第 8 章

図を描かない間違い

図形の問題でなくても，図形に表わすことができないかと工夫することは是非必要な作業である。しかし，そうゆう試みは殆んど見られない。

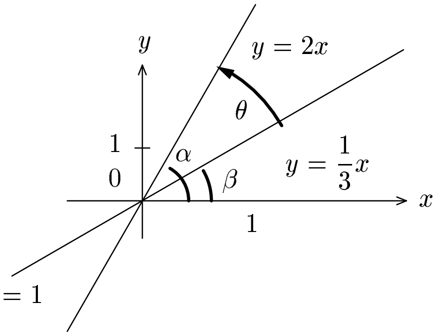
平面や立体の図形の問題に対しても，工夫した図を描こうとする意欲は極めて希薄である。図を描くということは訓練が必要であるから，中学のときから，そのような習慣をつけることが必要である。現状では，図が描けない，図を描くことをしない生徒が増え続けている。これは想像力の欠如によるものだが，図を描く訓練をしないから想像力の欠如につながると云ってもよい。

（８－１）

（問題）	2 直線 $y = 2x$,　$y = \dfrac{1}{3}x$ のなす角 θ を求めよ。 ただし，　$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$　とする。

（解答実例）

2 直線 $y = 2x$,　$y = \dfrac{1}{3}x$ と x 軸のなす角を，それぞれ図のように α,　β とすると，2 直線のなす角 θ は $\alpha - \beta$ である。



$\tan\alpha = 2$,　$\tan\beta = \dfrac{1}{3}$ であるから

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

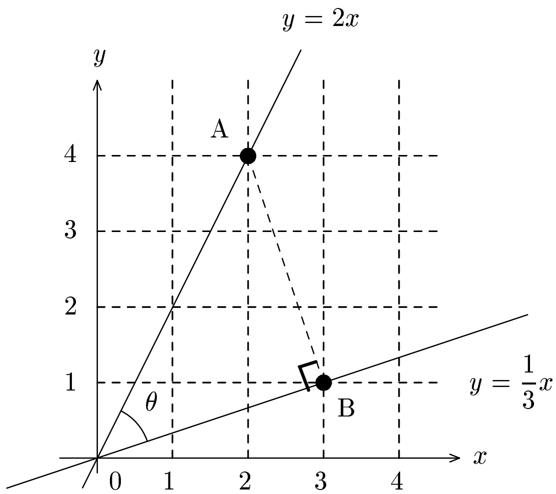
よって $\theta = \alpha - \beta = \underline{\underline{45^\circ}}$

＜間違い＞

(i) 図がついているが，　α,　β を与えれば　$\tan\alpha = 2$,　$\tan\beta = \dfrac{1}{3}$ にきまっているから，無くてもいゝ図である。
　また軸上に 1 という目盛がついているが，なんのことかわからない。

(ii) 加法定理を用いた計算で解いているが，その必要はない。方眼の座標に 2 直線を描いてみればよい。

＜解答＞



左図において
OB⊥BA,　OB=BA である
　$\Longrightarrow$　$\underline{\underline{\theta = 45^\circ}}$

＜注＞　図から読み取れなかった場合に始めて tan の加法定理を用いた計算をすればよい。

(8 − 2)

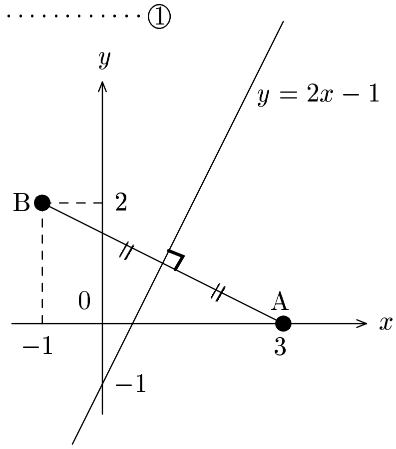
（問題） 直線 $y = 2x - 1$ に関して，点 A（3，0）と対称な点 B の座標を求めよ。

（解答実例）

点 B の座標を $(a,\ \ b)$ とすると，直線 AB の傾きは $\dfrac{b}{a-3}$,

直線 $y = 2x - 1$ と直線 AB が垂直であるから，

$$2 \cdot \frac{b}{a-3} = -1 \qquad \text{ゆえに } a + 2b = 3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{a+3}{2},\ \ \dfrac{b}{2}\right)$

が，直線 $y = 2x - 1$ 上にあるから，

$$\frac{b}{2} = 2 \cdot \frac{a+3}{2} - 1$$

ゆえに $2a - b = -4$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

①，② により $a = -1,\ \ b = 2$

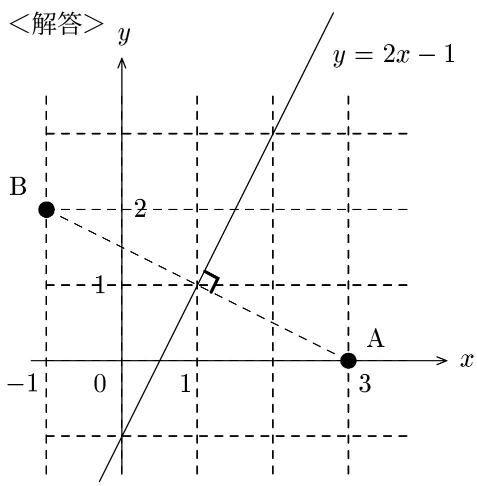
よって $\underline{\underline{\mathrm{B}(-1,\ \ 2)}}$

<間違い>

(i) 図がついているがこれは結果の図であって，問題を解くためには何んの役にも立っていない。つまり不要の図である。

(ii) 先ず座標上に図を描く。この場合は図から読み取れてしまう。図から読み取れないときは，その図をもとにどう計算したらよいかを判断する。それは<類題>で示す。

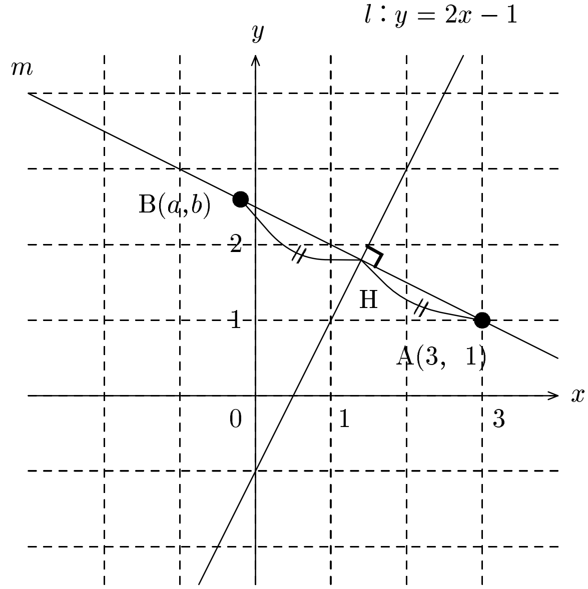
<解答>



図のように，$y = 2x - 1$ に関する A の対称点は B である。

（答） $\underline{\underline{\mathrm{B}(-1,\ \ 2)}}$

＜類題＞　直線 $y=2x-1$ に関して，点 A（3,　1）と対称な点 B の座標を求めよ。



＜解＞（図からは B の座標は読み取れない。そこで計算によって求めることになる。）

直線 AB を m，$y=2x-1$ を l とし，m と l の交点を H とする。

$\Rightarrow \quad m: y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$
（$\because$ $m \perp l$ & A(3,　1) を通る。）

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} l: & y=2x-1 \\ m: & y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$ より　H$\left(\dfrac{7}{5},\quad \dfrac{9}{5}\right)$

$\Rightarrow$ B$(a,\quad b)$　とおくと　$\left[\begin{array}{l} \dfrac{a+3}{2}=\dfrac{7}{5} \\ \dfrac{b+1}{2}=\dfrac{9}{5} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \underline{\underline{(a,\quad b)=\left(-\dfrac{1}{5},\quad \dfrac{13}{5}\right)}}$

（問題）　３点Ａ（-1，７），Ｂ（２，-2），Ｃ（６，０）を通る円の方程式を求めよ。

（解答実例）　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ 　とおく。

この円が $\mathrm{A}(-1,\ 7)$ を通るから $(-1)^2+7^2-l+7m+n=0$

$\mathrm{B}(2,\ -2)$ を通るから $2^2+(-2)^2+2l-2m+n=0$

$\mathrm{C}(6,\ 0)$ を通るから $6^2+0^2+6l+0\cdot m+n=0$

上の 3 つの式を整理すると

$l-7m-n=50,\quad 2l-2m+n=-8,\quad 6l+n=-36$

これを解いて　$l=-4,\quad m=-6,\quad n=-12$

よって求める円の方程式は　$\underline{\underline{x^2+y^2-4x-6y-12=0}}$

＜間違い＞

(i) 上の解答のあとにつぎのようなことが書いてあった。

「既に学んだように，三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の外接円という。上で求めた円は，3 点 A，B，C を頂点とする三角形 ABC の外接円である。その方程式は $(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$ と変形されるから，三角形 ABC の外接円の中心の座標は $(2,\ 3)$ である。三角形の外接円の中心を，その三角形の外心という。」

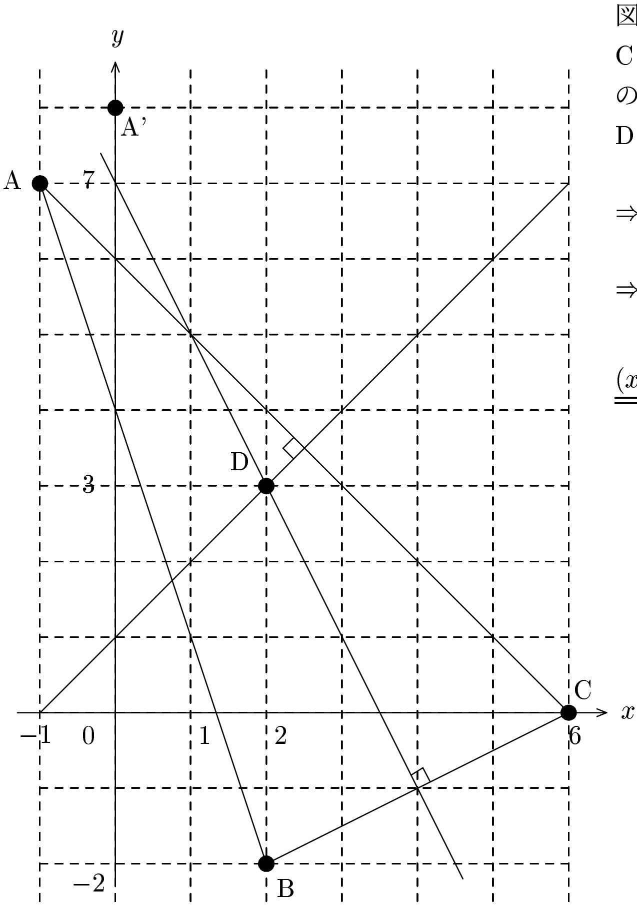
「既に学んだように」と書いてあるように，＜数 A ＞の平面幾何の所で説明済みである。この問題は＜数 II ＞である。だとしたら，教科書毎に，また同じことを説明しなければならないわけで，実におかしな話である。

また 3 点を通る円の方程式をつくり，それを変形して
$(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$ 　となったから，中心が $(2,\ 3)$，半径 5 となるのではない。話は逆である。A，B，C の 3 点を通る円だから中心が $(2,\ 3)$，半径 5 なのである。

(ii) 先ず xy 平面上に 3 角形 ABC を描いてみて中心を求めてみるべきである。

このとき，方眼の座標に図を描くことが大切である。そうすることによって図から答が読み取れてしまう場合が非常に多いからである。そして図から読み取れないとき始めて計算を考えればよく，その方法も図によって決まるのである。それを＜類題＞に示す。

＜解答＞



図のように，3 点 A，B，C をとり，AC と BC の垂直 2 等分線を引くと，D(2,　3) で交わる。

$\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \text{外接円の中心は} \\ \qquad \mathrm{D}(2,\ \ 3) \\ \text{半径} = \mathrm{DB} = 5 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$　円の方程式は

$$\underline{\underline{(x-2)^2+(y-3)^2=5^2}}$$

＜類題＞　3 点 A'(0,　8)，B(2,　−2)，C(6,　0) を通る円の中心と半径を求めよ。

＜解説＞　前図と同じように方眼に描くと（上図），今度は A'C と BC の各垂直 2 等分線 l_1，l_2 の交点 D は読み取れない。

$$\therefore \left[\begin{array}{l} l_1\text{：}\quad y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4} \\ l_2\text{：}\quad y=-2x+7 \quad \text{より交点}\underline{\underline{\mathrm{D}\left(\dfrac{21}{11},\ \ \dfrac{35}{11}\right)}}\text{が中心} \end{array}\right.$$

また　半径 =DA'= $\sqrt{\left(\dfrac{21}{11}\right)^2+\left(8-\dfrac{35}{11}\right)^2}=\underline{\underline{\dfrac{5\sqrt{130}}{11}}}$

となる。

（問題）　ベクトル　$\vec{a} = (4,\quad 3)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

（解答実例）　求めるベクトルを $\vec{l}(x,\quad y)$ とすると，$|\vec{l}| = 1$ から

$x^2 + y^2 = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$

$\vec{a} \perp \vec{l}$ から　$4x + 3y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$

② から　$y = -\dfrac{4}{3}x$，これを ① に代入して整理すると，

$\dfrac{25}{9}x^2 = 1$　ゆえに　$x = \pm\dfrac{3}{5}$

$x = \dfrac{3}{5}$　のとき　$y = -\dfrac{4}{5}$，　$x = -\dfrac{3}{5}$　のとき　$y = \dfrac{4}{5}$

（答）　$\left(\dfrac{3}{5},\quad -\dfrac{4}{5}\right)$，　$\left(-\dfrac{3}{5},\quad \dfrac{4}{5}\right)$

<間違い>

(i) 上のような計算なら，つぎのように書けばよい。

$$\left[\begin{array}{l} |\vec{l}| = 1 \\ \vec{a} \perp \vec{l} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x + 3y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + \dfrac{16}{9}x^2 = 1 \\ y = -\dfrac{4}{3}x \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad (x,\quad y) = \pm\left(\frac{3}{5},\quad -\frac{4}{5}\right)$$

(ii) ベクトルの場合でも，とにかく，先ず図を描くべきである。そうすると，この場合には，式を立てゝ計算する必要などない。

＜解答＞

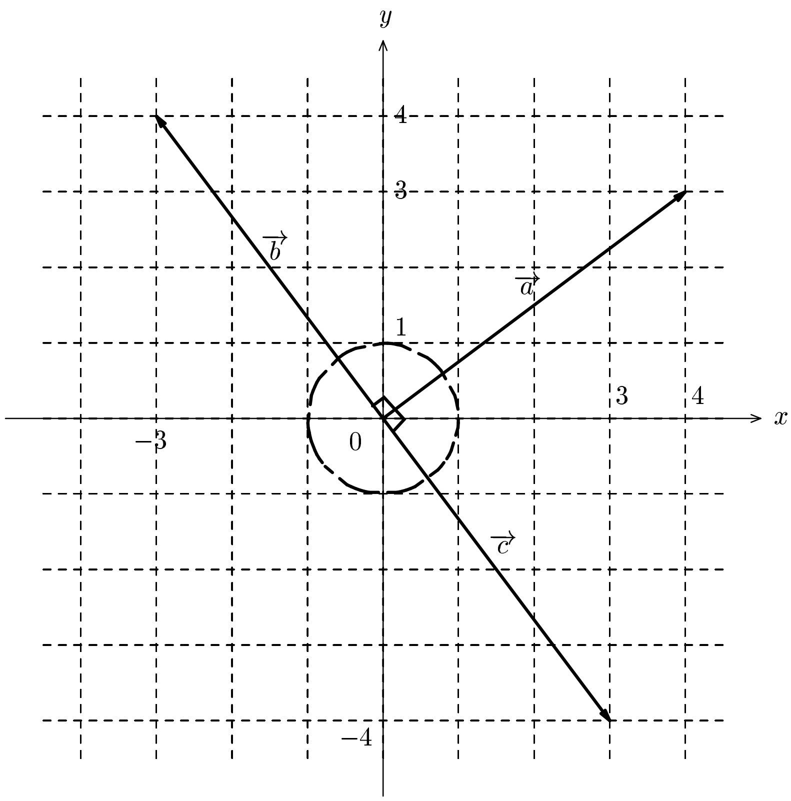
図のように，$\vec{a}\perp\vec{b}$,　$\vec{a}\perp\vec{c}$,　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$（$=5$）

となるベクトル

$\vec{b}$,　$\vec{c}$ を描くと，$\vec{b}=(-3,\quad 4)$,　$\vec{c}=(3,\quad -4)$

∴求めるベクトルは

$$\frac{1}{5}\vec{b}=\underline{\underline{\left(-\frac{3}{5},\quad \frac{4}{5}\right)}},\qquad \frac{1}{5}=\underline{\underline{\left(\frac{3}{5},\quad -\frac{4}{5}\right)}}$$



（問題）　$\alpha = 3+2i$,　$\beta = 5+3i$,　$\gamma == a+5i$　（a は実数）とする。

(1) $a=4$ のとき，$\angle\beta\alpha\gamma$ を求めよ。

(2) 3 点 α,　β,　γ が同一直線上にあるとき，a の値を求めよ。

(3) 2 直線 $\alpha\beta$ と $\alpha\gamma$ が直交するとき，a の値を求めよ。

（解答実例）

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{(a+5i)-(3+2i)}{(5+3i)-(3+2i)} = \frac{a-3+3i}{2+i} = \frac{2a-3}{5} + \frac{9-a}{5}i \quad \cdots\cdots\cdots①$$

(1) $a=4$ のとき $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = 1+i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

よって　$\underline{\underline{\angle\beta\alpha\gamma = 45^\circ}}$

(2) ① が実数であるから $9-a=0$　　$\therefore a=9$

(3) ① が虚数であるから $2a-3=0$　$(9-a\neq 0)$　　$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

＜間違い＞

(i) いきなり $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の式が出てきたら，生徒にはその理由がわかりにくいのではないかと思う。(1) の場合，せめて次のように書いて欲しいものである。

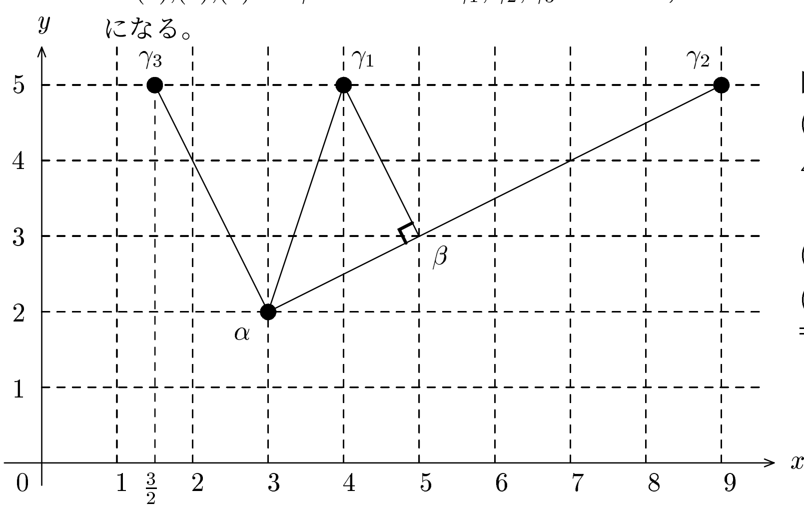
$a=4$ のとき

$\angle\beta\alpha\gamma = \arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \arg(1+i)$

$= \arg\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 45^\circ$

(ii) しかし複素数の場合も，できる限りは，先ず複素平面上に図を描くべきであり，計算はそれからである。

＜解答＞ (1),(2),(3) の γ をそれぞれ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ とすると，条件より下図のようになる。



図より

(1)

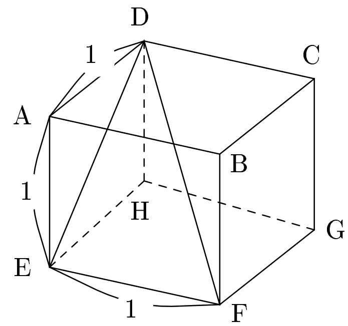
$\angle\beta\alpha\gamma = 45^\circ$

(2) $a=9$

(3)　$\underline{\underline{a=\dfrac{3}{2}}}$

（問題）　辺の長さが 1 の立方体 ABCD−EFGH がある。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ の大きさを求めよ。
(2) $\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EF}}$ であることに注意して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を求めよ。
(3) $\angle$EDF の余弦の値を求めよ。

（解答実例）



(1) $\triangle$DEF は $\angle$DEF$= 90^\circ$ の直角三角形であるから
$|\overrightarrow{\mathrm{DF}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{EF}}|^2$
$= (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$

従って　$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}| = \sqrt{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{DF}}| = \sqrt{3}$　$\cdots\cdots\cdots$（答）

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EF}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EF}}) = \overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EF}}$$

$$= |\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{DE}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{EF}}| \cos\angle\mathrm{DEF}$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$,　$|\overrightarrow{\mathrm{EF}}| = 1$,　$\angle\mathrm{DEF} = 90^\circ$
よって　$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} = 2$　$\cdots\cdots\cdots$（答）

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} = |\overrightarrow{\mathrm{DE}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{DF}}| \cos\angle\mathrm{EDF}$ であるから

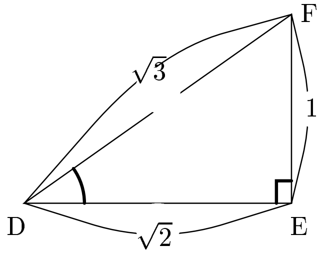
$$\cos\angle\mathrm{EDF} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DE}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{DF}}|}$$

(1),(2) を代入して $\cos\angle\mathrm{EDF} = \dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ $\cdots\cdots$（答）

＜間違い＞

(i) とにかく，繰り返しや，不要なことが多く，また，ベクトルを用いて解かねばならぬ理由もない。仮に採点すれば，答は合っているが，100 点に対して 10 点から 20 点ぐらいの答案でしかない。
(ii) 特に立体図は，見取図だけで解けてしまうものを別にすれば，解法のカギは，どんな断面図を描くかにかゝっている。

＜解答＞　断面（△DEF）を描くと次の図となる。



⇒　（図より）

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}| = \sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{DF}}| = \sqrt{3}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} = (\sqrt{2})^2 = 2$

(3) $\cos\angle\mathrm{EDF} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$