第 4 章

表を書かない間違い

関数の増減表や確率分布表を別にすれば，表を書くということは殆んど行われていない。

世間一般でも工夫された，わかり易い表には仲々お目にかかれない。

上手な表を書くということは，数理的思考の重要な能力の 1 つなのである。色々な事柄を表の形に示してみるという学習は，文系，理系にかかわらずもっと行われるべきである。

（４－１）

（問題）　観光バスに，日本人が 14 人，うち子供が 5 人，男が 6 人，外国人は大人が 7 人，女が 7 人，うち女の子供が 4 人，日本人と外国人合わせて男の子が 9 人，男の大人が 9 人乗っている。全部で何人乗っているか。

（解答実例）　各内訳の人数がわかれば総数が出るから，日本人の子供の男女をそれぞれ x,y, 大人の男女をそれぞれ a,b, 外国人の子供の男を X, 大人の男女をそれぞれ A,B, とおくと，

$$\left[\begin{array}{l} x+y=5, \quad a+b=14-5=9, \quad x+a=6, \quad y+b=14-6=8 \\ A+B=7, \quad 4+B=7 \\ x+X=9, \quad a+A=9 \end{array}\right.$$

であるから　$B=3$

$\therefore$　$A=4$

$\therefore$　$a=5,\ b=4,\ y=4,\ x=1,\ X=8$

よって，総数 $=x+y+a+b+X+4+A+B=\underline{\underline{33}}$

＜間違い＞

(i) 集合算のこの種の問題で，表を書いたものを見たことがない。なぜ表を書いてみようとしないのだろうか。

(ii) 表にすれば，全体の人数構成が一目瞭然となり，他の色々な問いに対しても即座に答えられる。上のような計算では総数以外何も見えてこない。

＜解答＞　まず示された人数を表に示すと次のようになる。

	日本人			外国人			計		
	男	女	小計	男	女	小計	男	女	小計
子供			5		4		9		
大人						7	9		
計	6		14		7				

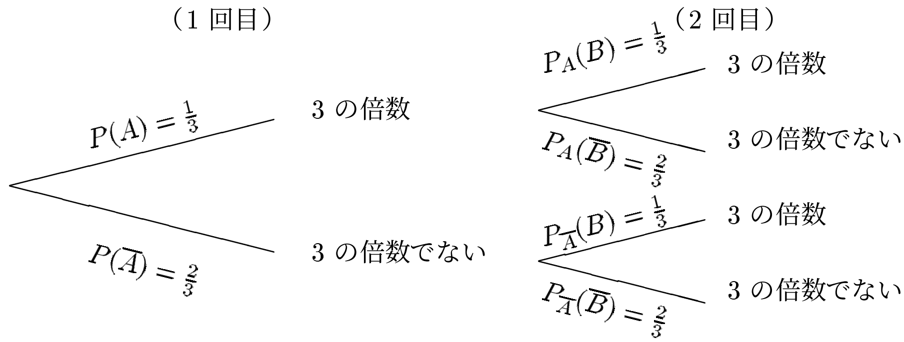
次に各欄の小計と計が合うように数字を埋めてゆくと，次の表になる。
（各欄の左上の（　）内の数字は，記入して行った順序を示している。）

	日本人			外国人			計		
	男	女	小計	男	女	小計	男	女	小計
子供	(8) 1	(7) 4	5	(9) 8	4	(11) 12	9	(14) 8	(17) 17
大人	(5) 5	(6) 4	(2) 9	(4) 4	(3) 3	7	9	(15) 7	(18) 16
計	6	(1) 8	14	(10) 12	7	(12) 19	(13) 18	(16) 15	(19) 33

∴表より　総数は　33（人）

（問題）　サイコロを 2 回振るとき，少なくとも 1 回 3 の倍数が出る確率を求めよ。

（解答実例）　1 回目に 3 の倍数が出る事象を A，2 回目に 3 の倍数が出る事象を B とおくと，起こり得る事態は次の Tree で表わされる。



求める確率は

$$P(A) + P(\overline{A} + B) = P(A) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

＜間違い＞

(i) Tree（樹形図）に確率を記入する場合は，確率の値だけを記入すればよい。また最後の行のように式で計算するのだったら，上の Tree はなんのために描いたのかわからない。

(ii) これは表を書く問題であって，Tree を描くなど見当違いである。そうでなくても，この Tree はまったく意味のない Tree である。

＜解答＞

1 回目 ＼ 2 回目	1	2	3	4	5	6
1			○			○
2			○			○
3	○	○	○	○	○	○
4			○			○
5			○			○
6	○	○	○	○	○	○

1 回目と 2 回目に出る目の組合せを表にして，少なくとも一方で 3 の倍数になる場合に○印を記入すると左表になる。　（○印は 20 個）

求める確率を p とすると，表より

$$p = \frac{20}{36} = \underline{\underline{\frac{5}{9}}}$$

（４－３）

（問題） 大小 2 個のサイコロを投げるとき，目の和が偶数になる場合は何通りあるか。

（解答実例） 目の和が偶数になるのは，次の [1]，[2] のいずれかの場合であり，この 2 つの場合は同時には起らない。

[1] 両方の目が偶数 その場合は積の法則により $3 \times 3 = 9$
[2] 両方の目が奇数 その場合も，同様に $3 \times 3 = 9$

したがって，求める場合の数は，和の法則により

$$9 + 9 = 18$$

(答) 18 通り

＜間違い＞

(i)「積の法則」とか「和の法則」によって，掛け算か足し算が決まるのではない。なぜ積になるのか，なぜ和になるのかという元の理由が重要なのであり，実際に勘定してみて，掛けるから積の法則，足すから和の法則になっただけのことである。
(ii) これは典型的な表の問題であり，表を書けば終りである。そして,「目の数が云々···」という他の問いにも直ぐ答えられる。

＜解答＞ サイコロ 1 とサイコロ 2 の目の和の表をつくると次のようになる。（○印は和が偶数のもの）

サイコロ 1 ＼ サイコロ 2	1	2	3	4	5	6
1	②	3	④	5	⑥	7
2	3	④	5	⑥	7	⑧
3	④	5	⑥	7	⑧	9
4	5	⑥	7	⑧	9	⑩
5	⑥	7	⑧	9	⑩	11
6	7	⑧	9	⑩	11	⑫

表より○印を勘定して

(答) 18 通り

（目の数が奇数の場合も 18 通りである。）

＜注＞　サイコロが 3 個だったらどうするのかと考えるであろう。3 個の目の和が偶数になる場合，上の表がそのまま役に立つ。

サイコロ 1 とサイコロ 2 の目の和が偶数　$\Longrightarrow$　サイコロ 3 の目が偶数であればよいから 3 通り

サイコロ 1 とサイコロ 2 の目の和が奇数　$\Longrightarrow$　サイコロ 3 の目が奇数であればよいから 3 通り

$\therefore$　全部で $(18 \times 3) + (18 \times 3) = 108$(通り) となる。

もう少し面倒な場合を次に示す。

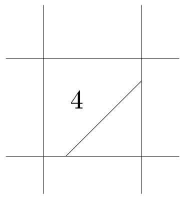
＜類題＞　3 個のサイコロを投げるとき， 目の積が 6 の倍数になる場合は何通りあるか。

＜解＞　先ずサイコロ 1 と 2 の目の積の表をつくり，各マス目の右下すみに斜線を入れ，6 の倍数となるための，サイコロ 3 の目が何通りあるかを記入し，その計の欄をつくると次表となる。

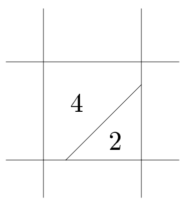
サイコロ 2 ＼ サイコロ 1	1	2	3	4	5	6	計
1	1 / 1	2 / 2	3 / 3	4 / 2	5 / 1	6 / 6	15
2	2 / 2	4 / 2	6 / 6	8 / 2	10 / 2	12 / 6	20
3	3 / 3	6 / 6	9 / 3	12 / 6	15 / 3	18 / 6	27
4	4 / 2	8 / 2	12 / 6	16 / 2	20 / 2	24 / 6	20
5	5 / 1	10 / 2	15 / 3	20 / 2	25 / 1	30 / 6	15
6	6 / 6	12 / 6	18 / 6	24 / 6	30 / 6	36 / 6	36
						（計）	133

表より
133 通り

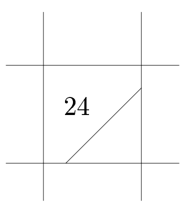
＜注＞
　例えば



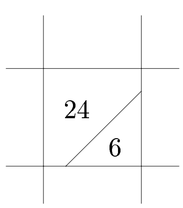
　だったら，積が 6 の倍数になるためには，サイコロ 3 の目が 3 か 6 になればよいから，2 通りである。



となる。
また



だったら，サイコロ 3 の目は何でもよいから，6 通りであり，



となる。

（問題）　自然数 $l,m,n\,(l \leqq m \leqq n)$ に対して

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

をみたす (l,m,n) の組をすべて求めよ。

（解答実例）

$l \leqq m \leqq n$　より　$\dfrac{1}{l} \geqq \dfrac{1}{m} \geqq \dfrac{1}{n}$

$\therefore 1=\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l}=\dfrac{3}{l}$

$\therefore l \leqq 3$　　$\therefore l=1,2,3$

(1) $l=1$ のとき　① をみたす m,n は存在しない。

(2) $l=2$ のとき　$2 \leqq m \leqq n$　$\cdots\cdots$ ②

で ① より $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$　$\therefore$　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{2}{m}$

$\therefore m \leqq 4$　これと②より　$m=2,3,4$

(ア) $(l,m)=(2,2)$ のとき　① をみたす n は存在しない。

(イ) $(l,m)=(2,3)$ のとき　① より　$n=6$

(ウ) $(l,m)=(2,4)$ のとき　① より　$n=4$

(3) $l=3$ のとき　$3 \leqq m \leqq n$　$\cdots\cdots$ ③ で,

① より $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$　$\therefore$　$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{2}{m}$

$\therefore m \leqq 3$　これと③より　$m=3$　このとき　$n=3$

以上より 求める (l,m,n) の組は

（2,3,6），（2,4,4)，（3,3,3）

＜間違い＞

(i) 一般に整数方程式を解くときの基本の手順があるのだが，それが全然見えてこない。手順の第 1 段階は因数分解である。

(ii) 手順の第 2 段階は表であるが，この種の問題で表が書かれているのを見たことがない。

＜解答＞ $l,m,n \in \mathbb{N}$, $l \leqq m \leqq n$ のとき

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1 \iff \frac{1}{2}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1 \quad (l=2)$$

$$\text{or} \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1 \quad (l=3)$$

（$l=1$ と $l \geqq 4$ が不適であることは明らか）

$$\iff \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad \frac{2}{3}$$

$$\iff \left(\begin{array}{ll} & 2n+2m=mn \\ \text{or} & 3m+3n=2mn \end{array}\right.$$

$$\iff \left(\begin{array}{llll} & (m-2)(n-2) & = 4 & (l=2) \\ \text{or} & (2m-3)(2n-3) & = 9 & (l=3) \end{array}\right.$$

これが成り立つような組合せを表に示すと次のようになる。

$l=2$, $(m-2)(n-2)=4$ の場合

$m-2$	$n-2$	m	n
1	4	3	6
2	2	4	4
4	1	6	3
-1	-4	1	-2
-2	-2	0	0
-4	-1	-2	1

$l=3$, $(2m-3)(2n-3)=9$ の場合

$2m-3$	$2n-3$	m	n
1	9	2	6
3	3	3	3
9	1	6	2
-1	-9	1	-3
-3	-3	0	0
-9	-1	-3	1

表より 条件 $1 \leqq l \leqq m \leqq n$ をみたすものを選ぶと

$(l,m,n)=(2,3,6)$, $(2,4,4)$, $(3,3,3)$