に微分を用いているか否か.

② 「波は何を伝えるか.」についての説明.

○ 中国 (香港)・シンガポール・ケニヤ・ナイジェリア・オーストラリア・カナダ[1]

①	accelaration= $\dfrac{\text{change in velocity}}{\text{time taken for the change}}$
②	Waves carry energy.

[1] Physics，Michael Carrick，Nelson，1982（年号は初版，以下同様）

○ 合衆国・オーストラリア・イギリス[2]

①	$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$
②	Waves are the propagation of some kind of disturbance.

○ 合衆国・イギリス・オーストラリア[3]

①	$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$
②	All waves transfer energy .

○ 合衆国[4]

①	$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$
②	Waves transmit energy .

○ ドイツ[5]

①	$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$
②	Die Welle verrichtet dabei an ihm Arbeit, gibt also Energie ab.

○ イギリス，オーストラリア，ニュージーランド，中国（香港），シンガポール，マレイシア連邦，インド，ナイジェリア連邦，ケニア，南アフリカ，ジャマイカ[6]

①	$a = \dfrac{dv}{dt}$
②	A wave allows energy to be transferred from one point to another some distance away without any particles of medium travelling between two points.

○ イギリス，オーストラリア，ニュージーランド，中国（香港），シンガポール，マレーシア連邦，インド，ナイジェリア連邦，ケニア，南アフリカ，ジャマイカ[7]

①	acceleration at P=gradient of tangent LPM= $\dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{LN}}$
②	記述特になし．

[2] CONCEPTS IN PHYSICS, Tranklin Miller, Jr., Thomas J.Dillon, Malcolm K.Smith, Harcourt Brace Jovanovich, 1969

[3] Physics, James T. Murphy, RobertC. Smoot, Charles E. Merrill Publishing Co. A Bell & Howell Company

[4] Physics FUNDAMENTALS and FRONTIERS, Robert Stollberg, Faith Fitch Hill, HOUGHTON MIFFLIN COMPANY, 1975

[5] Dorn-Bader Physik, Friedrich Dorn, Franz Bader, Schhroedel Schhulbuchverlag, 1976; ② の前文は，太鼓の振動の例．

[6] Advanced Level Physics, M.Nelkon, P.Paker, Heinemann Educational Books, 1958

[7] Ordinary Level Physics, A.F.Abbott, Heinemann Educational Books, 1963, ① には $v-t$ グラフが付してある．

○ フランス[8]

①	$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt};\quad v_x=\dfrac{d^2x}{dt^2}, v_y=\dfrac{d^2y}{dt^2}$
②	Propagation d'un signal.

○ 日本[9]

①	$a=\dfrac{v-v_0}{t}$
②	情報とエネルギーを伝える波.

○ 日本[10]

①	$a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$
②	波はエネルギーを運ぶ．また，音の波や光の波， あるいは，電波のように，波はいろいろな情報を伝えることもできる．

① については，この段階の学生には微積分はあまり使えないことの追認である．(「物理を微積を使って解く.」などということを売り物にしている予備校があるが，日本人は後進国だと思っているアジア・アフリカを含め，世界の高校生の上半レベルの高校生は，もう何十年も前から正規の教育がそうなっていることが，表から読み取れるであろう.)

② についての多数派の解説は,「波はエネルギーを伝える (運ぶ).」というところであろう.「媒質粒子が 2 点間を移動してエネルギーを伝えるのではなく」とことわってある，なかなか要を得たテキストもある．古典物理学の範囲ではここまでで十分であるが，十分であることの基礎付けや，他の解説，あるいは，ここには持ち出されていない教え方の可能性についての適否も，検討せずに済ませておくべきではない．

(1) まず，エネルギーと簡単に言うが，波の単元に入る前に [エネルギー] についてどの程度の学習がなされているかが問題である．今やエネルギーは日常語になっているから，そのことについてチェックなしに進めば，一般論として抽象的な [波動] を抽象的な [エネルギー] で説明するということになりかねない．

(2) どんな種類のエネルギーを伝えているか．弾性波であれば [力学的エネルギー] という答が返って来るであろう．
その中の [運動エネルギー]．モデルとして等質量の弾性球を摩擦の無視できる床の直線上に並べておけば，端の球の運動エネルギー $\dfrac{1}{2}mv^2$ は，1 回目の弾性衝突によって隣の球に完全に受け渡される．したがって，距離 l の地点には時間 $\dfrac{l}{v}$ かかって，1 粒子の運動によらずに $\dfrac{1}{2}mv^2$ が伝わる．ところで，当然のことながら，運動エネルギーとは質量と速度を持つ物体が保有するエネルギーのことであって，その変換

[8] PHYSIQUE，Alain Hébert，以下多数，Technique & Vulgarisation，1981
[9] 物理 IB，西川哲司，有馬朗人，以下多数，大日本図書，1993
[10] 物理 IB，斎藤晴男，兵頭申一，以下多数，啓林館，1993

には [仕事]，あるいは，[ポテンシャル・エネルギー] が介在する．また，仕事に関しては「物体 A が物体 B に仕事をする（から仕事をされる）.］等の言い方は，あまり望ましくなく，いやしくも伝達を問題とするなら，エネルギー授受の機構としてその間の [力] を考えるべきであろう．さらに，衝突が瞬間的に起こると考えるとき，[仕事] がイメージしにくいとすれば，[力積] の伝達ということになり,（disturbance だとする教科書の表現は，ややこれに近いのか.）媒質が気体分子の場合であれば [圧力] の伝達の方が，エネルギーの伝達よりもより具体性を持つということにならないだろうか.

なおこのとき簡単な気体分子運動論を併用して考えるとすれば，圧力の計算の場合に気体分子は右の容器壁から左の容器壁へ運動することを仮定するため,「媒質粒子が 2 点間を移動してエネルギーを伝えるのではなく」という文言には抵触することになる.

(3) 「波は情報を伝える.］という文言を物理の教科書に書くことには，問題がある．情報をは何か．[情報のエントロピー]

$$S = \log_2 W$$

と，物理学の [エントロピー]

$$S = \frac{Q}{T} = k \log_e W$$

（ボルツマン定数 $k = 1$，$\log_e$ を $\log_2$ と置き換えることに関しては，単位のとり方で何ら問題はない.）との関連については，定説はない．仮にオーダーの問題を除いてつながりがあるとするならば，2 物体とその間の媒質の系で力学的エネルギー保存則が成立するモデルでは，物体が放出・吸収する熱 $Q = 0$ であるから，$S = 0$ となって，情報の伝達はあり得ない.

(4) 波動は [連続媒質] を前提としている．モデルとしての [媒質粒子] との連続・非連続のギャップの問題はひとまずおくとして，[媒質粒子] のところを [ゲージ粒子] と置き換えてしまえば，エネルギーは粒子に運ばれて移動する訳であり，学問の最新情報をつねに見聞きする最近の学生相手の場合には,《古典論的制限》をかなり声高に宣言しておかなければ，彼らは混乱する.

媒質から物体へフォトン，あるいは，フォノンが N 個到達すると考えれば，直接，情報のエントロピーの算出が可能と予想される．しかし，系を第 2 量子化する等の議論は，この小文の目標から逸脱するので深入りしない.

(5) 波を習うことを，量子論の波動関数を理解するための準備過程といった先回り的議論はおくとして，波動のどこのところが，古典力学を補完しているのかを，もっと端的に示すべきである.

II. 特殊相対論から分かること

(1) 荷電粒子と電磁場の系に関しては，特殊相対論のお蔭で，粒子 vs 波動の構造がよく見える．

$$\begin{cases} \text{運動方程式：} & \dot{\boldsymbol{p}} = -q\nabla(\phi + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}), \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A} \\ \text{波動方程式：} & \triangle\phi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\dfrac{1}{\epsilon}\rho, \qquad \triangle\boldsymbol{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{i} \end{cases}$$

つまり，粒子の運動は，場の値（この場合，スカラー・ポテンシャル：ϕ とベクトル・ポテンシャル：$\boldsymbol{A}$）が与えられている運動方程式によって，解が決定される．一方，その $\phi,\mathbf{A}$ は物質量（この場合は，電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{i}$ であるが，特に後者は，荷電粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ による.）が与えられたそれぞれの波動方程式の解である．理論的にはトートロジーであるが，実際的には近似解から出発して精度を上げていけばよいから，この点に関しては何ら不備はない．

(2) 互いに相互作用している粒子 A，B の系を考える．非相対論的古典力学においては，系のエネルギー E は

$$E = E(\boldsymbol{r}_\mathrm{A},\boldsymbol{r}_\mathrm{B},\dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{A},\dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{B},t)$$

つまり，粒子 A，B の同一時刻 t における，それぞれの座標と速度によって記述できることを前提としている．この前提は A，B 間の相互作用の伝達速度 $c \to \infty$ を仮定している．この仮定は $\dfrac{1}{c^2} \to 0$ となるから，例えば，

$$\text{波動方程式：}\triangle\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon}\rho$$

は，

$$\text{ポアソン方程式：}\triangle\phi = -\frac{1}{\epsilon}\rho$$

となってしまうことを意味し，点電荷 Q_B に関する解は，$\rho = Q_\mathrm{B}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\mathrm{B}$ とおいて，よく知られた

$$\text{クーロン・ポテンシャル：}\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q_\mathrm{B}}{R}, \qquad R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\mathrm{B}|$$

が得られる．

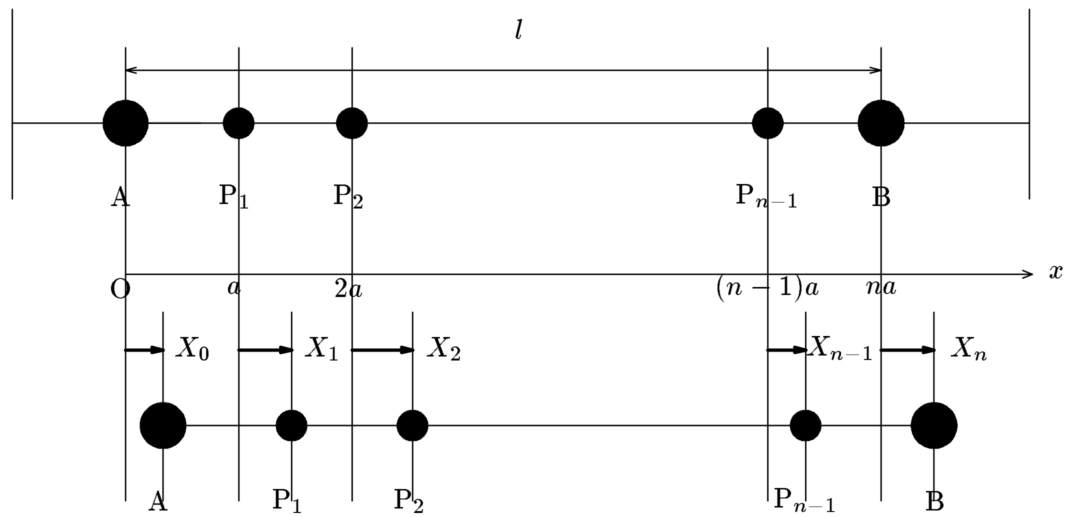
相互作用の伝達が有限の場合は，遅延ポテンシャル（点電荷のリエナール・ヴィーヒェルトのポテンシャル)

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q_\mathrm{B}}{R - \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{c}}$$

としなければならない．別に相対論を持ち出さなくても波動方程式を満たす一つの解と言えばよいであろう．

III. 1 次元モデル（縦波の場合）

左右の固定壁とともに弾性定数 K のばねで結ばれた質量 M の物体 A，B の間に質量 m の $n-1$ 個の微粒子 P_r，$(r=1,2,\cdots n-1)$ を直線的に並べ，すべてを自然の長さが a の，同じ弾性定数 k のばねでつなぐ．ばねの質量はいずれも無視できるとする．図のように，静止状態では A，の位置を原点 O，$l(=na)$ とし，A→B を $+x$ 向きとする座標を取ると，A(0)，$\mathrm{P}_r(ra)$，B(na) となる．その位置からの，A，P_r，B の変位を大文字を用い，それぞれ，X_0,X_r,X_n　とおく．A，B　には系外から力を加えないとする．



各運動方程式は，

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}_r: & m\ddot{X}_r=-k(X_r-X_{r-1})+k(X_{r+1}-X_r) & \cdots\cdots ① \\
\mathrm{A}: & M\ddot{X}_0=-KX_0+k(X_1-X_0) & \cdots\cdots ② \\
\mathrm{B}: & M\ddot{X}_n=-KX_n-k(X_n-X_{n-1}) & \cdots\cdots ③
\end{array}
\right.
$$

ここでは，質量 M は m に比べて大きく，A，B は P_r，$(r=1,2,\cdots,n-1)$ に比べてゆっくり動くので断熱近似が成り立つとする．[11]通常の弾性波の波動方程式は導く議論では，① 式より，

$$
\ddot{X}_r=\frac{ka^2}{m}\left\{\frac{X_{r+1}-X_r}{a}-\frac{X_r-X_{r-1}}{a}\right\}\frac{1}{a}
$$

$a\to 0$ の極限をとり，

$$
\text{波動方程式}:\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}-\frac{1}{V^2}\frac{\partial X}{\partial t^2}=0,\qquad V=\sqrt{\frac{Y}{\sigma}}
$$

[11]したがって，前節で述べたように，エントロピーの伝達はない．

ただし，線密度：$\sigma = \lim_{a\to 0} \dfrac{m}{a}$，ヤング率：$Y = \lim_{a\to 0} ka$ とする．断熱近似より，波動方程式に対しては最初， A，B は固定端と見なすと，定常波の解：$X = A\sin\kappa x\cos\omega t$ となる．ただし，$\kappa = \dfrac{s\pi}{l} = \dfrac{\omega}{V}$ 節の数は $s-1$ 個である．この解より，逆算的に運動方程式の解を次のように仮定できる．

$$X_r = A\sin\kappa x\cos\omega t \approx A\sin r\kappa a\cos\omega t, \qquad (1 \leqq r \leqq n-1)$$

① 式に代入すると，ω の満たすべき式：

$$\left[\frac{\dfrac{\omega a}{2V}}{\sin\left(\dfrac{\omega a}{2V}\right)}\right]^2 = \frac{ka^2}{m}\frac{1}{V^2}\cdots\cdots ④$$

が与えられる．波動方程式における位相速度 V の値を用い，極限移行をした場合，左辺の極限値は 1 であるから，この式は ω の値によらず成り立つ．a の値が無限小でないとき，すなわち，媒質が連続体と見なされない場合には，V は ω の値に関係し，波の分散が生じる．
さて，②式，③ 式を解く場合には，X_1，X_{n-1} の値は時間平均 $\overline{X}_1$,$\overline{X}_{n-1}$ を用いる，ところが，

$$\overline{X}_1 = A\sin\kappa a\overline{\cos\omega t} = 0$$

$$\overline{X}_{n-1} = A\sin(n-1)\kappa a\overline{\cos\omega t} = 0$$

これより，② 式は

$$M\ddot{X}_0 = -(K+k)X_0$$

$\dfrac{K+k}{M} = \Omega$ とおき，振幅を d （$t=0$ のとき，$X_0 = d$,$\dot{X}_0 = 0$）とすると，

$$X_0 = d\cos\Omega t$$

これまで，$x_0 = 0$ とおいて解いた波動方程式に外力：$-kX_0 = -kd\cos\Omega t$ を加えた非斉次波動方程式：

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial X}{\partial t^2} = -\frac{d}{a^2}\cos\omega t$$

の解は，用意に求められるが，ここでは，$X_0 \neq 0$ についての運動方程式 ① の解：

$$X_r = A\sin r\kappa a\cos\omega t - D\cos\Omega\left(t - \frac{ra}{V}\right), \qquad (1 \leqq r \leqq n-1)$$

を考える．ただし，$D=\left(\frac{V}{\Omega a}\right)^2 d$．　X_r が ① 式を満たすためには，③ 式の条件以外に

$$\left[\frac{\frac{\Omega a}{2V}}{\sin\left(\frac{\Omega a}{2V}\right)}\right]^2=\frac{ka^2}{m}\frac{1}{V^2}\cdots\cdots ⑤$$

が成り立たねばならないが，⑤ 式も，④ 式と同様に，$a\to 0$ のとき，Ω の値の如何によらず成り立つ．

A から媒質に与えられる力：$-k(X_1-X_0)$ は，媒質を波動として伝わり，B は媒質から力：$-k(X_n-X_{n-1})$ を受ける．② 式，③ 式の左辺を用いてこの値を求めると，(境界条件より，X_n の第 1 項は消える．)

$$\begin{cases} \text{A からの力：} & -(M\ddot{X}_0+KX_0)=(M\Omega^2-K)d\cos\Omega t=kd\cos\Omega t \\ \text{B への力：} & M\ddot{X}_n+KX_n=(M\Omega^2-K)D\cos\Omega\left(t-\frac{na}{V}\right)=kD\cos\Omega\left(t-\frac{na}{V}\right) \end{cases}$$

A から B への力は振幅をかえて伝わるが，力のの伝達時間は，

$$\frac{na}{V}=\frac{l}{V}$$

という予想される結果となる．

IV. コメント

斉次の波動方程式は，ローレンツ変換（あるいは，$c=V$ とおいたローレンツ型の変換）に不変である．弾性波では，非相対論的運動方程式から，この波動方程式が導かれるのは，何とも奇妙な気がする．前節の議論においては，波動方程式は参考にしているのみで計算には使っていない．

導き出された式では，A からの媒質へ伝達された力と媒質から B に働く力の振幅が異なるが，この系ではエネルギーが保存されるので，振幅はともに等しくなければならない．

$$d=D,\ \text{すなわち},d=\left(\frac{V}{\Omega a}\right)^2 d$$

$V\approx\frac{ka^2}{m}$ より，

$$\Omega\approx\sqrt{\frac{k}{m}},\ \text{あるいは},\frac{K+k}{M}=\frac{k}{m}$$

というよう条件が課せられるが，これは強制力による媒質のある種の共鳴であろう．ここで A，B の質量，壁との間の弾性定数を等しくとったが，そのことで議論の本質は変わらないはずである．

この小文は,「波は何を伝えるか.」の答として「エネルギーを伝える.」との答以外に,「力を伝える.」という説明も有効なのではないか，という主張である．弾性波の位相速度：V

も力の定数から成り立っている．マクロな物体に作用する力の場は，一つの方法としてミクロな力学的対象とすることが可能である．ミクロな物体からマクロな物体への相互作用を見る場合には，統計力学的処理が必要である．そして，この操作のため実際には存在する力が伝わる時間が見えなくなる．一方，波動では時間的経過を直接的に取り扱われる．

《参考文献》（国内外の高校教科書は，注に示した.）

岩波講座　現代数学への入門　熱・波動と微分方程式　俣野 博・神保道夫　岩波書店

場の古典論　ランダウ・リフシッツ 広重 徹・恒藤敏彦訳　商工出版社

岩波講座　現代物理学の基礎　古典物理学 I　湯川秀樹・豊田利幸・河辺六男　岩波書店

量子力学 I　朝永振一郎　みすず書房

パソコンで学ぶ理論物理　E.W. シュミット・G. シュッピッツ・W. レェーシュ
師 啓二訳　マグロウヒル

現代の古典物理　岡村　浩・徳永 旻　現代書館