第 9 章

三角比・三角関数についての間違い

三角比は直角三角形の辺の比，三角関数は単位円と加法定理，これが基本原理のすべてである。ところが，やたらと数多くの公式が現れ，生徒はただそれらを暗記するために，自在に問題を解く自由を失い，殆んどの生徒が三角関数嫌いになってしまっている。

また，新課程で，角度に弧度法（ラジアン）を使用せず，度を使っているのは実に非能率的なことである（数 I，II，A，B）。ラジアンが生徒に理解されにくいので度にしたという話を耳にしたことがある。事は逆であると思う。ラジアンの方が合理的であり，いかに便利であるかということを生徒に理解させることのほうが重要であろう。

（９－１）

> （問題）　$\sin(-240^\circ)$,　$\cos 675^\circ$,　$\tan(-600^\circ)$　を求めよ。

（解答実例）

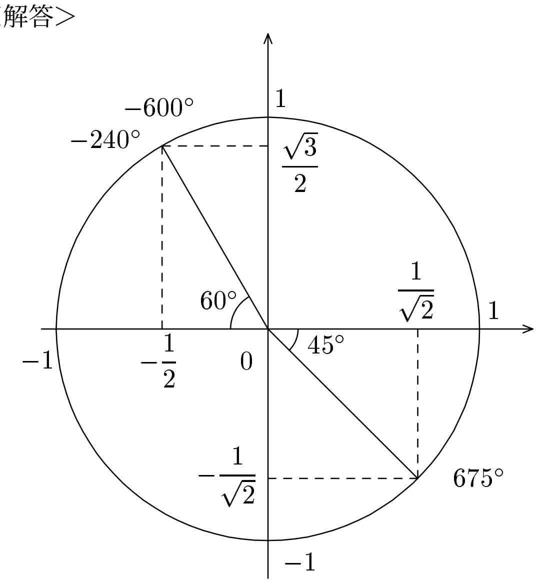
$$\begin{aligned}
\sin(-240^\circ) &= -\sin 240^\circ = -\sin(60^\circ + 180^\circ) \\
&= \sin 60^\circ = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \\
\cos 675^\circ &= \cos(315^\circ + 360^\circ) = \cos 315^\circ \\
&= \cos(135^\circ + 180^\circ) = -\cos 135^\circ = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \\
\tan(-600^\circ) &= -\tan 600^\circ = -\tan(240^\circ + 360^\circ) = -\tan 240^\circ \\
&= -\tan(60^\circ + 180^\circ) = -\tan 60^\circ = \underline{\underline{-\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

＜間違い＞

(i) 生徒に対して，公式を使ってこのように計算しなさいと云っているのだとしたら，何んと云ったらよいのか言葉もない。

(ii) 三角関数の 2 大要素は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ であり，その原理は原点中心，半径 1 の円である。上のような問題の場合，先ず単位円を描くべきである。

＜解答＞



単位円に各角度の動径を描くと左図のようになる。図より

$$\begin{cases}
\sin(-240^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos 675^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\
\tan(-600^\circ) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \\
\underline{\underline{\qquad\qquad = -\sqrt{3}}}
\end{cases}$$

（問題）　$\dfrac{\sin A}{19} = \dfrac{\sin B}{16} = \dfrac{\sin C}{5}$ である三角形 ABC について，次のものを求めよ。

(1) $\cos A$ の値　(2) $\sin A$ の値　(3) 最大角の大きさ

（解答実例）

(1)　$\dfrac{\sin A}{19} = \dfrac{\sin B}{16} = \dfrac{\sin C}{5} = h \quad (h > 0)$ とおくと

$\sin A = 19h, \quad \sin B = 16h, \quad \sin C = 5h$

また，正弦定理により，△ABC の外接円の半径を R とし，$2Rh = k$ とおくと

$a = 2R\sin A = 2R \cdot 19h = 19k$

$b = 2R\sin B = 2R \cdot 16h = 16k$

$c = 2R\sin C = 2R \cdot 5h = 5k$

ゆえに　$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$= \dfrac{(16k)^2 + (5k)^2 - (19k)^2}{2 \cdot 16k \cdot 5k} = \dfrac{-80k^2}{2 \cdot 16 \cdot 5k^2} = -\dfrac{1}{2}$

(2)　$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

$\sin A > 0$ から $\underline{\underline{\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}}$

(3) (1) から $\cos A = -\dfrac{1}{2} \quad (0^\circ < A < 180^\circ)$ で，A が鈍角であるから，A が最も大きい角である。

$\cos A = -\dfrac{1}{2} \quad (0^\circ < A < 180^\circ)$ から $\underline{\underline{\angle \mathrm{A} = 120^\circ}}$

＜間違い＞

(i) △ABC において，正弦定理の意味するところは 2 つである。
1 つは $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$，もう 1 つは外接円の半径 R に対して，任意の辺 x とその対角 θ を選ぶと　$x = 2R\sin\theta$ が成り立っていることである。
そのことが本当にわかっていないと上のようなことになる。

(ii) この問題が求めているものはすべて角度できまるものである。したがって，△ABC の大きさはどうでもよい。

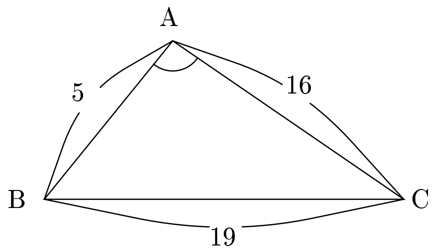
＜解答＞　条件式より

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 19 : 16 : 5$$

であるから，次図は △ABC と相似の 3 角形である。図より

(1)　$19^2 = 16^2 + 5^2 - 2 \cdot 16 \cdot 5 \cos A$（余弦定理）

$$\Longrightarrow \quad \cos A = -\frac{1}{2} \quad (\angle \mathrm{A} = 120^\circ)$$



(2)　$\angle \mathrm{A} = 120^\circ \Rightarrow \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　図より最大角は $\angle \mathrm{A} = 120^\circ$

（ 9 － 3 ）

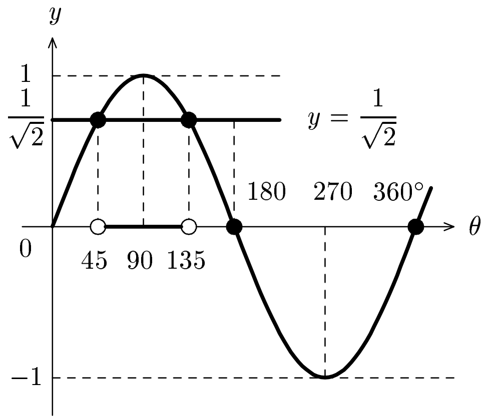
（問題） $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2) $\tan\theta < \sqrt{3}$

（解答実例）

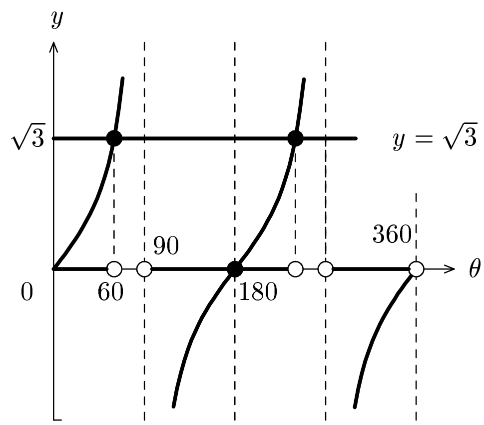
(1) 求める範囲は，関数 $y = \sin\theta$ $(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ のグラフが，直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より上方にあるような θ の値の範囲である。よって図から，求める θ の値の範囲は

$\underline{\underline{45^\circ < \theta < 135^\circ}}$



(2) 求める範囲は，関数 $y = \tan\theta$ $(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ のグラフが，直線 $y = \sqrt{3}$ より下方にあるような θ の値の範囲である。よって図から，求める θ の値の範囲は

$\underline{\underline{0^\circ \leqq \theta < 60^\circ}}$
$\underline{\underline{90^\circ < \theta < 240^\circ}}$
$\underline{\underline{270^\circ < \theta < 360^\circ}}$



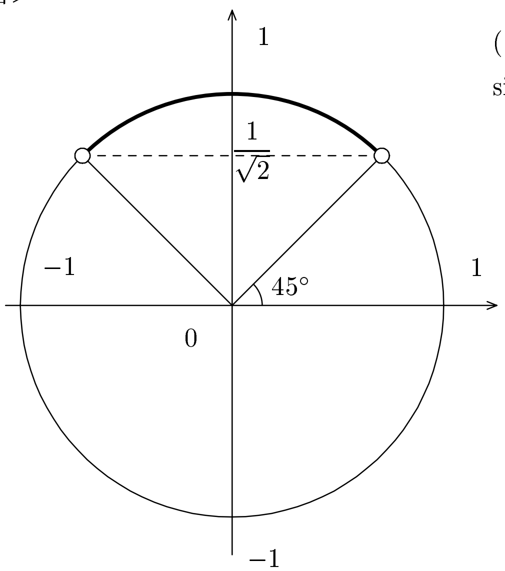
<間違い>

(i) これは不等式を解くのだからプロセスは同値型である。例えば，(1) は，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のもとで，

$$\sin\theta > \frac{1}{\sqrt{2}} \iff y = \sin\theta \text{のグラフが } y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{のグラフより上にある。}$$
$$\iff \text{（図より）} \quad 45^\circ < \theta < 135^\circ \quad \text{となる。}$$

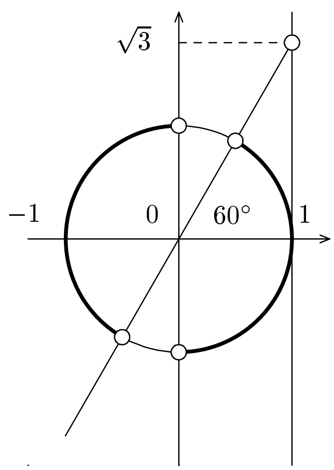
(ii) しかし，基本は原点中心の単位円である。常にここから出発しなくてはならない。それで解決しないときに，次の手段（グラフ，計算）に行くのである。

<解答>



(1) 図より

$\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff 45^\circ < \theta < 135^\circ$



(2) 図より

$\tan\theta < \sqrt{3}$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 0^\circ \leqq \theta < 60^\circ \\ 90^\circ < \theta < 240^\circ \\ \underline{\underline{270^\circ < \theta < 360^\circ}} \end{array}\right.$$

（９－４）

> （問題）　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 2$ の最大値，最小値を求めよ。またそのときの θ の値を求めよ。

（解答実例）

合成の公式 $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$,

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,　$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

を用いて，$a = 1$,　$b = \sqrt{3}$ とすると

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

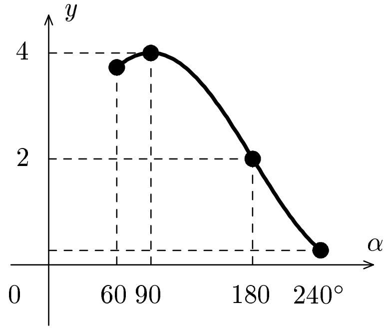
$\dfrac{1}{2} = \cos 60^\circ$,　$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$ であるから，

$y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 2 = 2\sin(\theta + 60^\circ) + 2$

ここで $\theta + 60^\circ = \alpha$ とおくと，$y = 2\sin\alpha + 2$　$\cdots$①

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より　$60^\circ \leqq \alpha \leqq 240^\circ$　$\cdots\cdots\cdots$②

② の範囲で ① のグラフは右のようになるから



$\alpha = 90^\circ$　すなわち

$\theta = 30^\circ$のとき最大値 4

$\alpha = 240^\circ$　すなわち

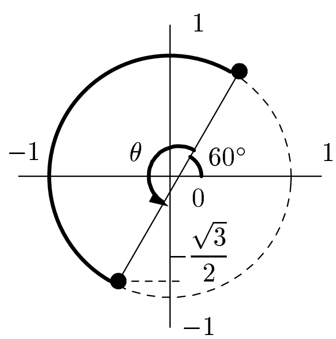
$\theta = 180^\circ$のとき最小値 $2 - \sqrt{3}$

<間違い>

(i) 合成は，加法定理の応用であって，合成の公式など不要である。また，最大最小は単位円でみるべきであって，グラフではない。

(ii) 一般に最大最小問題は関数記号を使って書いたほうがよい（この場合は $y = f(\theta)$）。

<解答>

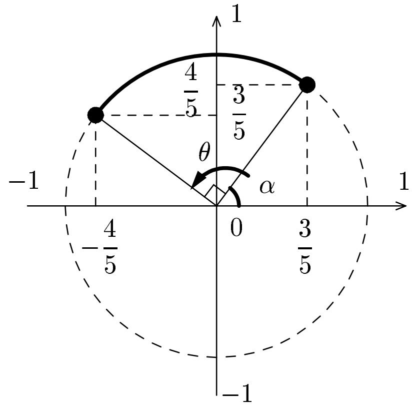


$$
\begin{aligned}
y = f(\theta) = \sin\theta &+ \sqrt{3}\cos\theta + 2 \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) + 2 \\
&= 2\sin(\theta + 60^\circ) + 2 \\
&\Longrightarrow \text{（図より）}\quad f(180^\circ) \leqq f(\theta) \leqq f(30^\circ) \\
&\Longrightarrow 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \leqq f(\theta) \leqq 2 + 2 \\
&\Longrightarrow 2 - \sqrt{3} \leqq f(\theta) \leqq 4 \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \text{最大値 } 4 \quad (\theta = 30^\circ) \\ \text{最小値 } 2 - \sqrt{3} \quad (\theta = 180^\circ) \end{cases}
\end{aligned}
$$

＜注＞ 加法定理の応用による合成と，その結果の最大最小を単位円によって求める例を 2 つ挙げておく。

＜例 1＞

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 3\sin\theta + 4\cos\theta \\ &= 5\left(\frac{3}{5}\sin\theta + \frac{4}{5}\cos\theta\right) \\ &= 5\sin(\theta+\alpha) \\ &\quad (\alpha\text{は右図}) \end{aligned}$$



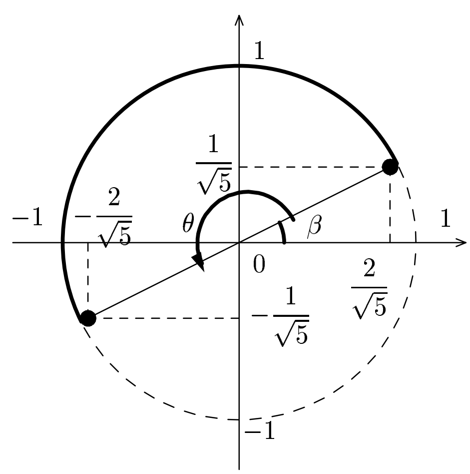
ここで，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ として最大最小値を求めると，図より

$$\begin{aligned} 5\cdot\frac{3}{5} &= f(90^\circ) \leqq f(\theta) \\ &\leqq f(90^\circ-\alpha) = 5\cdot 1 \\ \Longrightarrow&\quad \underline{\underline{3 \leqq f(\theta) \leqq 5}} \end{aligned}$$

＜例 2＞ $f(\theta) = 2\cos\theta - \sin\theta$

$= \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta\right)$

$= \sqrt{5}\cos(\theta+\beta)$ （β は右図）



ここで，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ として最大最小値を求めると，図より

$\sqrt{5}\cdot(-1)$

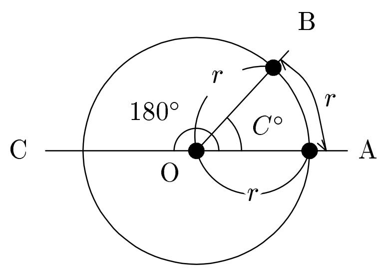
$= f(180^\circ-\beta) \leqq f(\theta) \leqq f(0^\circ)$

$= \sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Longrightarrow \underline{\underline{-\sqrt{5} \leqq f(\theta) \leqq 2}}$

（弧度法についての説明実例）

右の図のように，中心 O，半径 r の円の周上に，長さ r の弧 AB をとる。弧 AB に対する中心角 AOB を考えると，この角の大きさは，半径 r に関係なく，一定である。そこでこの大きさの角を，角を測る単位として用いこれを 1 ラジアン radian または 1 弧度という。1 ラジアンを単位とする角の表し方を弧度法という。



半円の弧 AC の長さは πr で，弧の長さは中心角に比例するから，特に，1 ラジアンを $C°$ とすると

$$\frac{C°}{180°} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AC}}} = \frac{r}{\pi r} = \frac{1}{\pi} \text{よって } C = \frac{180°}{\pi} = 57.2957\cdots\cdots$$

弧度法の定め方と，上に述べたことから，次の関係が成り立つ，

180° は π ラジアン，1° は $\dfrac{\pi}{180}$ ラジアン，1 ラジアンは $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

＜間違い＞

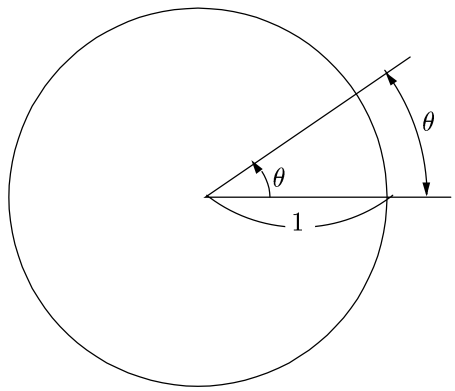
(i) これでは，なんのためにラジアンを用いなければならないのか，また，どうゆうメリットがあるのか，生徒にはわからないだろう。

(ii)「度」は特殊な単位（一周を 360 等分した角度を 1° とする）であるが,「ラジアン」は実数そのものである。これが最も肝心な点である。だから説明は，例えば次のようになるであろう。

（弧度法についての解説）

三角関数以外のすべての関数 $y = f(x)$ は，xy 座標の表面上にグラフを描くことができる。ところが $y = \sin x$ （x は度）のグラフは，同じ座標上には描けない。x が実数ではないからである。そこで度を実数に変えたい。実数とは，長さで表すことができるものである。従って角度 x を長さで表すことを考えればよい。角の大きさを長さで表すには，円を描いたときの，その角に対応する弧の長さを使えばよい。
しかし，円の大きさによって弧の長さは異なるから，半径 1 の円のときの弧の長さと決めればよい。そうすると，半径 1 の円周の長さは 2π であるから

$$\begin{array}{rcl} 180^\circ & \text{は} & \pi \\ 90^\circ & \text{は} & \dfrac{\pi}{2} \\ 60^\circ & \text{は} & \dfrac{\pi}{3} \\ 45^\circ & \text{は} & \dfrac{\pi}{4} \\ 30^\circ & \text{は} & \dfrac{\pi}{6} \end{array}$$



などとなる。これが弧度法である。

一般に，半径 1 の円の弧の長さが θ のとき，その角を θ（ラジアン）という（上図）。そして，左回りのとき $\theta > 0$，右回りのとき $\theta < 0$ とする。そうすると，例えば，$y = \sin x$（x はラジアン）と直線 $y = x$ のグラフは同じ座標に次のように描ける。