第 2 章

記号化しない間違い

記号化（定式化も含めて）は数学の最も本質的な機能である。ところが実状は，記号化ということが殆んど行われていない。従って，文章の記述ばかりが多くなり，非常にわかりにくいものとなっている。

教科書では,「命題と集合」という章で，記号と論理について十分に説明されているにも拘らず，それが殆ど使われていないということは，実に不合理なことである。

（問題）　m,n を自然数とし，$m>n$ とする。$m+n$ と $m-n$ が互いに素であるならば，m,n は互いに素であることを，対偶を利用して証明せよ。

（解答実例）

この命題の対偶は，次の命題である。

“ m と n が互いに素でないならば，$m+n$ と $m-n$ は互いに素でない ”$\cdots$(ア)

m と n が互いに素でないとき，m と n は 1 以外の自然数 k を用いて $m=km_1$，$n=kn_1$ と表わされる。

このとき，$m+n=k(m_1+n_1)$，$m-n=k(m_1-n_1)$ となり，$m+n$ と $m-n$ は 1 以外に公約数 k をもつから互いに素でない。よって命題 (ア) は真である。したがって，もとの命題も真である。

＜間違い＞

(i) 記号化が不十分である。m と n の最大公約数は，(m,n) であり，互いに素ということは $(m,n)=1$ で表わされる。最大公約数，素数は中学 3 年で学んでいる。記号化もこのときに徹底すべきである。

(ii) 「P⇒ Q」と「$\overline{\mathrm{Q}}\Rightarrow\overline{\mathrm{P}}$ 」は互いに対偶命題であり「P⇒ Q」⇔「$\overline{\mathrm{Q}}\Rightarrow\overline{\mathrm{P}}$」 である（2 つの命題は同値)。これは論理の基本である。

つまり「$\overline{\mathrm{Q}}\Rightarrow\overline{\mathrm{P}}$ 」が証明されたら,「P⇒ Q」が証明されたことになるのだから，もっと簡潔に書ける。

＜解答＞

$$
\begin{array}{llll}
 & (m,n)=k>1 & \Rightarrow & m=km_1,\quad n=kn_1,\quad (k,n_1,m_1\in\mathbb{N}) \\
 & & \Rightarrow & m+n=k(m_1+n_1),\quad m-n=k(m_1-n_1) \\
 & & \Rightarrow & (m+n,m-n)\geqq k>1 \\
\therefore & (m+n,m-n)=1 & \Rightarrow & (m,n)\ =\ 1 \qquad (\mathrm{Q.\ E.\ D.})
\end{array}
$$

（問題）　次のことが成り立つことを証明せよ。
「$a^2 > bc$ かつ $ac > b^2$」ならば $a \neq b$ である。

（解答実例）$a = b$ と仮定すると，$a^2 > bc$，　$ac > b^2$ は

それぞれ $a^2 > ac$，　$ac > a^2$

すなわち $a > c$，　$c > a$ となる。

これは同時に満たすことはできない。

したがって $a \neq b$ である。

ゆえに「$a^2 > bc$ かつ $ac > b^2$」ならば $a \neq b$ である。（終）

＜間違い＞

(i) 背理法によって説明しているが，背理法は対偶の応用であるから，もっと記号化して論理的にそのことがはっきりわかるように書くべきである。また，接続詞の羅列は安易すぎる。特に 3 行目の「すなわち」は説明不足である。

$a^2 > ac$ から $a > c$ は云えないからである。

(ii) 特に背理法による必要はない。直接示す方がわかり易い。背理法を使うなら，使った方が簡単な問題にすべきである。その例を＜類題＞に示す。

＜解答＞

$$
\begin{aligned}
a = b \quad \Rightarrow \quad (a^2 - bc)(ac - b^2) &= (a^2 - ac)(ac - a^2) \\
&= a^2(a - c)(c - a) \\
&= -a^2(a - c)^2 \leqq 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad (a^2 - bc > 0 \quad \& \quad ac - b^2 > 0)$ ではない。

$\therefore a^2 > bc \quad \& \quad ac > b^2 \quad \Rightarrow \quad a \neq b$　（Q．E．D．）

直接の証明を示しておく。

＜解答＞

$$
\begin{aligned}
a^2 > bc \quad \& \quad ac > b^2 \quad &\Rightarrow \quad a^2 - bc > 0 \quad \& \quad ac - b^2 > 0 \\
&\Rightarrow \quad a^2 - bc + ac - b^2 > 0 \\
&\Rightarrow \quad (a - b)(a + b + c) > 0 \\
&\Rightarrow \quad a \neq b \quad \text{（Q．E．D．）}
\end{aligned}
$$

次に背理法を使った方が簡単な例を挙げる。

＜類題＞　a，$b \in \mathbb{R} > 0$，$x > 0$ のとき，
$ax + b > 0$ ならば $a > 0$ または $b > 0$ が成り立つことを証明せよ。

＜解＞　$x > 0$ のもとで，
$a \leqq 0 \quad \& \quad b \leqq 0 \quad \Rightarrow \quad ax + b \leqq 0$
$\therefore ax + b > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0 \quad \text{or} \quad b > 0$　　　（Q．E．D．）

＜注＞ 命題 P，Q が P=「$ax + b > 0$」，　Q=「$a > 0$ or $b > 0$」のとき，その否定命題 $\overline{\mathrm{P}}$,$\overline{\mathrm{Q}}$ は
$\overline{\mathrm{P}}$ =「$ax + b \leqq 0$」，$\overline{\mathrm{Q}}$ =「$a \leqq 0$ & $b \leqq 0$」である。

（問題）　n は自然数とする。n^3+2n は 3 の倍数であることを，数学的帰納法によって証明せよ。

（解答実例）証明すべき命題を A とする。

[1] $n=1$ のとき $n^3+2n=1^3+2\cdot 1=3$　ゆえに A は成り立つ。
[2] $n=k$ のとき，A が成り立つと仮定すると，k^3+2k は 3 の倍数であるから，m を整数として，次のようにおける。

$$k^3+2k=3m$$

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}(k+1)^3+2(k+1) &= (k^3+3k^2+3k+1)+(2k+2)\\ &= (k^3+2k)+3(k^2+k+1)\\ &= 3m+3(k^2+k+1)\\ &= 3(m+k^2+k+1)\end{aligned}$$

$m+k^2+k+1$ は整数であるから，$(k+1)^3+2(k+1)$ は 3 の倍数となり，$n=k+1$ のときにも A が成り立つ。

[1]，[2] より，A はすべての自然数 n について成り立つ。

＜間違い＞

(i) 数学的帰納法とは，自然数 n についての命題 $\mathrm{P}(n)$ の成立を証明するための公理（定義と云ってもよい。定理ではない）である。もっと記号化して簡潔に書くべきである。[1] で，ゆえに A は成り立つというのはおかしい。こんな変な文章になるのは命題がきちんと記号化されていないからである。

(ii) 数学的帰納法を使わせる問題ならば，それを用いた方が他の方法によるよりも楽に解けるものにすべきである。そうすれば数学的帰納法の偉力がよく理解されることゝ思う。その例を＜類題＞で示しておく。

＜解答＞　$x \in \mathbb{N}$ が 3 の倍数であることを $3|x$ で表わし，
命題「$3|f(n)$」（$f(n) = n^3 + 2n$,　$n \in \mathbb{N}$）を $\mathrm{P}(n)$ で表わす。

(1) $f(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad 3|f(1)$　　　$\therefore$ $\mathrm{P}(1)$ 成立

(2) $\mathrm{P}(k)$　$(k \geqq 1)$ を仮定

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 3|f(k) \\
&\Rightarrow \quad f(k+1) = (k+1)^3 + 2(k+1) \\
&\qquad\qquad\quad = k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1) \\
&\qquad\qquad\quad = f(k) + 3(k^2 + k + 1) \\
&\Rightarrow \quad 3|f(k+1)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $\mathrm{P}(k+1)$ 成立

以上 (1)(2) より $\mathrm{P}(n)$ 成立　（Q．E．D．）

この問題は数学的帰納法を用いなくても簡単に解けるので，その解答を示しておく。

＜解答＞　$n = 3k + r$　($k \in \mathbb{Z}$,　$r = 0$,　1,　2) とおく。

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad n^3 + 2n &= (3k + r)^3 + 2(3k + r) \\
&= 3(9k^3 + 9k^2 r + 3kr^2 + 2k) + r^3 + 2r
\end{aligned}
$$

（ここで $r^3 + 2r = 0$,　3,　12）

$\Rightarrow$　$n^3 + 2n$ は 3 で割り切れる。　（Q．E．D．）

＜注＞ 問題は 3 で割り切れるかどうかということであるから，整数を 3 の剰余類（3 で割った余り 0，1，2 の 3 種に分類したもの）によって処理する方法で，整数の割り算の問題を解くときの最も基本的な方法である。

数学的帰納法を使わざるを得ない例を示そう。次の問題は直接解こうとしてもどうしてよいか簡単にはわからない。

＜類題＞　$2^{n+1}+3^{2n-1}$　$(n \in \mathbb{N})$ は 7 で割り切れることを証明せよ。

＜解＞　x が 7 で割り切れることを $7|x$ で表わし，命題「$7|f(n)$」

$(n \in \mathbb{N},\quad f(n)=2^{n+1}+3^{2n-1})$ を $\mathrm{P}(n)$ で表わすことにする

(1) $n=1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=2^2+3=7$

$\Rightarrow \quad 7|f(1)$　　　$\therefore$ P(1) 成立

(2) $\mathrm{P}(k)$　$(k \geqq 1)$ 成立を仮定

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 7|f(k)\\
&\Rightarrow \quad f(k+1)=2^{k+2}+3^{2(k+1)-1}\\
&\qquad\qquad\quad =2\cdot 2^{k+1}+9\cdot 3^{2k-1}\\
&\qquad\qquad\quad =9(2^{k+1}+3^{2k-1})-7\cdot 2^{k+1}\\
&\qquad\qquad\quad =9\cdot f(k)-7\cdot 2^{k+1}\\
&\Rightarrow \quad 7|f(k+1)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $\mathrm{P}(k+1)$ 成立

以上 (1)，(2) より $\mathrm{P}(n)$ 成立　（Q．E．D．）

（２－４）

>（問題）　自然数の列を，次のように群に分ける。
>
> $\{1\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\ \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},\ \cdots\cdots$
>
> (第 1 群)　(第 2 群)　　(第 3 群)
>
> (1) 第 n 群の最初の数を求めよ
>
> (2) 100 は第何群の何番目か
>
> (3) 第 10 群にあるすべての数の和を求めよ

（解答実例）

(1) 第 k 群は $(2k-1)$ 個の自然数を含むから，第 1 群から第 $n-1$ 群 $(n \geqq 2)$ までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) = 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1) = n^2-2n+1$$

したがって，第 n 群の最初の自然数は，もとの自然数列の第 $(n^2-2n+1)+1$ 項になる。よって第 n 群の最初の自然数は n^2-2n+2 となり，$n=1$ のときも成り立つ。(答)　$\underline{\underline{n^2-2n+2}}$

(2) 100 が第 n 群にあるとすると，第 n 群に属する自然数は，n^2-2n+2 から n^2 までであるから，$n^2-2n+2 \leqq 100 \leqq n^2$

n^2-2n+2，n^2 は $n=10$ のとき，$10^2-2\cdot10+2=82$，　$10^2=100$ となって $82 \leqq 100 \leqq 100$ を満たす。よって 100 は第 10 群にある。100 は第 10 群の最後の数であり，第 10 群は $2\cdot10-1=19$ 個の自然数を含むから，100は第 10 群の 19 番目の数である。(答)

(3) 第 10 群は，初項 82，末項は 100，項数は 19 の等差数列であるから

$$\frac{1}{2}\cdot19(82+100) = \underline{\underline{1729}}\ \ (答)$$

＜間違い＞

(i) ただだらだらと書いただけの作文である。これを読む者は，書いてあることを，もう一度整理し直さなければわからないだろうと思う。

(ii) なぜもっと記号化を考えないのか。この種の問題で記号化の工夫がなされたのを見たことがない。

＜解答＞

第 n 群の k 番目の数を $a(n,k)$ で表わし，第 n 群に含まれる個数を $N(n)$, その総和を $S(n)$ とおく。

$$\Rightarrow \begin{cases} N(n) = 2n-1 \\ a(n,k) = N(1)+N(2)+\cdots+N(n-1)+k \end{cases}$$

$$= 1+3+5+\cdots+(2n-3)+k$$

$$= (n-1)^2+k \quad (1 \leqq n,\quad 1 \leqq k \leqq 2n-1)$$

(1) $a(n,1) = (n-1)^2+1 = \underline{\underline{n^2-2n++2}}$ …… (答)

(2) $100 = a(n,k) \Rightarrow a(n,1) \leqq 100 \leqq a(n,2n-1)$

$\Rightarrow n^2-2n+2 \leqq 100 \leqq n^2$

$\Rightarrow n = 10$

$\Rightarrow 100 = a(10,k) = 81+k$

$\Rightarrow \underline{\underline{100 = a(10,19)}}$ ……(答)

(3) $S(10) = a(10,1)+a(10,2)+\cdots+a(10,19)$

$= 82+83+\cdots+100$

$= \dfrac{1}{2} \times 182 \times 19 = \underline{\underline{1729}}$ ……(答)