第 1 章

数列の計算の間違い

数列の問題の殆んどは，和を求めるか，漸化式から一般項を求めるものである。そのときの計算原理は大別して 2 つしかない。その 1 つは台形の面積の原理であり（これは等差数列のときに限る），もう 1 つは，数列の中間部を消去する原理である。この 2 つの原理のいずれかによってすべてが処理されるのに，この基本原理をもとに教えている教科書や参考書を今までに見たことがない。

（１－１）

（問題）最下段に 20 個，次の段に 19 個，その次の段に 18 個，というように順に 1 個ずつ減らしながらブロックを積んで行き，最上段が 10 個にな るようにしたい。ブロックは全部で何個必要か。

（解答実例）

この積み方で，仮に最上段のブロックが 1 個，最下段のブロックが 20 個のとき，ブロックの個数は，タテ 20 個，ヨコ 21 個の点の配列を考えて

$$1+2+3+\cdots+20=\frac{1}{2}\times 20\times 21=210$$

また，最上段が 1 個，最下段が 9 個のとき，ブロックの個数はタテ 9 個，ヨコ 10 個の点の配列を考えて

$$1+2+3+\cdots+9=\frac{1}{2}\times 9\times 10=45$$

よって必要なブロックの個数は $210-45=165$　　（答）$\underline{\underline{165}}$

＜間違い＞

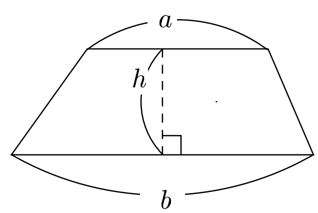
(i) なにがなんでも公式　$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ を使おうとしているようである。
だから，点の配列を考えるなど回りくどいことになる。

(ii) 等差数列で重要な公式は

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$ ではなく，次である。

「初項 a，末項 b，項数 h の等差数列の和 S は

$$S=\frac{(a+b)h}{2}$$」



これは右図の台形の面積と同じである。従って等差数列の和の原理は,「台形の原理」とも云うべきものである。この原理が重要なのである。

＜解答＞ 求めるブロックの総数を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= 10+11+12+\cdots+19+20 \\ &= \frac{1}{2}\times(10+20)\times 11 \\ &= \underline{\underline{165}} \end{aligned}$$ ……（答）

<注>

初項 a，公差 d，末項 b の等差数列の項数を h とすると $\left(h = \dfrac{b-a}{d} + 1\right)$，その和 S の公式は次のようにして得られる。

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (b-d) + b \cdots\cdots ①$$

$$S = b + (b-d) + (b-2d) + \cdots + (a+d) + a \cdots\cdots ②$$

（② は ① を逆に並べただけのものである）

$$\begin{aligned} \Longrightarrow & & & \text{①と②の辺々を加えて} \\ & 2S & = & (a+b) + (a+b) + \cdots + (a+b) \\ & & = & (a+b)h \\ \Longrightarrow & S & = & \underline{\underline{\frac{(a+b)h}{2}}} \end{aligned}$$

すなわち $S = \dfrac{(\text{初項} + \text{末項}) \times (\text{項数})}{2}$ である。

（問題）次の和を求めよ。

$$1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+n\cdot 3^{n-1}$$

（解答実例）$S=1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+n\cdot 3^{n-1}$

とおき，両辺を 3 倍すると

$$3S=1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 3^n$$

辺々引くと　$S-3S=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\cdot 3^n$

$$\begin{aligned} \text{よって}\quad -2S &= \frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-n\cdot 3^n \\ &= \frac{-1-(2n-1)\cdot 3^n}{2} \\ \text{ゆえに（答）}\quad S &= \underline{\underline{\frac{1+(2n-1)\cdot 3^n}{4}}} \end{aligned}$$

＜間違い＞

(i) 等比数列の和の公式

$$S_n=\frac{a\cdot(r^n-1)}{r-1}$$ の形を用いている。

例えば $T=3^6+3^8+3^{10}+\cdots+3^{2m}\ (m\geqq 3)$ になると，多くの生徒が公式の n にまどわされて間違えてしまうのだが，

初項 a，末項 b，公比 r の等比数列の和は $\dfrac{a-br}{1-r}$ であり，この公式によれば $T=\dfrac{3^6-3^{2m+2}}{1-3^2}=\dfrac{9(3^{2m}-81)}{8}$ となり間違えようがない。

(ii) 記述の T の「よって」とか「ゆえに」は必然性がなく，そのときどきの思い付きの言葉に過ぎない。

＜解答＞

$$\begin{aligned} & S=1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 3^{n-1} \\ \Rightarrow\quad & 3S = 1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+(n-1)3^{n-1}+n\cdot 3^n \\ \Rightarrow\quad & S-3S=-2S \\ & =1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}-n\cdot 3^n \\ & =\frac{1-3^n}{1-3}-n\cdot 3^n \\ \Longrightarrow\quad & \underline{\underline{S=\frac{1+(2n-1)3^n}{4}}}\cdots\cdots\text{（答）} \end{aligned}$$

<注>

初項 a，公比 r $(r \neq 1)$，末項 b の等比数列の和 S の公式は，次のようにして得られる。

$$\left[\begin{array}{rl} S = & a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + b \qquad \cdots\cdots① \\ rS = & \qquad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + b + br \cdots\cdots② \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$ ① − ②より

$$(1-r)S = a - br$$

$$\Longrightarrow \quad S = \frac{(a-br)}{1-r}$$

すなわち $S = \dfrac{(\text{初項}) - (\text{末項の次の項})}{1 - (\text{公比})}$ である。

これを公式とすべきである。この公式を導き出した計算の原理は「中間部を消すこと」である。

（１－３）

（問題）$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，次の等式を証明せよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

（解答実例）恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ に於いて

$k=1$ とすると　$2^4-1^4=4\cdot 1^3+6\cdot 1^2+4\cdot 1+1$

$k=2$ とすると　$3^4-2^4=4\cdot 2^3+6\cdot 2^2+4\cdot 2+1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$　　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$k=n$ とすると　$(n+1)^4-n^4=4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1$

これらの辺々を加えると

$$\begin{aligned}(n+1)^4-1^4 &= 4(1^3+2^3+\cdots+n^3)+6(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\ &\quad +4(1+2+\cdots+n)+n\\ &= 4(1^3+2^3+\cdots+n^3)\\ &\quad +n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n\end{aligned}$$

よって $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4}\{(n+1)^4-1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n\}\\ &= \frac{1}{4}(n+1)\{(n+1)^3-1-n(2n+1)-2n\}\\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2\end{aligned}$$
（終）

＜間違い＞

(i) もし，問題が,「$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ を求めよ」だったら，最も面倒で時間のかかる方法で解いていることになり，計算ミスの可能性も高くなる。

(ii) 方法は常により簡単なものを探さなければならない。それが 2 つあって優劣が判じ難いときは 2 法のどちらでもよい。この問題の場合

(I) 各項を差の形に変形する。

(II) 数学的帰納法による。

の 2 つがあって，優劣はつけ難い。

<解答>

(I)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n}\{(k-1)k(k+1)+k\}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)+\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)k(k+1)(k+2)-(k-2)(k-1)k(k+1)\}+\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)+\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n) \ = \ \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2\end{aligned}$$

(Q．E．D．)

(II) 命題「$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$」$(n\in\mathbb{N})$

を P(n) で表わす。

(1) $n=1 \Longrightarrow 1^3=\left\{\frac{1}{2}1\cdot 2\right\}^2$ $\therefore$P(1) 成立

(2) P(k) $(k\geqq 2)$ 成立を仮定

$\Longrightarrow 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2$

$\Longrightarrow 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$

$$\begin{aligned} &= \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2+(k+1)^3\\ &= (k+1)^2\left(\frac{1}{4}k^2+k+1\right)\\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2\\ &= \left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right\}^2 \quad \therefore \mathrm{P}(k+1) \text{ 成立}\end{aligned}$$

以上 (1)(2) より P(n) 成立 (Q．E．D．)

<注> 解法（I）は，雑数列の和を求めるときの，中間部を消す方法である。問題（1－2）では両辺にある数を掛けて，元の式から引いて中間部を消したが，上の場合は，各項の差の形に変えて中間部を消す方法である。

解法（II）の数学的帰納法の場合は，証明すべき命題を記号化（P(n)）すべきである。そうすると記述も簡潔になり，わかり易くなる。

(1 − 4)

（問題）　$a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（解答実例）

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$b_n = a_{n+1}-a_n=(2a_n+3)-a_n=a_n+3$$

ゆえに　$a_n = b_n-3\cdots\cdots①$

一方　$a_{n+1} = 2a_n+3,\quad a_{n+2} = 2a_{n+1}+3$ であるから

$$a_{n+2}-a_{n+1} = 2(a_{n+1}-a_n)$$

すなわち　$b_{n+1} = 2b_n$

また　$b_1 = a_1+3 = 4$

よって　$\{b_n\}$ は初項 4，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$$

したがって ① から $\underline{\underline{a_n=2^{n+1}-3}}$

＜間違い＞

(i) 先ず第一に,「ゆえに」,「一方」,「すなわち」,「また」,「したがって」…… と, 接続詞のオンパレードである。こんな記述法（接続詞の使い方）をどうゆうふうに生徒に教えたらよいのか。

(ii) 漸化式から一般項を求める問題のとき，階差数列を用いるのが一般であるが，原理的には階差数列など用いる必要はない。

一般項を求める場合も，漸化式を並べて中間部を消すのが原理であり，消し方は辺々加える法（I）と，辺々掛ける法（II）の 2 通りだけであり，次にその両法を示す。

＜解答＞

(I) $a_{n+1} = 2a_n + 3$

$$\Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rcl} a_n & = & 2a_{n-1} + 3 \\ a_{n-1} & = & 2a_{n-2} + 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_2 & = & 2a_1 + 3 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rcl} a_n & = & 2a_{n-1} + 3 \\ 2a_{n-1} & = & 2^2 a_{n-2} + 3 \cdot 2 \\ 2^2 a_{n-2} & = & 2^3 a_{n-3} + 3 \cdot 2^2 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^{n-2} a_2 & = & 2^{n-1} a_1 + 3 \cdot 2^{n-2} \quad (a_1 = 1) \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow$ 辺々加えて $\quad a_n = 2^{n-1} a_1 + 3(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) \qquad (*)$

$$= 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - 1) = \underline{\underline{2^{n+1} - 3}}$$

(II) $a_{n+1} = 2a_n + 3 \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3) \qquad (**)$

$$\Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rcl} a_n + 3 & = & 2(a_{n-1} + 3) \\ a_{n-1} + 3 & = & 2(a_{n-2} + 3) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_2 + 3 & = & 2(a_1 + 3) \quad (a_1 = 1) \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow$ 辺々掛けて $\quad a_n + 3 = 2^{n-1}(a_1 + 3) = 2^{n+1}$

$\Longrightarrow \underline{\underline{a_n = 2^{n+1} - 3}}$

＜注＞ 一般には（II）の方が楽であるが，$(**)$ の変形が面倒なときもある。また（I）は $(*)$ のようにある数列の和の計算が必要となり，この数列が面倒な形になると，それだけ手間がかかる。

（I）か（II）かは，少し書いてみて判断するしかない。

参考のため，＜類題＞を 1 つ挙げ,（I）と（II）で解いてみる。

＜類題＞）　$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = 2a_n + n - 1\ (n \geqq 2)$ で表わされる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(I) による解：

$$a_{n+1} = 2a_n + n - 1 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rcl} a_n &=& 2a_{n-1} + n - 1 \\ a_{n-1} &=& 2a_{n-2} + n - 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_2 &=& 2a_1 + 1 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rcl} a_n &=& 2a_{n-1} + n - 1 \\ 2a_{n-1} &=& 2^2 a_{n-2} + 2(n-2) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2^{n-2}a_2 &=& 2^{n-1}a_1 + 2^{n^2} \cdot 1 \quad (a_1 = 1) \end{array}\right.$$

辺々加えて

$\Longrightarrow a_n = 2^{n-1} + (n-1) + 2(n-2) + 2^2(n-3) + \cdots + 2^{n-2} \cdot 1$　　$\cdots$①

$\Longrightarrow 2a_n = 2^n + 2(n-1) + 2^2(n-2) + 2^3(n-3) + \cdots + 2^{n-2} \cdot 2 + 2^{n-1}$　　$\cdots$②

②-①より

$$\begin{aligned} \Longrightarrow a_n &= 2^n - 2^{n-1} - (n-1) + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1} - n + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= 2^{n-1} - n + 2^n - 1 = \underline{\underline{3 \cdot 2^{n-1} - n - 1}} \end{aligned}$$

(II) による解：

$$a_{n+1} = 2a_n + n - 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n + n + 1 = 2(a_{n-1} + n)$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{rcl} a_n + n + 1 &=& 2(a_{n-1} + n) \\ a_{n-1} + n &=& 2(a_{n-2} + n - 1) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_2 + 3 &=& 2(a_1 + 2) \quad (a_1 = 1) \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$　辺々掛けて $a_n + n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\Longrightarrow$　$\underline{\underline{a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1}}$