# 第 5 章

# 樹形図を描かない間違い

確率の問題で最も多いのが確率過程の問題である。それは樹形図（Tree）によって表現するのが一番わかり易い。また，場合の数も Tree で表わすとはっきりすることが多い。

ところで殆んどの場合 Tree を描かないか，描いても見当違いの Tree を描いていることが多い。Tree は一般には流れ図（Flow–chart）にも通じ，問題の仕組みを掴むためにも極めて重要な手段であるから，もっと描く習慣をつけた方がよい。

中学，高校で，Tree や Flow–chart を書く学習をもっとやるべきであると思う。

（５－１）

（問題）　A の袋には白玉 5 個，赤玉 3 個，B の袋には白玉 4 個，赤玉 6 個が入っている。A，B の袋から玉を 1 個づつ取り出すとき，取り出した 2 個の玉の色が同じである確率を求めよ。

（解答実例）　A の袋から玉を 1 個取り出す試行と，B の袋から玉を 1 個取り出す試行は独立である。取り出した 2 個の玉の色が同じであるのは ［1］ 2 個とも白である,［2］2 個とも赤である，のいずれかであり，これらの事象は互いに排反である。

［1］A の袋から白玉を取り出す確率は $\dfrac{5}{8}$

B の袋から白玉を取り出す確率は $\dfrac{4}{10}$

よってこの場合の確率は $\dfrac{5}{8}\times\dfrac{4}{10}=\dfrac{20}{80}$

［2］［1］と同様にして，確率を計算すると $\dfrac{3}{8}\times\dfrac{6}{10}=\dfrac{18}{80}$

したがって，求める確率は $\dfrac{20}{80}+\dfrac{18}{80}=\dfrac{38}{80}=\underline{\underline{\dfrac{19}{40}}}$

＜間違い＞

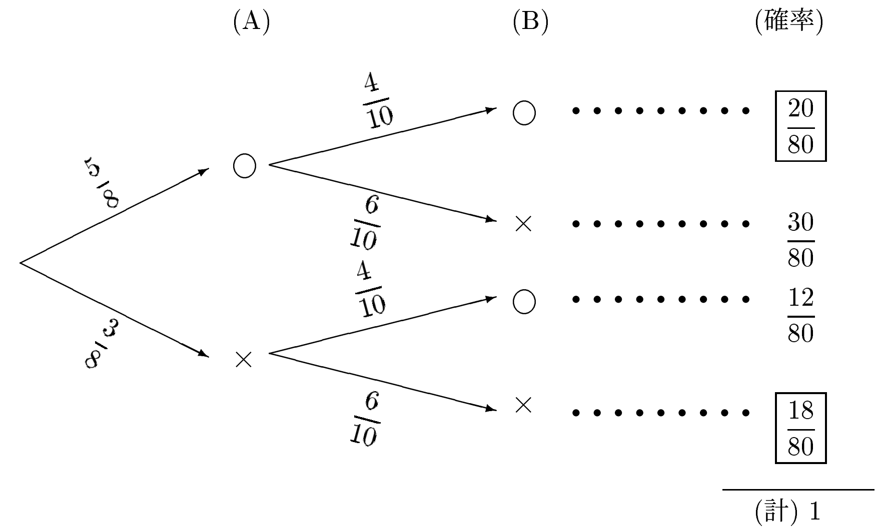
(i) 記号化ということを完全に忘れた記述である。これは教科書の例題であるから，生徒への説明のためにこのような文章にならざるを得ないのだと言うかも知れない。

それがそもそも間違いなのである。上を記号化して書けば，袋 X から白 1 個，赤 1 個を取り出す事象をそれぞれ $\mathrm{X_W}$，$\mathrm{X_R}$ で表わし，求める確率を $p$ とおくと，

$$\begin{aligned} p &= P(\mathrm{A_W})\cdot P(\mathrm{B_W})+P(\mathrm{A_R})\cdot P(\mathrm{B_R}) \\ &= \frac{5}{8}\times\frac{4}{10}+\frac{3}{8}\times\frac{6}{10}=\underline{\underline{\frac{19}{40}}} \end{aligned}$$ でよい。

(ii) しかし，この確率の問題の構造を最もわかり易く示すものは Tree である。そして，Tree を書けば終りである。

<解答>　白玉を ○，赤玉を × で表わし，A から 1 個取り出し，次に B から 1 個取り出すと考えてよいから，その確率過程の Tree は次図となる。




Tree より同色の確率は　$\dfrac{20}{80}+\dfrac{18}{80}=\underline{\underline{\dfrac{19}{40}}}$

（問題）　10 本のくじの中に 3 本の当たりくじが入っている。このくじを A，B，C の 3 人がこの順に 1 本づつ引くとき，次の確率を求めよ。

(1) A が当たり，B がはずれ，C が当たる。

(2) A，B がはずれ，C が当たる。

(3) 少なくとも 1 人が当たる。

（解答実例）　くじの引き方は全部で ${}_{10}\mathrm{P}_3$ 通りある。

(1) A が当たり，B がはずれ，C が当たる場合の数は ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_7\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1$ 通り。

よって求める確率は　$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_7\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{P}_3} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \underline{\underline{\frac{7}{120}}}$$

(2) A，B がはずれ，C が当たる場合の数は ${}_7\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1$ 通り。

よって求める確率は　$$\frac{{}_7\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{P}_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \underline{\underline{\frac{7}{40}}}$$

(3) A，B，C の 3 人ともはずれる場合の数は ${}_7\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1$ 通り。
よって少なくとも 1 人が当たる確率は

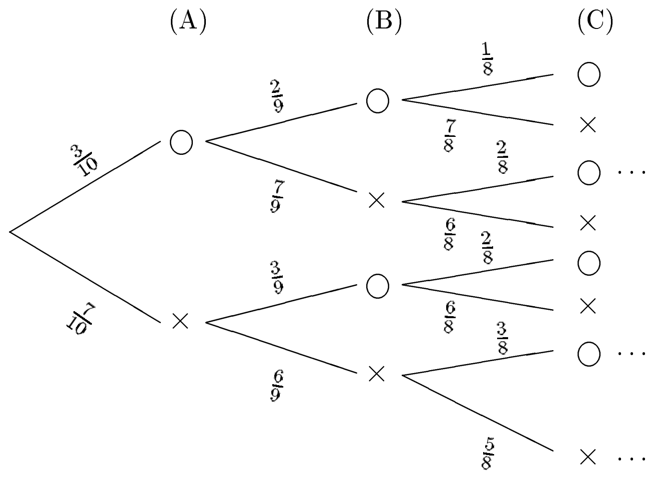
$$1 - \frac{{}_7\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{P}_3} = 1 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8} = 1 - \frac{7}{24} = \underline{\underline{\frac{17}{24}}}$$

＜間違い＞

(i) 例えば，A が当たる場合のかずは誰がどう考えても 3 通りである。それを組合せ ${}_3\mathrm{C}_1$ で表わす理由がわからない。

(ii) これこそ Tree を描くべきである。そうすれば，どんな確率を求められても直ぐに答えられる。

＜解答＞　当たりを ○，はずれを × で表わし，Tree を描くと次図となる。
（結果の各確率は解答に必要なものだけを記す）




(各確率)

○ $\cdots\ \dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{2}{8}=\dfrac{7}{120}$

○ $\cdots\ \dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{7}{40}$

× $\cdots\ \dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{7}{24}$

Tree より　　(1) $\underline{\underline{\underline{\dfrac{7}{120}}}}$　　(2) $\underline{\underline{\underline{\dfrac{7}{40}}}}$　　(3) $1-\dfrac{7}{24}=\underline{\underline{\underline{\dfrac{17}{24}}}}$

（ 5 − 3 ）

| |
|---|
| （問題） 4 個の数字　0，1，2，3 の中の異なる数字を使ってできる<br>次のような整数はいくつあるか。<br>(1)  3 桁の整数　(2)  4 桁の奇数　(3)  4 桁の整数のうち 5 の倍数 |

（解答実例）

(1) 100 位の数字は 1，2，3 の中から 1 つ選ぶから，その並べ方は ${}_3\mathrm{P}_1$ 通り，10 位と 1 位の数字の並べ方は残りの 3 つの数字から 2 つ取って 1 列に並べるから ${}_3\mathrm{P}_2$ 通り。従って，求める 3 桁の整数の個数は，積の法則により

$${}_3\mathrm{P}_1 \times {}_3\mathrm{P}_2 = 3 \times 3 \cdot 2 = \underline{\underline{18}} \cdots\cdots (\text{答})$$

(2) 1 の位の数字は 1，3 の中から 1 つ選ぶから，その並べ方は ${}_2\mathrm{P}_1$ 通り。そのとき，1000 の位の数は残る 3 つの数字のうち 0 以外のものから 1 つ選ぶから，その並べ方は ${}_2\mathrm{P}_1$ 通り。このとき 100 位と 10 位の並べ方は，残りの 2 つの数字を並べるのだから ${}_2\mathrm{P}_2$ 通り。したがって，求める 4 桁の奇数の個数は，積の法則により

$${}_2\mathrm{P}_1 \times {}_2\mathrm{P}_1 \times {}_2\mathrm{P}_2 = 2 \times 2 \times 2 \cdot 1 = \underline{\underline{8}} \cdots\cdots (\text{答})$$

(3) 5 の倍数であるためには，1 の位の数字が 0 であるから，1000，100，10 の各位の数字の並べ方は，0 以外の 3 つの数字を 1 列に並べる。したがって，求める 4 桁の整数のうち 5 の倍数の個数は

$${}_3\mathrm{P}_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{6}} \cdots\cdots (\text{答})$$

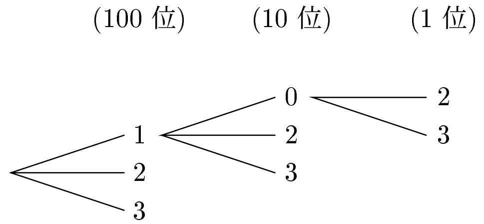
＜間違い＞

(i) 記号化もなく，だらだらとした文章が並んでいるだけである。また，3 つの中から 1 つ選ぶから並べ方は ${}_3\mathrm{P}_1$ だとか，3 つの中から 2 つ取って並べるから ${}_3\mathrm{P}_2$ であるとか，こんな形式主義は生徒の自由な発想を殺すものである。${}_3\mathrm{P}_1$ だから 3 になり，${}_3\mathrm{P}_2$ だから $3 \times 2$ になるのではなく，始めっから 3 であり，$3 \times 2$ なのである。

(ii) これも，まずは Tree を描くべきである。

＜解答＞　いずれの場合も Tree で表わすと以下のようになる。

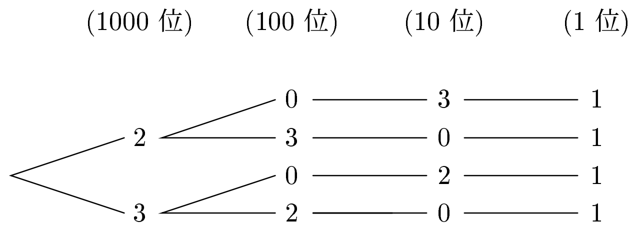
(1)




102 と 103 だけ示したが，他も同様に枝分かれして行く。

$\Longrightarrow$ Tree より　$3 \times 3 \times 2 = \underline{\underline{18}}$ （個）

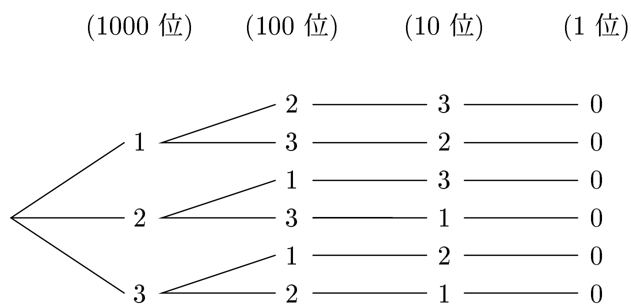
(2)




1 の位が 1 の場合のみ示したが，3 の場合も同じである。

$\Longrightarrow$ Tree より　$4 \times 2 = \underline{\underline{8}}$ （個）

(3)




これで全部である。

$\Longrightarrow$ Tree より　$\underline{\underline{6}}$ （個）

＜注＞　もし，数字と桁数が増えたら，とても Tree など描けないと思うであろう。その通りであるが，それでも省略した形で工夫して Tree を描いてみることが大切なのである。それが不完全な Tree であっても，それによってどのような計算をすればよいかがわかるからである。考え方の基本となるものは常に Tree である。

（５－４）

| |
|---|
| （問題） 1，2，3，4，5 の配列 $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ のうちで，$a_1 \neq 1$，$a_2 \neq 2$，$a_3 \neq 3$，$a_4 \neq 4$，$a_5 \neq 5$ のすべてをみたすものは何通りあるか。 |

（解答実例） $a_1$ は 2，3，4，5 のいずれかである。仮に $a_1 = 2$ のとき，

(i) $a_2 = 1$

(ii) $a_2 \neq 1$ （$a_2$ は 3，4，5 のいずれか）

(i) のとき

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \text{ は } \left[\begin{array}{l}(2,\ 1,\ 4,\ 5,\ 3)\\(2,\ 1,\ 5,\ 3,\ 4)\end{array}\right. \quad \text{の 2 通り}$$

(ii) のとき

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \text{ は } \left[\begin{array}{l}(2,\ 3,\ 1,\ 5,\ 4)\\(2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 1)\\(2,\ 3,\ 5,\ 1,\ 4)\end{array}\right. \quad \text{の 3 通り}$$

$a_2$ =4，5 としても同様に 3 通りづつ。

以上より　$a_1 = 2$ のとき　$2 + 3 \times 3 = 11$（11 通り）

$a_1$ =3，4，5 としても上と同様に 11 通りづつであるから，求める順列は

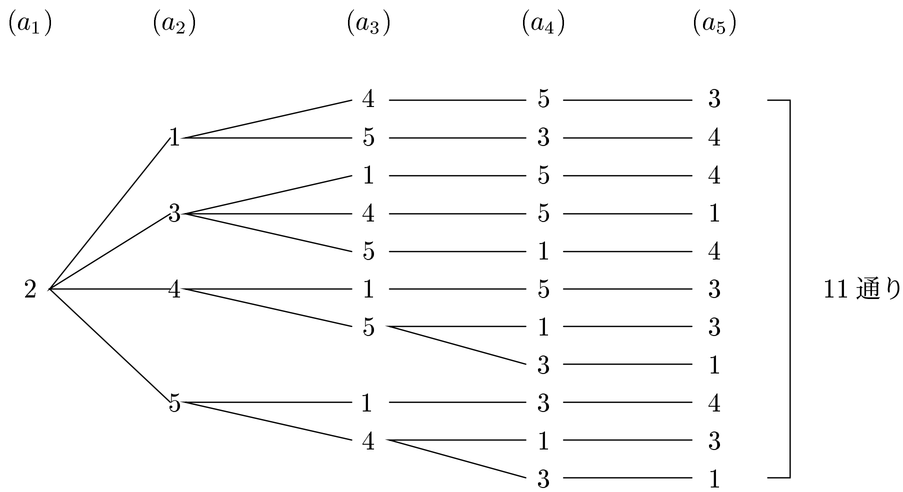
$$11 \times 4 = \underline{\underline{44\text{（通り）}}}$$

＜間違い＞

(i) $a_1 = 2$ のとき，$a_2 = 1$ と $a_2 \neq 2$ の 2 つの場合に分ける必然性がよくわからない。次に分類した一部を書き出しているが，読む方にとっては，こういう分類の記述はわかり易いものではない。

(ii) これは Tree を描くべき問題なのである。ただし全部を描くのは大変なので，一部を描いて全体を考えるのである。

＜解答＞ $a_1 = 2$ のときの Tree を描くと次のようになる。




$a_1$ =3，4，5 の場合も，同じ形の Tree になる（例えば $a_1 = 3$ の場合なら，$(a_2)$ と $(a_3)$ を入れかえて描くと $a_1 = 2$ のときと同じ形になる。他も同様）から，いずれも 11 通り。

$$\therefore\ 11 \times 4 = \underline{\underline{44}}\text{（通り）}$$