第 3 章

集合図を描かない間違い

集合算の問題のときは勿論であるが，個数の処理，確率の問題などでも，集合図（Venn 図）を描くということは最も基本的な作業である。ところが，先ず Venn 図を描いてみるということが殆んどない。その代り，集合算の公式による計算ばかりしている。こうゆう学習のしかたは本末転倒である。

（３－１）

（問題） あるクラスの生徒 45 人について通学方法を調べたところ，電車を利用する生徒が 22 人，自転車を利用する生徒が 15 人，電車と自転車両方を利用する生徒は 8 人であった。
(1) 電車と自転車の少なくとも一方を利用する生徒は何人か。
(2) 電車も自転車も利用しない生徒は何人か。

（解答実例） クラス全員の集合を全体集合 U とし，電車を利用する生徒の集合を A，自転車を利用する生徒の集合を B とする。

(1) 電車と自転車の両方を利用する生徒の集合は $A\cap B$ で表わされ，

$n(A)=22,\quad n(B)=15,\quad n(A\cap B)=8$

電車と自転車の少なくとも一方を利用する生徒の集合は $A\cup B$ で表わされるから $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=22+15-8=29$ （答） 29（人）

(2) 電車も自転車も利用しない生徒の集合は $\overline{A\cup B}$ で表わされるから

$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

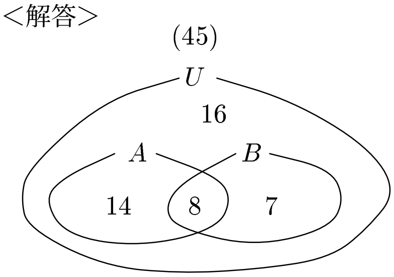
$=45-29=16$ （答） 16（人）

＜間違い＞

(i) $A\cup B$ だから， $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ では解答になっていない。
もし C もあるときは，
$A\cup B\cup C$ だから $n(A\cup B\cup C)$ はどうなるのか。それをきいているのがこの問題である。

(ii) なぜ集合図（Venn 図）を描かないのか。
Venn 図を描けば $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ となることは明らかであり，式など不要である。

＜解答＞



全体集合を U，電車，自転車を利用する生徒の集合をそれぞれ A， B とすると，Venn 図は左図となる。

図より (1) 29 人 (2) 16 人

（３－２）

> （問題）　300 人について，電気製品 A，B，C を持っているかどうかを調べた。
> (1) A，B，C を持っている人はそれぞれ 100 人，120 人，130 人であった。
> 3 種とも持っている人は 10 人，3 種とも持っていない人は 60 人であった。
> どれか 2 種だけ持っているのは何人か。
> (2) さらに，A，B の少なくとも一方を持っている人は 185 人であった。
> A，B の両方を持っているのは何人か。

（解答実例）全員の集合を U，A，B，C を持っている人の集合をそれぞれ A,B,C とする。

(1) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=n(U)-n(\overline{A\cup B\cup C})$　より
$100+120+130-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+10=300-60$
よって，A，B，C のどれか 2 種だけを持っている人の人数は
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\cdot n(A\cap B\cap C)=120-3\times 10=\underline{\underline{90（人）}}$

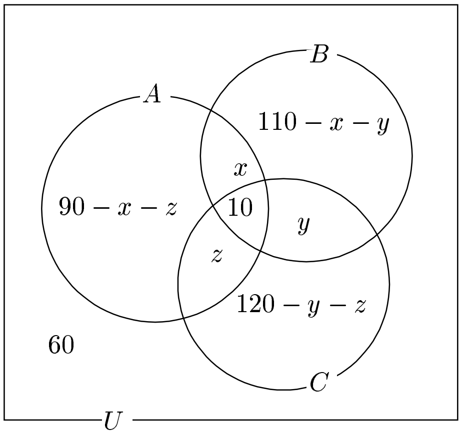
(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より
$185=100+120-n(A\cap B)$
$\underline{\underline{\therefore n(A\cap B)=35（人）}}$

＜間違い＞

(i) 集合算の公式を使ってこのように計算しなければならないとしたら，生徒達は逃げ出すだろう。

(ii) 集合算の公式の原理は Venn 図である。
こんな回りくどいことをしないで，Venn 図を描けばよいのである。
部分集合が A,B,C,D,E,$\cdots$ となればなおのことである。

＜解答＞ 全員の集合を U，A，B，C を持つ人の集合をそれぞれ A,B,C とし，どれか 2 種類だけを持っている人の人数を x,y,z として，Venn 図を描くと次図となる。



(300)

Venn 図より

(1) $300-60=(90-x-z)$
$\quad +(110-x-y)$
$\quad +(120-y-z)$
$\quad +x+y+z+10$

$$\Rightarrow \quad x+y+z=\underline{\underline{90\,(\text{人})}}$$

(2) $185=(90-x-z)+(110-x-y)+x+y+z+10$
$\quad =210-x$

$$\Rightarrow \quad x+10=\underline{\underline{35\,(\text{人})}}$$

（３－３）

（問題） 1 から 150 までの自然数の中で，次を求めよ。

(1) 3 でも 5 でも割り切れる自然数の個数
(2) 3 で割り切れるが，5 で割り切れない自然数の個数
(3) 3 でも 5 でも割り切れない自然数の個数

（解答実例）

(1) 3 でも 5 でも割り切れる自然数は 15 の倍数である。1 から 150 までの自然数の中で 15 の倍数は初項 15，公差 15 の等差数列で末項は 150 となるので，その項数を n とすれば $150 = 15 + 15(n-1)$

ゆえに $n - 1 = \dfrac{150-15}{15} = 9$ $\therefore\ n = 10$ ゆえに求める自然数は 10 個

(2) 3 で割り切れるが，5 で割り切れない自然数の集合は，3 の倍数の集合から 15 の倍数の集合を除いたものである。3 の倍数の集合は，初項 3，末項 150，公差 3 の等差数列となるので，その個数を m とすれば
$150 = 3 + 3(m-1)$ ゆえに $m - 1 = \dfrac{150-3}{3} = 49$ $\therefore m = 50$
この中から (1) で求めた 15 の倍数の個数 10 を除けばよいので
$50 - 10 = 40$ で 40 個

(3) 3 でも 5 でも割り切れない自然数の集合の補集合は，3 または 5 の倍数の集合である。その個数は，
（3 の倍数の個数）+（5 の倍数の個数）−（15 の倍数の個数）であり，
（5 の倍数の個数）は (1)，(2) 同様に $(150-5) \div 5 = 30$（個）。
これより $50 + 30 - 10 = 70$（個）。1 から 150 までの自然数の集合の個数は 150 個であるから，求める自然数の個数は
$150 - 70 = 80$ より 80 個

＜間違い＞

(i) だらだらと回りくどい記述である。また等差数列を使ったり集合算を使ったり，方法も一貫していない。
　これを見た生徒は間違いなく数学嫌いになるだろう。なぜ記号化して表現を簡素化し，方法の基本的な流れがよく判るように書こうとしないのか。

(ii) これは Venn 図を描くべき問題である。
また，例えば 15 で割り切れる数の個数は $150 \div 15 = 10$（個）でよい。等差数列で解くなど，金槌でハエを叩くようなものである。

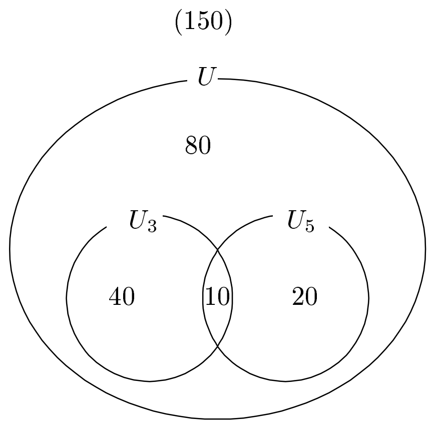
＜解答＞

$U=\{1,2,3,\cdots 149,150\}$　とおき,

このうち $k(\in\mathbb{N})$ で割り切れる数の集合を U_k で表わす。

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{rcl} n(U) & = & 150 \\ n(U_3) & = & \frac{150}{3} \;=\; 50 \\ n(U_5) & = & \frac{150}{5} \;=\; 30 \\ n(U_3\cap U_5) & = & n(U_{15}) \;=\; \frac{150}{15} \;=\; 10 \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$　Venn 図は右のようになる。



$\Longrightarrow$　図より　$\underline{\underline{(1)\ 10,\quad (2)\ 40,\quad (3)\ 80}}$

（３－４）

（問題）　事象 A と B は独立で，$P(A)=\dfrac{1}{4}$，　$P(B)=\dfrac{2}{5}$ とする。
このとき $P(A\cap B)$，　$P(A\cup B)$，　$P_A(B)$，　$P_{A\cup B}(\overline{A})$
をそれぞれ求めよ。

（解答実例）

A,B は独立だから $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\dfrac{2}{20}=\underline{\underline{\dfrac{1}{10}}}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{10}=\underline{\underline{\dfrac{11}{20}}}$

乗法定理より　$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$，また，$A,B$ は独立だから
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

よって $P_A(B)=P(B)=\underline{\underline{\dfrac{2}{5}}}$

A,B は独立だから，$\overline{A}$ と B も独立であり，

$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)$

よって

$$P_{A\cup B}(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(\overline{A})\cdot P(B)}{P(A\cup B)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{11}{20}}=\underline{\underline{\frac{6}{11}}}$$

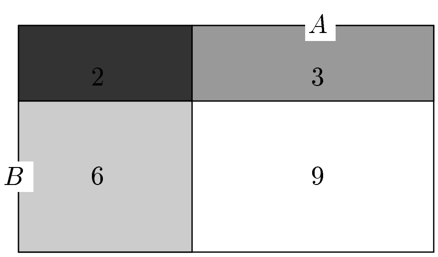
＜間違い＞

(i) こうゆう解き方は，確かに計算としてはその通りだが，ただ計算をしたというだけで事象の姿が見えてこない。

(ii) これも Venn 図を描けば終りである。ただし，A,B が独立であることを示すためには長方形で表わすのがよい。

＜解答＞ $P(A)=\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{20}$，　$P(B)=\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{20}$ だから，全体集合は 20 個の等確率の根元事象の集合とみてよい。

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\dfrac{2}{20}$ より Venn 図は
次のようになる。



図より

$$\begin{cases} P(A\cap B) &= \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \\ P(A\cup B) &= \frac{11}{20} \\ P_A(B) &= \frac{2}{5} \\ P_{A\cup B}(\overline{A}) &= \frac{6}{11} \end{cases}$$

<注>　事象 A と B が互いに独立であるとは，$P(A)$ と，B のなかで A が起こる確率 $P_B(A)$ は同じである。すなわち，A という事象の起こる確率は B の影響を全く受けない（独立である）ということであり，B についても同様である。

従って，根元事象を Venn 図で表わすとき，全体の中の A の割合と，B の中での A の割合は同じでなければならない（B についても同様)。

今，$P(A) = p$，　$P(B) = q$　$(0 < p < 1,\quad 0 < q < 1)$ とすると，
次のような長方形の Venn 図に表わすことができて，

$P(A \cap B) = pq = P(A) \cdot P(B)$ である。