第 7 章

グラフを描かない間違い

一般に，先ずグラフを描くということがない。これは誠に不思議なことである。ある関数についての問題の場合に，先ずはグラフを描いてみるべきである。ところが，描けないか，描こうとしない。だからいきなり計算に走ることになり，その計算も無駄の多いものになる。グラフを描くことによって，無駄のない計算の方針が決まるのである。云い換えれば，グラフを描くことが解法を考えることになるのである。

（７－１）

（問題）　$x^2 - ax + a + 3 = 0$　が 2 より大きい異なる 2 解をもつような定数 a の範囲を定めよ。

（解答実例）　異なる 2 実解をもつから

$D = a^2 - 4(a+3) > 0$ より

$$a^2 - 4a - 12 = (a-6)(a+2) > 0$$

ゆえに　$a < -2,\quad 6 < a$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

2 解を α,　β とすると $\left[\begin{array}{l} \alpha + \beta = a \\ \\ \alpha\beta = a + 3 \end{array}\right.$　$\cdots\cdots\cdots$ ②

$\left[\begin{array}{l} 2 < \alpha \\ 2 < \beta \end{array}\right.$　より $\left[\begin{array}{l} 0 < \alpha - 2 \\ 0 < \beta - 2 \end{array}\right.$

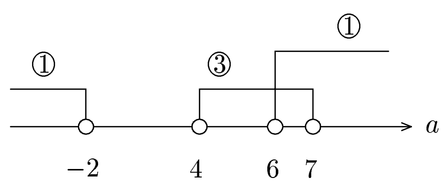
これは $\left[\begin{array}{l} 0 < (\alpha - 2) + (\beta - 2) = \alpha + \beta - 4 \\ 0 < (\alpha - 2)(\beta - 2) = \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4 \end{array}\right.$

すなわち $\left[\begin{array}{l} 4 < \alpha + \beta \\ \\ 2(\alpha + \beta) < \alpha\beta + 4 \end{array}\right.$　と同値だから

② を代入して $\left[\begin{array}{l} 4 < a \\ \\ a < 7 \end{array}\right.$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ③

① と ③（右図参照）より

（答）　$\underline{\underline{6 < a < 7}}$



＜間違い＞

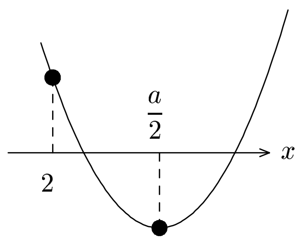
(i) この問題は題意をみたす a の必要十分条件を求めているのであるから，同値型でまとめるべきである。こうゆう書き方をされると，これを読む者はプロセスの必然性がよくわからない。また，例によって最後の範囲を決める参考図もよくない。

(ii) 勿論，何よりも先ずグラフを描くべきである。もし問題が「 2 より大きく，4 以下の異なる 2 解」であったらどうするのか。

＜解答＞　$f(x) = x^2 - ax + a + 3$　とおく

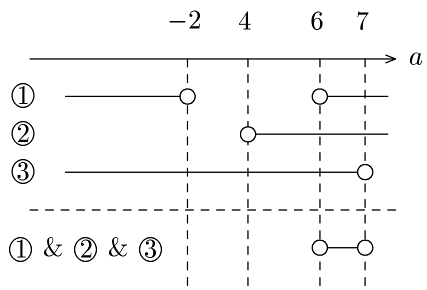
$f(x)=0$ が 2 より大きい異なる 2 解をもつ　$\iff$　$y=f(x)$ のグラフが x 軸上の 2 より大きい異なる 2 点で交わる。

$\iff$　$y=f(x)$ のグラフは左図のようになる。



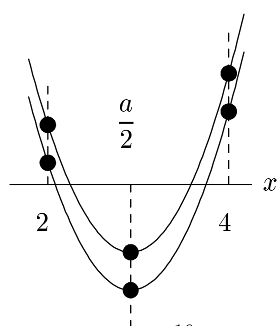
$$\iff \left[\begin{array}{ll} & D = a^2 - 4(a+3) > 0 \\ \& & 2 < \dfrac{a}{2} \quad \text{（放物線の軸の位置）} \\ \& & f(2) = 7 - a > 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} & (a+2)(a-6) > 0 \quad \cdots\cdots\cdots ① \\ \& & 4 < a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ \& & 7 < a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{array}\right.$$



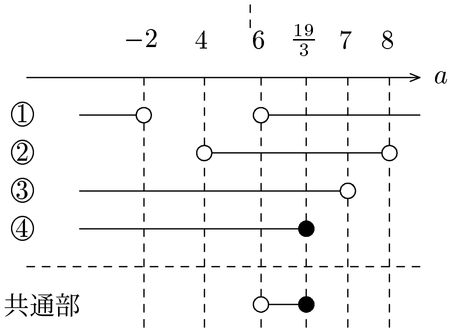
$\iff$　（左図参照）　$\underline{\underline{6 < a < 7}}$

＜注＞　もし「2 より大きく，4 以下の異なる 2 解」だったら，グラフは次のようになるから，以下のようになる。



$$\iff \left[\begin{array}{ll} & D = (a+2)(a-6) > 0 \\ \& & 2 < \dfrac{a}{2} < 4 \\ \& & f(2) = 7 - a > 0 \\ \& & f(4) = 19 - 3a \geqq 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} & a < -2, \quad 6 < a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \& & 4 < a < 8 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ \& & a < 7 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ \& & a \leqq \dfrac{19}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{array}\right.$$



（左図参照）

$\iff$　$\underline{\underline{6 < a \leqq \dfrac{19}{3}}}$

(7 − 2)

（問題）　$a>0$ とする。$1 \leqq x \leqq 4$ において次の関数の最大値が 6 で，最小値が -2 のとき，定数 a，　b の値を求めよ。

$$y = ax^2 - 4ax + b$$

（解答実例）　$y = ax^2 - 4ax + b \quad (1 \leqq x \leqq 4)$　を変形すると

$$y = a(x-2)^2 + b - 4a$$

$a>0$ で $x=2$ は $1 \leqq x \leqq 4$ を満たすから $x=2$ で $b-4a$ が最小値となる。
よって $b-4a=-2$

また，$x=1$ のとき $y=-3a+b$,　$x=4$ のとき $y=b$

$a>0$ から $b>-3a+b$ であるから，$y=ax^2-4ax+b$ は $x=4$ で最大値 6 をとる。ゆえに $b=6$

これを $b-4a=-2$ に代入し，$6-4a=-2$ ゆえに $a=2$

これは $a>0$ を満たす。よって　$\underline{\underline{a=2,\quad b=6}}$　（答）

＜間違い＞

(i) よく，これだけだらだらと回りくどい文が書けたものだと思う。同じ解答を書くとしたら次でよいのではないか。

$y = ax^2 - 4ax + b = a(x-2)^2 + b - 4a \quad (a>0)$ の最大値が 6，最小値が -2

$$\iff \left[\begin{array}{l} y(x) \geqq y(2) = b-4a = -2 \\ y(1) < y(4) = b = 6 \end{array}\right.$$

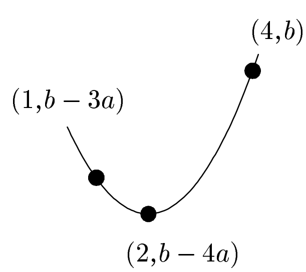
$$\iff \underline{\underline{a=2,\quad b=6}}$$

(ii) しかし，先ずグラフを描くべきである。そうすればもっと簡単である。

＜解答＞

$$y = ax^2 - 4ax + b = a(x-2)^2 + b - 4a$$
$$(a>0,\quad 1 \leqq x \leqq 4)$$

のグラフは右図である。



$$\therefore \text{グラフより} \left[\begin{array}{l} \text{最大値} = b = 6 \\ \text{最小値} = b-4a = -2 \end{array}\right.$$

$$\iff \underline{\underline{a=2,\quad b=6}}$$

（問題）　関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ が $x = -1$ で極大値をとり $x = 3$ で極小値をとるように，a と b の値を定め，極値を求めよ。

（解答実例）　$x = -1,\quad x = 3$ で極値をとるから，

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ において $f'(-1) = 0,\quad f'(3) = 0$ である。

ゆえに $\left[\begin{array}{l} 3 - 2a + b = 0 \\ 27 + 6a + b = 0 \end{array}\right.$　これを解くと $a = -3 \quad b = -9$

よって $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$

このとき $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

したがって，関数 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3 極大	$\searrow$	-29 極小	$\nearrow$

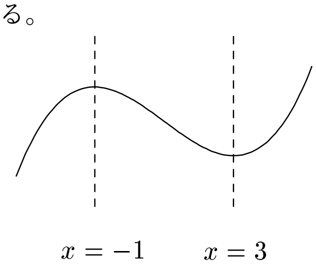
この関数は，$x = -1$ で極大値 3 をとり，$x = 3$ で極小値 -29 をとるから，条件を満たす。

以上より　$\underline{\underline{a = -3,\quad b = -9,\quad 極大値\quad 3,\quad 極小値\quad -29}}$

<間違い>

(i) これは $f(x)$ が $x = -1$ で極大，$x = 3$ で極小となるための必要十分条件（つまり，a と b の値）を求めているのだから，もっとはっきりと同値型のプロセスで示すべきである。

(ii) 前半はわかるが，後半の増減表がなぜ必要なのかよくわからない。増減表とは，増減が複雑なときに，間違えないように調べるための手段であって，目的ではない。この関数は 3 次関数で，x^3 の係数は正であるから，グラフが下図になっていることは始めから判っていることである。



＜解答＞

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$
が　$x = -1$　で極大，　$x = 3$　で
極小となる。

$\iff f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
$\quad = 3(x+1)(x-3)$

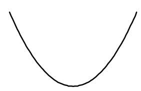
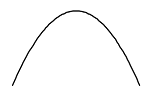
$\iff$（係数を比較して）
$a = -3, \quad b = -9$

$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$
$f(-1) = 3, \quad f(3) = -29$

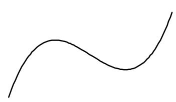
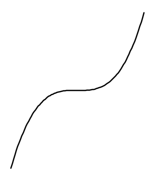
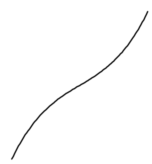
〈答〉　$\underline{\underline{a = -3, \quad b = -9, \quad 極大値 = 3, \quad 極小値 = -29}}$

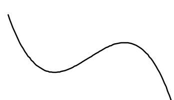
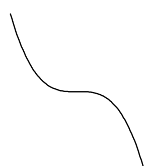
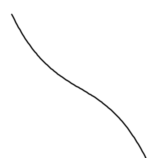
＜注＞　グラフの基本は，例えば 2 次関数，3 次関数の場合，次の通りである。

(1) $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$　のとき

$a > 0 \quad \Longrightarrow$  ，　$a < 0 \quad \Longrightarrow$ 

(2) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$　のとき

$a > 0 \quad \Longrightarrow$  or  or 

$a < 0 \quad \Longrightarrow$  or  or 

このようなグラフの基本を先ずしっかりと学習すべきである。

（ 7 − 4 ）

（問題）　方程式　$\sqrt{x+2}=x$　を解け

（解答実例）　$\sqrt{x+2}=x$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①　とおき，両辺を平方すると

$x+2=x^2$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ②

移項して $x^2-x-2=0$　これを解いて　$x=-1,\quad 2$

$x=-1$ のとき，① において　(左辺)$=\sqrt{-1+2}=1$,　(右辺)$=-1$

ゆえに，$x=-1$ は ① を満たさない。

$x=2$ のとき，① において　(左辺)$=\sqrt{2+2}=2$,　(右辺)$=2$

ゆえに，$x=2$ は ① を満たす。よって　$\underline{\underline{x=2}}$

＜間違い＞

(i) 計算だけで解くなら次のように書くべきであろう。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+2}=x \quad &\iff \quad x+2=x^2, \quad x \geqq 0 \\
&\iff \quad (x+1)(x-2)=0, \quad x \geqq 0 \\
&\iff \quad \underline{\underline{x=2}}
\end{aligned}
$$

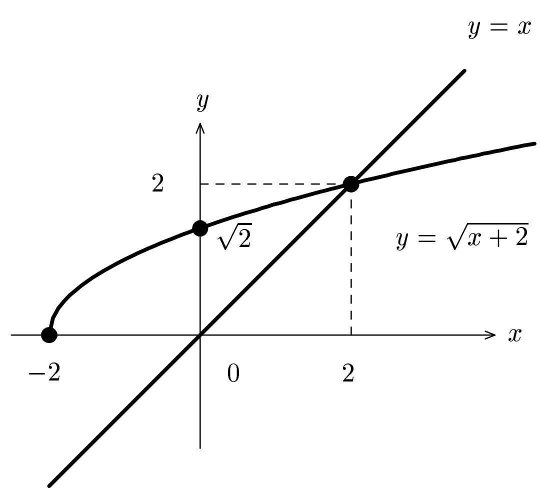
(ii) 基本はグラフである。この場合は計算でも簡単であるが，少しでも複雑になってきたらグラフを描くことなしに考えることは出来ないであろう。

＜解答＞

$y=\sqrt{x+2}$ と　$y=x$

のグラフは右図となる。

グラフより　（答）　$\underline{\underline{x=2}}$



（７－５）

（問題）　方程式　$x - \cos x = 0$ は，　$0 < x < \pi$　の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

（解答実例）　$f(x) = x - \cos x$ とおくと，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq \pi$ で連続であり，
かつ $f(0) = -1 < 0$，　$f(\pi) = \pi + 1 > 0$
したがって方程式 $f(c) = 0$，　$0 < c < \pi$ をみたす数 c が少なくとも 1 つある。
よって，方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

＜間違い＞

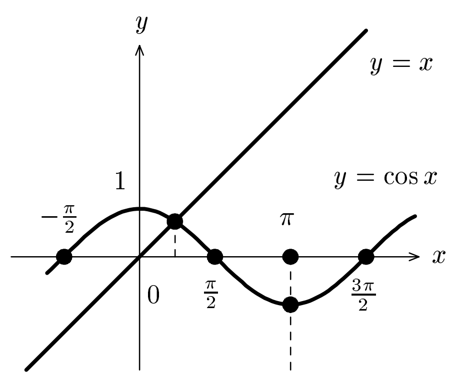
(i)「中間値の定理」を用いているが，こんな形式ばったやり方はむしろコッケイである。もし用いるなら，厳密に云って連続の証明からやらなくてはならないが，高校の数学ではそんな必要はない。

(ii) 連続を明らかとしていることは，既にグラフが頭の中に描かれているからである。だったら先ずグラフを描くべきであろう。

＜解答＞　$x - \cos x = 0 \iff x = \cos x$

$\therefore y = x$　と　$y = \cos x$
のグラフ（右図）より

$x - \cos x = 0$ は　$0 < x < \pi$　に
1 つの実数解をもつ（Q．E．D.）



＜注＞　グラフによれば，少なくとも 1 つではなく，ただ 1 つであること，しかも 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ のほぼ真中にあることもわかる。このように具体的にとらえることが大切なのである。

（７－６）

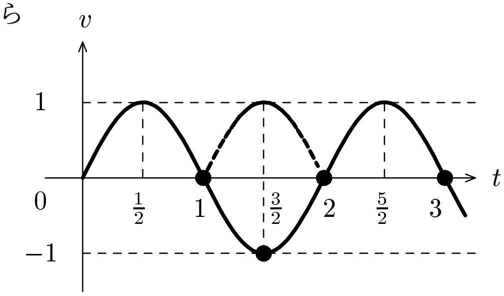
（問題）　直線上を動く点 P の，時刻 t における速度 v が $\sin \pi t$ であるとする。
$t=0$ から $t=3$ までに，P の位置はどれだけ変化するか。
また実際に通過した道のり l を求めよ。

（解答実例）

求める位置の変化量は　$\displaystyle\int_0^3 \sin \pi t dt = \left[-\frac{\cos \pi t}{\pi}\right]_0^3 = \frac{2}{\pi}$

また道のり l は，右図から

$$l = \int_0^3 |\sin \pi t| dt$$
$$= 3\int_0^1 \sin \pi t dt$$
$$= 3\left[-\frac{\cos \pi t}{\pi}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{6}{\pi}}}$$



<間違い>

(i) 点の運動の問題で，このような形式的な計算をよく見かけるが，こんなやり方では生徒にとって得るものは何もない。

(ii) 基本の考え方は列車のダイヤグラムと同じで，位置 x と時刻 t との関係を表わすグラフである。

<解答>　直線を x 軸，$t=0$ のとき P が原点にあるとすれば

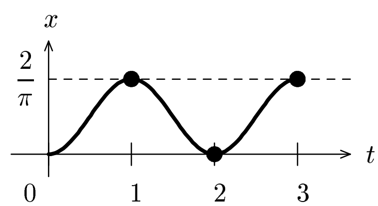
$$x = \int_0^t \sin \pi z dz = \frac{1}{\pi}(1-\cos \pi t)\,(\,= f(t) \text{ とする})$$

$x=f(t)$ のグラフは右図となる

∴グラフより

P の位置の変化は　$\underline{\underline{\dfrac{2}{\pi}}}$

実際の道のりは　$\dfrac{2}{\pi} \times 3 = \underline{\underline{\dfrac{6}{\pi}}}$



<注 >　道のりは x 軸上の動き $\left(0 \to \dfrac{2}{\pi} \to 0 \to \dfrac{2}{\pi}\right)$ を見ればよい。

また，各時刻 t における接線の傾きがそのときの速度を表わしている。これがダイヤグラムのグラフである。